Complexité et Graphe **2014-2015**
ENSTA

Problèmes NP-complets

Dire qu'un problème est NP-complet, c'est à dire qu'il est dans NP (borne supérieure) et qu'il est difficile pour cette classe (borne inférieure). Le plus souvent, le premier point est facile alors que le second est plus délicat. Pour le montrer, on effectue souvent une réduction à un autre problème dont on sait déjà qu'il est NP-difficile. Les exercices suivants permettent de se familiariser avec cette technique.

Exercice 1 Problème de décision.

Mettre les problèmes suivants sous forme de problème de décision et évaluer la taille de leurs instances.

1. de savoir s'il existe un chemin entre deux sommets disjoints dans un graphe ;
2. de connaitre la distance entre deux sommets disjoints dans un graphe ;
3. de connaitre la longueur de la chaîne maximun dans un graphe pondéré.

Correction

1. Problème de décision de savoir s'il existe un chemin entre deux sommets disjoints :
   Données : un graphe G, deux sommets distincts u et v
   Question : Existe-t-il un chemin entre u et v dans G ?
   La taille de l'instance est $O(V^2)$ car il faut coder le graphe ($O(V^2)$) et les étiquettes de deux sommets ($O(logV)$).
2. Problème de décision de connaitre la distance entre deux sommets dans un graphe :
   Données : un graphe G, deux sommets distincts u et v, un entier k
   Question : Existe-t-il un chemin entre u et v dans G tel que sa longueur soit inférieure à k ?
   La taille de l'instance est $O(V^2)$ car il faut coder le graphe, les étiquettes de deux sommets, l'entier k qui est $k \leq |V|$ ($O(logV)$).
3. Problème de décision de connaitre la longueur de la chaîne maximun dans un graphe
   Données : un graphe $G = (V, E)$, une fonction $w : E \to \mathbb{N}$ deux sommets distincts u et v, un entier k
   Question : Existe-t-il un chemin entre u et v dans G tel que sa longueur soit superieur à k ?
   Nous allons calculer la taille de l'instance. Il faut coder le graphe, les étiquettes de deux sommets, l'entier k qui est $k \leq |V|$. Cela nécessite $O(V^2)$ bits. Il faut coder en plus la fonction de poids.
   Soit $w_{max} = max\{w(e) : e \in E\}$. Coder la fonction de poids nécessitent de coder $O(V^2)$ entiers qui sont inférieure à w_{max}
   La taille de l'instance est $O(V^2 \log w_{max})$ si les entiers sont codés en binaire, sinon

$O(V^2 * w_{max})$.

□

Problèmes liés aux cycles hamiltoniennes

Nous allons supposer que le problème CYCLE HAMILTONIEN est NP-Complet.

CYCLE HAMILTONIEN
Données : un graphe non-orienté G.
Question : G contient-il un cycle hamiltonien ?

Exercice 2 Considérons le problème CHAINE HAMILTONIEN suivant :

CHAINE HAMILTONIENNE
Données : un graphe non-orienté G, deux sommets u et v distincts de G.
Question : G contient-il une chaine hamiltonienne entre u et v ?

Question 2.1 Montrer que le problème CHAINE HAMILTONIEN est dans NP.

Correction

Le problème CHAINE HAMILTONIENNE est dans NP car étant donnée une chaîne, on peut vérifier en temps polynomial si elle passe une fois et une seule par chaque sommet du graphe et qu'elle a u et v comme extrémité.

□

Question 2.2 Montrer que le problème CHAINE HAMILTONIEN est NP-complet. Pour cela, nous allons faire la réduction à partir du problème CYCLE HAMILTONIEN. Soit $\mathcal{I} =< G = (V, E) >$ une instance du problème CYCLE HAMILTONIEN. Maintenant, nous allons transformer cette instance en une instance $\mathcal{I}'$ du problème CHAINE HAMILTONIENNE de la façon suivante : Nous allons construire un graphe $G' = (V', E')$ tel que

— Soit u un sommet arbitraire de V

— $V' := V \cup \{v\}$ tel que v est un sommet n'appartenant pas dans V

— $E' := E \cup \{(v, \ell) : \ell$ est un voisin de u dans $G\}$

Continuez la preuve.

Correction

Cette transformation peut se faire en temps polynomial (nous avons juste copier le graphe G en rajoutant un sommet et des arêtes).

