Complexité et Graphe **2014-2015**
ENSTA

Algorithme d'approximation

Le problème du k-centre

Dans cette partie, nous allons nous concentrer sur le problème du k-centre : étant donné un ensemble de villes dont les distances sont spécifiées, choisir k villes afin d'installer des entrepôts de façon à minimiser la distance maximale d'une ville à l'entrepôt le plus proche. Un tel ensemble de k villes est appelé k-centre.

Nous allons nous focaliser sur le problème de k-CENTRE MÉTRIQUE. Ici, la fonction de poids que l'on notera w respecte l'inégalité triangulaire, c'est-à-dire pour tout triplet de villes u, v, et z, on a $w(u, v) \leq w(u, z) + w(z, v)$.

Exercice 1 Le problème associé de décision est le suivant k-CENTRE
Données : un graphe complet $K = (V, E)$ muni d'une fonction de poids w sur les arêtes, et des entiers strictement positifs k et b.
Question : Existe-il un ensemble S de sommets tel que $|S| = k$ et tel que tout sommet v de V satisfait la condition suivante

$$min\{w(v, u) : u \in S\} \leq b$$

Montrer que k-CENTRE est NP-complet sachant que DOMINANT est NP-complet.

Exercice 2 Montrer que si $P \neq NP$, quel que soit $\epsilon > 0$, il n'existe pas de $(2 - \epsilon)$-approximation pour le problème du k-CENTRE MÉTRIQUE. *Indication : il faut utiliser la réponse de la question précédente.*

Exercice 3 Approximation du problème

Question 3.1 Le *carré* d'un graphe G, noté G^2, est défini comme le graphe qui contient une arête (u, v) pour chaque couple de sommets u et v reliés par un chemin de longueur au plus 2 dans G.

Montrer que si le sous-ensemble de sommets I est un stable de G^2 et alors pour tout ensemble dominant D de G, on a $|I| \leq |D|$.

Question 3.2 Dans la suite de l'exercice, nous supposerons que les arêtes de K sont triés par poids croissant, c'est-à-dire $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \cdots \leq w(e_m)$ et nous notons $K_i = (V, E_i)$, où $E_i = \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$.

Montrer que trouver un k-centre estéquivalent à trouver le plus petit index i tel que G_i admet un dominant de taille au plus k

Question 3.3 Voici l'algorithme $\mathcal{A}$ du k-centre :

1. Construire $(G_1)^2, (G_2)^2, \ldots, (G_m)^2$.

2. Calculer un stable maximal, M_i, pour chaque $(G_i)^2$.
3. Calculer le plus petit indice i tel que $|M_i| \leq k$. Notons-le j.
4. Renvoyer M_j.

Donner la complexité de cet algorithme.

Notons OPT le coût d'un k-centre optimal. Notons aussi par i^* le plus petit indice, $w(e_i*) = OPT$ et tel que G_i* contient un k-centre optimal.

— Montrer que si j est l'indice calculé par l'algorithme, alors $w(e_j) \leq OPT$.
— Montrer que l'algorithme $\mathcal{A}$ est une 2-approximation.

Question 3.4 Considérons le graphe complet de $n+1$ sommets possèdant un sommet singulier u. Chaque arête incidente à u est de poids 1 et les autres sont de poids 2.

Appliquer l'algorithme sur ce graphe en considérant la pire solution. Qu'en déduisez-vous ?

Exercice 4 Considérons le problème k-centre sans la contrainte que w respecte l'inégalité triangulaire. Montrer que quel que soit $\alpha(n)$ calculable en temps polynomial, il n'existe pas de $\alpha(n)$-approximation pour k-CENTRE, à moins que $P = NP$.

Exercice 5 La coupe maximum d'un graphe

Nous allons considérer un graphe non-orienté $G = (V, E)$ ayant une fonction de poids sur les arêtes $w : E \to \mathbb{N}$. Une coupe d'un graphe non-orienté $G = (V, E)$ est un ensemble d'arêtes qui partagent G en deux sous-ensembles disjoints et distincts (S et $V \backslash S$). Dans la suite de l'exercice, la coupe se définit par aussi les deux sous-ensembles de sommets disjoints.

