TD n^{o}5 : Coloration de graphes

Exercice 1. – Exemples introductifs.

a) Quel est le nombre chromatique de la chaine à n sommets P_n ?
b) Quel est le nombre chromatique du graphe complet K_n ?
c) Quel est le nombre chromatique du cycle C_n ?

Exercice 2. – Graphes bipartis.

a) Rappeler ce qu'est un graphe biparti. Donner un exemple.
b) Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement si il est 2-coloriable ($\chi(G) \leqslant 2$).
c) Montrer qu'un graphe est 2-coloriable si et seulement si il ne possède pas de cycles de taille impaire.
d) Donner un algorithme efficace pour décider si un graphe est biparti (et calculer une partition des sommets témoignant de la bipartition dans le cas où la réponse est positive).

Exercice 3. – Nombre chromatique de la somme cartésienne de deux graphes.

La *somme cartésienne* de deux graphes non orientés $G = (V_G, E_G)$ et $H = (V_H, E_H)$ est le graphe $G \square H = (V, E)$ défini par :

- $V = V_G \times V_H$;
- $[(u, x), (v, y)] \in E$ si et seulement si $u = v$ et $[x, y] \in E_H$, ou $[u, v] \in E_G$ et $x = y$.

a) Dessiner la somme cartésienne de deux graphes G et H de votre choix.
b) On suppose que G et H sont deux graphes non vides. Montrer que

$$\max(\chi(G), \chi(H)) \leqslant \chi(G \square H) \leqslant \chi(G) \cdot \chi(H).$$

c) Montrer que si G est une chaîne à au moins deux sommets et H non vide, alors

$$\chi(G \square H) = \max(2, \chi(H)).$$

d) Généraliser ce dernier résultat au cas où G est un graphe biparti quelconque.
e) Cas général : montrer que si G et H sont deux graphes non vides, $\chi(G \square H) = \max(\chi(G), \chi(H))$.

Exercice 4. – Nombre chromatique et nombre d'arêtes.

Montrer qu'un graphe simple non orienté G à m arêtes vérifie

$$\chi(G) \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}.$$

Exercice 5. – Une propriété des colorations optimales.

Montrer que dans une coloration optimale d'un graphe G (c'est-à-dire une coloration avec $\chi(G)$ couleurs), il existe un sommet de chaque couleur qui "voit" toutes les autres couleurs.

Exercice 6. – Graphes k-chromatiques sans triangle.

Le but de cet exercice est de construire des graphes sans clique de taille 3 (sans triangle) de nombre chromatique arbitrairement grand.

Étant donné un graphe non orienté à $n \geqslant 1$ sommets $G = (\{u_1, \ldots, u_n\}, E)$, on définit le graphe à $2n+1$ sommets

$$G' = \big(\{u_1, \ldots, u_n, u'_1, \ldots, u'_n, v\}, E \cup \{[u'_i, u_j] \mid [u_i, u_j] \in E\} \cup \{[u'_i, v] \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}\big)\,.$$

a) Si G est sans triangle, montrer que G' est sans triangle.
b) Montrer que $\chi(G') = \chi(G) + 1$. *Indication :* utiliser l'exercice 5.
c) En déduire que pour tout $k \geqslant 1$, il existe un graphe sans triangle vérifiant $\chi(G) = k$.