Il est facile de prouver que :

— Si il existe un cycle hamiltonien dans G, alors il existe une chaine hamiltonnienne dans G'.
Soit $C = (u, \ell_1, \ldots, \ell_{n-1}, u)$ un cycle hamiltonien dans G. Nous construisons la chaîne $\mathcal{P} = (u, \ell_1, \ldots, \ell_{n-1}, v)$ dans le graphe G'. Cette chaîne est hamiltonienne : elle passe une fois et une seule par v et par chaque sommet de G puisque C est un cycle hamiltonien.

— Si il existe une chaine hamiltonnienne dans G', alors il existe un cycle hamiltonien dans G.

Soit $\mathcal{P} = (u, \ell_1, \ldots, \ell_{n-1}, v)$ une chaîne dans un graphe G'. Le cycle $C = (u, \ell_1, \ldots, \ell_{n-1}, u)$ est hamiltonnien pour le graphe G.

Donc Cycle hamiltonien $\leq$ Chaine Hamiltonienne

Donc le problème chaine Hamiltonienne est NP-complet.

□

Exercice 3 Le problème Chaine est le problème de décision suivant

Chaine
Données : un graphe non-orienté G de n sommets, deux sommets u et v distincts de G.
Question : G contient-il une chaine de longueur $n/2$ entre u et v ?

Question 3.1 Montrer que le problème Chaine est NP-complet.

Correction

Le problème Chaine est dans NP car étant donnée une chaîne, on peut vérifier en temps polynomial si sa taille est de longueur $n/2$ et qu'elle a u et v comme extrémité.

□

Question 3.2 Montrer que le problème Chaine est NP-complet.

Correction

Nous allons faire la réduction à partir du problème Chaine Hamiltonienne. Soit $\mathcal{I} =< G = (V, E), u, v >$ une instance du problème Chaine Hamiltonienne.

Nous transformons cette instance en une instance $\mathcal{I}'$ du problème Chaine de la façon suivante. Nous construisons un graphe $G' = (V', E')$ tel que

G' est une copie du graphe G plus une chaîne de $|V|$ sommets dont un seul sommet de cette chaîne est voisin de u.

Cette transformation se fait en temps polynomial (nous avons juste copier le graphe G en rajoutant un sommet et des arêtes).

Il est facile de prouver que

il existe une chaine hamiltonnienne dans G si et seulement si il existe une chaine hamiltonnienne dans G' de longueur $\frac{|V'|}{2}$.

Donc le problème Chaine Hamiltonienne se réduit au problème chaine ; et ce dernier est donc NP-complet.

□

Exercice 4 Chevaliers de la table ronde

Etant donnés n chevaliers, et connaissant toutes les paires de féroces ennemis parmi eux, est-il possible de les placer autour d'une table circulaire de telle sorte qu'aucune paire de féroces ennemis ne soit côte à côte ?

Correction

— Le problème est dans NP car étant donné un plan de table, on peut vérifier en temps polynomial si pour chaque chevalier, il n'est pas à coté d'un ennemi.

— Nous allons faire la réduction à partir du problème du cycle hamiltonien
Soit $\mathcal{I} =< G = (V, E) >$ une instance du problème du cycle hamiltonien.
Maintenant, nous allons transformer cette instance en une instance $\mathcal{I}_2$ du problème

des CHEVALIERS DE LA TABLE RONDE de la façon suivante :
— chaque sommet du graphe est un chevalier.
— Deux chevaliers sont des ennemis si et seulement si il n'existe pas une arête dans G impliquant les deux sommets représentés par ces deux chevaliers

Cette transformation peut se faire en temps polynomial (nous avons construit le complémentaire du graphe G).

Il est facile de prouver que :
— Si il existe un cycle hamiltonien dans G, alors il existe un plan de table. Il suffit de voir qu'une arête dans G correspond au fait que les deux chevaliers ne sont pas ennemis. Donc le plan de table correspond au cycle hamiltonien.
— Si il existe un plan de table alors il existe un cycle hamiltonien dans G.

Donc le problème des CHEVALIERS DE LA TABLE RONDE est plus difficile que le problème du cycle hamiltonien.

Donc le problème des CHEVALIERS DE LA TABLE RONDE est NP-complet.

□

Problèmes de graphe

Nous supposerons que le problème COUVERTURE DE SOMMETS est NP-complet

COUVERTURE DE SOMMETS
Données : un graphe non-orienté G et un entier k.
Question : G contient-il une *couverture de sommets* de cardinalité au plus k : c'est-à-dire un ensemble $\mathcal{S}$ de sommets tel que toutes les arêtes de G sont incidentes à au moins un sommet de $\mathcal{S}$?