Cet exercice se traite le problème d'optimisation COUPE MAX : nous avons en entrée un graphe non orienté $G = (V, E)$ avec un poids $w(e)$ sur chaque arête e, et nous voulons partager les sommets en deux ensembles S et $V \backslash S$ afin que le poids total des arêtes entre les deux ensembles est aussi grand que possible.

Notation : Soit A et B deux ensembles de sommets disjoints. Nous noterons

$$w(A, B) = \sum_{u \in A, v \in B, (u,v) \in E} w(u, v) \text{ et } W(A) = \sum_{u \in A, v \in A, (u,v) \in E} w(u, v) \tag{1}$$

Rappellons que $\Gamma_G(u)$ est l'ensemble des sommets de G adjacents à u. Nous dirons qu'un sommet v est α-*content* pour la coupe $(A,\ B)$ dans le graphe G si et seulement si

— $w(A \backslash \{u\}, B \cup \{u\}) \leq \alpha w(A, B)$ si $u \in A$
— ou $w(A \cup \{u\}, B \backslash \{u\}) \leq \alpha w(A, B)$ si $u \in B$

Considérons le graphe biparti complet de 8 sommets (voir la figure 1). Toutes les arêtes de ce graphe ont un poids égal à 1 : i.e. $\forall e \in E$, $w(e) = 1$.

Question 5.1 Compléter les trois tableaux

A	$B = V \backslash A$	$w(A, V \backslash A)$
$\{b\}$	$\{c, d, f, v, u, s, t\}$	4
$\{b, v\}$		
$\{b, c, v\}$		
$\{b, c, d, f\}$		

A	B	$A \backslash \{b\}$	$w(A \backslash \{b\}, B \cup \{b\})$	$w(A, B)$
$\{b, c, d, f\}$	$V \backslash A$	$\{c, d, f\}$	12	16
$\{b, c, d, v\}$	$V \backslash A$			
$\{b, u, s, t\}$	$V \backslash A$			

A	B	$W(A)$	$W(B)$	b est 1-content
$\{b, c, d, f\}$	$V \backslash A$	0	0	oui car ...
$\{b, c, d, v\}$	$V \backslash A$			
$\{b, u, s, t\}$	$V \backslash A$			

Le problème COUPE MAX est trouver une coupe $(A,\ B)$ qui maximise $w(A, B)$ sur l'en-

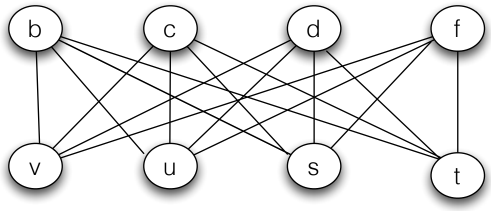


FIGURE 1 – Graphe biparti. Toutes ses arêtes ont un poids égal à 1.

semble des sous-ensembles de V. Considérons l'algorithme suivant pour le COUPE MAX :

Algorithme MAX-CUT-LOCAL

Entrée : Un graphe $G = (V, E)$ et une fonction poids $w : E \to \mathbb{N}$

Sortie : Deux sous-ensembles de sommets A et B.

1. Choisir une partition arbitraire de sommets (A, B) de V.
2. Tant qu'il existe un sommet v qui n'est pas α-*content*
   — Si v est dans A, alors $A \leftarrow A\backslash\{v\}$ et $B \leftarrow B \cup \{v\}$
   sinon $B \leftarrow B\backslash\{v\}$ et $A \leftarrow A \cup \{v\}$
3. retourner les deux ensembles (A, B)

Question 5.2 Exécuter l'algorithme ayant en entrée le graphe de la figure 1 sachant que $\alpha = 1$ et que la partition initiale est la suivante

1. $A = \{b, c, d\}$ et $B = \{v, u, s, t, f\}$
2. $A = \{v, u, b, c\}$ et $B = \{d, f, s, t\}$

Par la suite, la solution retournée par l'algorithme MAX-CUT-LOCAL est notée (A, B) tandis une partition correspondant à une coupe optimale est notée (A^*, B^*).

Question 5.3 Donner une relation entre $W(E)$, $W(A)$, $W(B)$, $w(A, B)$.

