TD n°4 : Connexité

Rappels des définitions. Pour un graphe simple non orienté (resp. orienté) $G = (V, E)$ à au moins deux sommets, on définit la *connexité au sens des arêtes* $\lambda(G)$ comme le plus petit entier k tel qu'il existe $F \subseteq E$ de cardinal k tel que $(V, E \setminus F)$ n'est pas connexe (resp. fortement connexe). Ainsi, $\lambda(G)$ est le plus petit nombre d'arêtes déconnectant G. On dit qu'un graphe G est *k-connexe* (ou *k-fortement connexe* dans le cas orienté) si $\lambda(G) \geqslant k$.

Exercice 1. – Calculer $\lambda(G)$ pour les graphes non orientés suivants :
- Chaîne de longueur $n \geqslant 1$;
- Cycle de longueur $n \geqslant 3$;
- Graphe complet à $n \geqslant 2$ sommets ;
- Graphe complet biparti $K_{\ell,m}$ avec $\ell \geqslant 1$ et $m \geqslant 1$.

Exercice 2. – Exhiber un graphe non orienté 1-connexe sans sommet de degré 1.

Exercice 3. – Forte connexité.

a) Montrer que si un graphe orienté G est fortement connexe, alors chaque arc de G appartient à un circuit.
b) Montrer qu'un graphe G est fortement connexe si et seulement si chaque sommet de G est la racine d'une arborescence et d'une anti-arborescence de G.
c) Un graphe orienté G est dit *fortement cyclique* si pour chaque paire de sommets x, y de G, il y a une séquence de circuits $C_1, \ldots, C_k$ tels que x est dans C_1, y est dans C_k, et C_i et C_{i+1} ont au moins un sommet commun. Montrer que G est fortement connexe si et seulement si G est fortement cyclique.

Exercice 4. – Soit G un graphe non orienté connexe et a une arête de G. Montrer que $\lambda(G) - 1 \leqslant \lambda(G - a) \leqslant \lambda(G)$. Ceci est-il vrai dans le cas orienté ?

Exercice 5. – Soit G un graphe orienté k-fortement connexe avec $k \geqslant 2$. Soit G' un graphe obtenu en ajoutant un nouveau sommet x à G ainsi que les arcs suivants :
- k arcs sortants de x vers k sommets distincts de G ;
- k arcs entrants en x à partir de k sommets distincts de G.

Montrer que G' est k-fortement connexe.

Exercice 6. – Soit $n \geqslant 2$. Quel est le nombre maximum d'arêtes d'un graphe non orienté G à n sommets vérifiant $\lambda(G) = 1$?

Exercice 7. – Montrer que si un graphe non orienté G contient deux arbres couvrants arête-disjoints, alors $\lambda(G) \geqslant 2$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 8. – Étant donné deux entiers $1 < k < n$, on note $m(k,n)$ le nombre minimum d'arêtes d'un graphe non orienté k-connexe à n sommets.

a) Montrer que $m(k,n) \geqslant kn/2$.
b) On suppose dans cette question que k et n sont pairs. On définit le graphe $G_{k,n}$ sur les sommets $\{0,\ldots,n-1\}$ par : $[i,j] \in E$ si et seulement si $i - j \in \{-k/2,\ldots,k/2\} \setminus \{0\}$ (l'addition est prise modulo n). Montrer que $G_{k,n}$ est k-connexe. En déduire la valeur de $m(k,n)$ pour k et n pairs (vérifiant $1 < k < n$).
c) Adapter la construction de la question précédente aux couples d'entiers quelconques vérifiant $1 < k < n$. En déduire la valeur de $m(k,n)$ pour tous ces couples d'entiers.
d) Montrer que $\lambda(G_{k,n}) = k$.
e) Dessiner deux graphes 5-connexe à 9 sommets non isomorphes.