TD n^{o}8 : NP-complétude

Dire qu'un problème est NP-complet, c'est à dire qu'il est dans NP (borne supérieure) et qu'il est difficile pour cette classe (borne inférieure). Le plus souvent, le premier point est facile alors que le second est plus délicat. Pour le montrer, on effectue souvent une réduction à un autre problème dont on sait déjà qu'il est NP-difficile. Les exercices suivants permettent de se familiariser avec cette technique.

Exercice 1. – Graphe eulérien
Le graphe G est *eulérien* si il existe un cycle en empruntant exactement une fois chaque arête du graphe G

1. Montrer qu'un graphe connexe est eulérien si et seulement si chacun de ses sommets a un degré pair.
2. Trouver un algorithme polynomial qui détermine si le graphe est eulérien.
3. Ecrire le problème de décision qui lui est associé.

Exercice 2. – Problème de décision
Mettre les problèmes suivants sous forme de problème de décision :

1. de savoir si G est connexe
2. de savoir s'il existe un chemin entre u et v dans G.
3. de connaitre le nombre chromatique $\chi(G)$ de graphe G
4. de connaitre la distance entre deux sommets u et v dans G.

Exercice 3. – Problème du plus court chemin
Trouver un algorithme polynomial qui détermine s'il existe un chemin entre u et v dans G.

Exercice 4. – Chaine hamiltonienne.

Considérez les deux problèmes suivants :

Chaine Hamiltonienne
Données : un graphe non-orienté G, deux sommets u et v distincts de G.
Question : G contient-il une chaine hamiltonienne entre u et v ?

Chaine
Données : un graphe non-orienté G de n sommets, deux sommets u et v distincts de G.
Question : G contient-il une chaine de longueur $n/2$ entre u et v ?

Montrer que

1. les problèmes Chaine Hamiltonienne et Chaine sont dans NP.
2. Chaine est NP-complet sachant que Chaine Hamiltonienne est NP-complet.

Exercice 5. – Cycle hamiltonien.

Considérez le problème suivant :

Cycle Hamiltonien
Données : un graphe non-orienté G.
Question : G contient-il un cycle hamiltonien ?

Montrer que Cycle Hamiltonien est dans NP et qu'il est NP-complet.

Exercice 6. – Chevaliers de la table ronde

Etant donnés n chevaliers, et connaissant toutes les paires de féroces ennemis parmi eux, est-il possible de les placer autour d'une table circulaire de telle sorte qu'aucune paire de féroces ennemis ne soit côte à côte ?

Exercice 7. – Voyageur de commerce.

Considérez les deux problèmes suivants :

Circuit Hamiltonien
Données : un graphe orienté G.
Question : G contient-il un circuit hamiltonien ?

Voyageur de Commerce
Données : un graphe orienté complet pondéré G, un entier k.
Question : Existe-t-il un circuit de G passant au moins une fois par chaque sommet et dont la somme des poids des arcs est au plus k ?

Le problème Circuit Hamiltonien est NP-complet. Montrer que Voyageur de Commerce est NP-complet.

Exercice 8. – Réduction

Soient P1, P2 et Q des problèmes de décision. Supposons que P1 est dans P, et que P2 est NP-dur. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si P1 se réduit polynômialement en Q, alors Q est P.
2. Si Q se réduit polynômialement en P1, alors Q est P.
3. Si Q se réduit polynômialement en P2, alors Q est $NP - dur$.
4. Si P2 se réduit polynômialement en Q, alors Q est $NP - dur$.

Exercice 9. – 2-SAT et 3-SAT

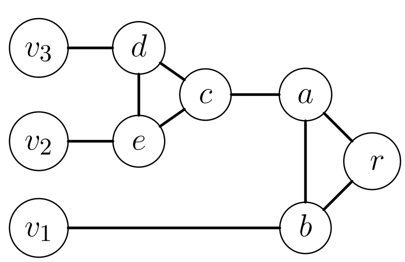
Considérez les deux problèmes suivants :

3-SAT
Données : un ensemble U de variables $\{u_1, u_2, \ldots, u_\ell\}$ et une formule logique sous forme normale conjonctive ϕ ayant des clauses de 3 littéraux
Question : Existe-t-il une fonction $t : U \to \{0,1\}$ telle que t satisfait ϕ ?

2-SAT
Données : un ensemble U de variables $\{u_1, u_2, \ldots, u_\ell\}$ et une formule logique sous forme normale conjonctive ϕ ayant des clauses de 2 littéraux
Question : Existe-t-il une fonction $t : U \to \{0,1\}$ telle que t satisfait ϕ ?

1. Donner une fonction t qui satisfait $\phi_1 : \phi_1(u_1,u_2,u_3) = (u_2 \vee \neg u_3) \wedge (\neg u_2 \vee u_3) \wedge (u_2 \vee \neg u_1)$.
2. Que se passe-t-il pour $\phi_2 : \phi_2(u_1,u_2) = (u_2 \vee u_3) \wedge (\neg u_2 \vee u_3) \wedge (\neg u_3 \vee u_1) \wedge (\neg u_3 \vee \neg u_1)$?
3. Montrer que $u \vee v = (\neg u \to v) \wedge (\neg v \to u)$.
   A partir d'une instance (U, ϕ) de 2-SAT, nous construisons un graphe orienté $G_\phi = (V, E)$ tel que
   – un sommet par un littéral de U
   – un arc par implication (en transformant chaque clause par deux implications)
4. Dessiner le graphes G_{ϕ_1} et G_{ϕ_2}
5. Montrer qu'il existe une variable u de U tel que G_ϕ contient un cycle entre u vers $\neg u$ dans G, si et seulement si ϕ n'est pas satisfiable.
6. Montrer que 2-SAT est solvable par un algorithme en temps polynomial.
7. En déduire la classe de complexité de 2-SAT.

Exercice 10. – Nombre de chromatique
Mettre les problèmes suivants sous forme de problème de décision :
1. Donner un algorithme qui décide si $\chi(G) \leq 2$.
2. Donner un algorithme polynomial permettant de décider étant donné un graphe $G = (V, E)$ si une fonction $c : V \to \mathbb{N}$ est une coloration propre au plus k couleurs de G. Qu'en déduisez-vous ?
3. Considérons le graphe G_w suivant :



   Soit c une coloration de G_w tel que
   – r est colorié en $VERT$
   – chacun des v_1, v_2, v_3 est colorié en $Vert$ ou en $ORANGE$
   Montrer que la coloration c a trois couleurs si et seulement si au moins un des v_1, v_2, v_3 est colorié en $VERT$.

4. À partir de 3-SAT, montrer que le problème NOMBRE DE CHROMATIQUE est NP-complet.

EXERCICE 11. – Couverture de sommets.

Considérez le problème suivant.

COUVERTURE DE SOMMETS
Données : un graphe non-orienté G et un entier K.
Question : G contient-il une *couverture de sommets* de cardinalité au plus K : c'est-à-dire un ensemble $\mathcal{S}$ de sommets tel que toutes les arêtes de G sont incidentes à au moins un sommet de $\mathcal{S}$?

Soit G un graphe de n sommets et G^c son complémentaire.

1. Montrer que G a une clique de taille k si et seulement si G^c a une couverture sommet de taille $n - k$.
2. Montrer que le problème COUVERTURE DE SOMMETS est dans NP.
3. Montrer que le problème COUVERTURE DE SOMMETS est NP-complet.