Question 5.4 Montrer que pour tout sommet $u \in A$, on a
$w(\{u\}, A) \leq w(\{u\}, B) + (\alpha - 1)w(A, B)$. *Indication : u est α-content.*

Nous considérons un réel arbitraire $\epsilon > 0$. Soit n le nombre de sommets de G. Nous allons supposer par la suite que $\alpha = 1 + \frac{2\epsilon}{n}$.

Soit (A, B) la solution obtenue par l'algorithme.

Question 5.5 Montrer que

1. $\sum_{u \in A} w(\{u\}, A) \leq w(A, B) + \frac{|A|2\epsilon}{n} w(A, B)$
2. $\sum_{u \in B} w(\{u\}, B) \leq w(A, B) + \frac{|B|2\epsilon}{n} w(A, B)$
3. $W(A) + W(B) \leq (1 + \epsilon)w(A, B)$

Question 5.6 Montrer que $W(E) \leq (2 + \epsilon)w(A, B)$.

Question 5.7 Montrer que $w(A^*, B^*) \leq (2 + \epsilon)w(A, B)$. Qu'en déduisez-vous ?

Soit (A_0, B_0) la coupe initiale utilisée par l'algorithme. Nous allons considérer que $A_0 = \{v^{max}\}$ et $B_0 = V\backslash A_0$ tel que le sommet v^{max} respecte la condition suivante

$$\forall v \in V, w(\{v^{max}\}, V\backslash\{v^{max}\}) \geq w(\{v\}, V\backslash\{v\}) \quad (2)$$

Question 5.8 Montrer que $w(A_0, B_0) \geq \frac{2}{n} W(E)$.

Soit (A_t, B_t) la coupe de l'algorithme après l'itération t de la boucle TANT QUE.

Question 5.9 Montrer que $w(A_{t+1}, B_{t+1}) \geq (1 + \frac{2\epsilon}{n}) w(A_t, B_t)$

Question 5.10 Donner une borne inférieure sur le nombre d'itérations k de l'algorithme pour que le poids de la coupe double ($w(A_{t+k}, B_{t+k}) \geq 2w(A_t, B_t)$). (*Indication :* $(1 + 1/x)^x \geq 2$ *pour* $x \geq 1$)

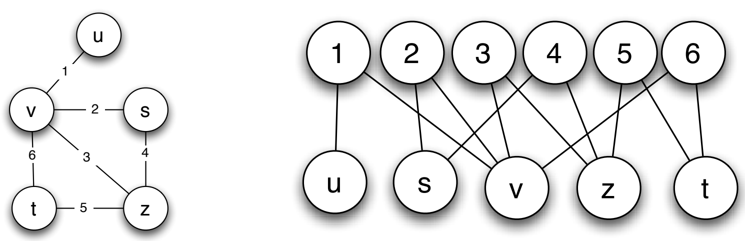
Question 5.11 Soit K le nombre de l'itérations nécessaire pour que l'algorithme termine. Montrer que $K \geq \frac{|V| log_2 W(E)}{\epsilon}$. Quelle est la complexité de l'algorithme ?

Exercice 6 Ensemble dominant
Donnons la définition des ensembles dominants : un *ensemble dominant* C du graphe G est un sous-ensemble de sommets tel que tout sommet est soit dans C soit voisin d'un sommet de C.

Soit un graphe $G = (V, E)$ ne possédant aucun sommet isolé. Nous allons construire un graphe $G' = (V', E')$ à partir de G tel que

— $V' = V \cup E$;
— $E' = E \cup \{(v, e) | v \in V, e \in E, v$ est extremité de l'arête e dans $G\}$

La figure 2 donne une illustration de cette construction.



Graphe G

Graphe G'
(les arêtes de G' dans E ne sont pas dessinées)

FIGURE 2 – Graphes G' et G

Question 6.1 Montrer que si S est une couverture de sommets du graphe G, alors S est un ensemble dominant de G'.

Question 6.2 Montrer que si S' est un ensemble dominant de G', alors il existe un ensemble S de même cardinalité de S' qui est une couverture de sommets du graphe G,

Question 6.3 Exprimer le problème de minimisation de l'ensemble dominant sous forme de problème de décision.

Question 6.4 Montrer que ce problème est NP-complet.