Exercice 5 Ensemble dominant
Donnons la définition des ensembles dominants : un *ensemble dominant* C du graphe G est un sous-ensemble de sommets tel que tout sommet est soit dans C soit voisin d'un sommet de C.

Soit un graphe $G = (V, E)$ ne possédant aucun sommet isolé. Nous allons construire un graphe $G' = (V', E')$ à partir de G tel que
— $V' = V \cup E$;
— $E' = E \cup \{(v, e) | v \in V, e \in E, v$ est extremité de l'arête e dans $G\}$

La figure 1 donne une illustration de cette construction.

Question 5.1 Montrer que si S est une couverture de sommets du graphe G, alors S est un ensemble dominant de G'.

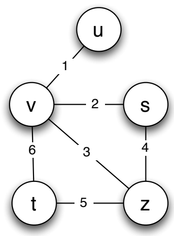
Correction

Soit S une couverture de sommets du graphe G. Il faut prouver que tous les sommets du graphe soit soit voisin de S ou soit dans S.

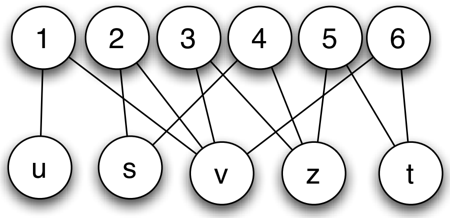
Toutes les arêtes de G ont au moins un de ses extrémités dans S. Par conséquence, tous les sommets de G sont soit dans S ou soit voisins de S.

Comme toutes les arêtes de G ont au moins un de ses extrémités dans S, tous les sommets correspondant à une arête de G sont des voisins de S.

Donc S est un ensemble dominant de G'. □



Graphe G



Graphe G'
(les arêtes de G' dans E ne sont pas dessinées)

FIGURE 1 – Graphes G' et G

Question 5.2 Montrer que si S' est un ensemble dominant de G', alors il existe un ensemble S de même cardinalité de S' qui est une couverture de sommets du graphe G,

Correction

Si $S' \subseteq V$, alors tous les sommets du graphe G soit soit voisin de S ou soit dans S. Donc toutes les arêtes ont une de ces extrémités dans S.

Donc S' est une couverture de sommets du graphe G,

Sinon, il existe un sommet s qui n'appartient pas à V.

□

Question 5.3 Exprimer le problème de minimisation de l'ensemble dominant sous forme de problème de décision.

Correction

Données : un graphe non-orienté G, et un entier k
Question : Existe-t-il un ensemble dominant S de G tel que $|S| \leq k$?

□

Question 5.4 Montrer que ce problème est dans NP.

Correction

On peut vérifier en temps polynomial si un ensemble de sommets est un ensemble dominant et si il est de cardinalité inférieure à k. □

Question 5.5 Montrer que ce problème est dans NP-complet.

Correction

□

Exercice 6 Le problème de la clique maximum.

Considérons le problème de décision CLIQUE :
Données : un graphe non-orienté $G = (V, E)$ et un entier k.
Question : Existe-t-il une clique de taille k (un sous graphe complet de k sommets) ?

Question 6.1 Nous noterons par G^c le complémentaire du graphe G.

Montrer que G a une clique de taille k si et seulement si G^c a une couverture de sommets de taille $n-k$.
Question 6.2 Montrer que le problème CLIQUE est NP-complet.

Nous allons travailler sur une restriction du problème CLIQUE en considérant uniquement les graphes dans lesquels tous leurs sommets sont de degré au plus 3. Nous le noterons 3-CLIQUE.

Question 6.3 Montrer que 3-CLIQUE est dans NP.

Question 6.4 Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant : *Nous savons que le problème* CLIQUE *est NP-complet, il suffit donc de présenter une réduction de* 3-CLIQUE *à* CLIQUE. *Étant donné un graphe G dont les sommets sont de degré inférieur à 3, et un entier k, la réduction laisse inchangée le graphe et le paramètre k : clairement le résultat de la réduction est une entrée possible pour le problème CLIQUE. Par ailleurs, la réponse aux deux problèmes est identique. Cela prouve la justesse de la réduction et, par conséquent, la NP-complétude de la* 3-CLIQUE.

Question 6.5 Donner un algorithme polynomial en $O(|V|^4)$ pour le problème 3-CLIQUE.

Problèmes de logique

Considérez le problème suivant :

k-SAT NAE
Données : un ensemble U de variables $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ et une formule logique $L = C_1 \wedge \cdots \wedge C_\ell$ avec $C_i = (y_{i,1} \vee y_{i,2} \vee \cdots \vee y_{i,k})$ où $y_{i,j}$ est égal soit à l'un des u_k ou soit à l'un des $\neg u_k$
Question : Existe-t-il une fonction $t : U \to \{0, 1\}$ telle que t satisfait L et telle que les littéraux de chaque clause ne sont pas toutes de la même valeur ?

Exercice 7 Montrer que 4-SAT NAE est NP-complet sachant que 3-SAT est NP-complet.
Indication : Introduire une nouvelle variable z et l'insérer dans toutes les clauses

Correction

Le problème est dans NP car étant donné une affectation des variables, on peut vérifier en temps polynomial que cette affectation satisfait ϕ. On va réduire 3-SAT à 4-SAT NAE. Soit *phi* une formule de 3-SAT sur les variables U. On ajoute une unique variable distincte z et on forme les clauses pour 4-SAT NAE en remplaçant chaque clause $C_i = y_{i,1} \vee y_{i,2} \vee y_{i,3}$ de l'instance de 3-SAT par $C'_i = y_{i,1} \vee y_{i,2} \vee y_{i,3} \vee z$.

Cette transformation se fait bien en temps polynomial en la taille de l'instance 3-SAT.

Si l'instance donnée de 3-SAT est satisfiable, la même affectation des variables tout en fixant pour z la valeur 0 fournit une affectation valide pour 4-SAT NAE.

Réciproquement, supposons que l'instance construite de 4-SAT NAE soit satisfaisable.

Si la valeur de vérité de z dans l'affectation correspondante est 0, alors les valeurs des variables u_i dans l'affectation donnent une affectation valide pour la formule ϕ pour l'instance de 3-SAT . Si au contraire z vaut 1, on change toutes les valeurs de toutes les variables dans 'iaffectation. L'affectation reste valide pour 4-SAT NAE car au moins un littéral par clause dans l'affectation initiale valait 0, et vaut donc maintenant 1, tandis que z vaut 0. Et on se retrouve dans le cas précédent.

On a donc bien prouvé que $3 - SAT \leq 4 - SATNAE$.

$\square$

Exercice 8 Montrer que 3-SAT NAE est NP-complet sachant que 4-SAT NAE est NP-complet. 3-SAT est NP-complet. *Indication : Utiliser la technique pour la transformation de SAT en 3-SAT.*

Correction

3-SAT NAE est dans NP.

Pour montrer quil est NP-complet, nous allons effectuer une reduction à partir de 3-SAT de la manière suivante :

— Pour chaque clause $c = (\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3)$ du problème 3-SAT, nous créons deux nouvelles variables x et y qui apparaissent uniquement dans de nouvelles clauses associéesà la clause c et une nouvelle variable α appaissant dans plusieurs clauses.

$$c = (\ell_1 \vee \ell_2 \vee x) \wedge (\ell_3 \vee \neg x \vee y) \wedge (\alpha \vee x \vee y)$$

La transformation se peut se faire en temps polynomial.

Nous allons prouver que ses trois nouvelles clauses sont satisfiables en respectant la contrainte *NAE* si et seulement la clause de l'instance *3-SAT* est satisfiable.

Supposons que la clause $c = (\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3)$ de l'instance *3-SAT* est satisfiable. Nous allons mettre α à *vrai*. Ensuite, nous allons faire uneétude de cas pour respecter que les trois nouvelles clauses respectent la contrainte *NAE*.

ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	x	y	$(\ell_1 \vee \ell_2 \vee x)$	$(\ell_3 \vee \neg x \vee y)$	$(\alpha \vee x \vee y)$
1	1	1	0	0	$(1 \vee 1 \vee 0)$	$(1 \vee 1 \vee 0)$	$(1 \vee 0 \vee 0)$
1	1	0	0	$*$	$(1 \vee 1 \vee 0)$	$(0 \vee 1 \vee y)$	$(1 \vee 0 \vee y)$
1	0	1	$*$	0	$(1 \vee 0 \vee x)$	$(1 \vee \neg x \vee 0)$	$(1 \vee x \vee 0)$
0	1	1	$*$	0	$(0 \vee 1 \vee x)$	$(1 \vee \neg x \vee 0)$	$(1 \vee x \vee 0)$
1	0	0	0	0	$(1 \vee 0 \vee x)$	$(0 \vee 1 \vee 0)$	$(1 \vee 0 \vee 0)$
0	1	0	0	$*$	$(0 \vee 1 \vee 0)$	$(0 \vee 1 \vee y)$	$(1 \vee 0 \vee y)$
0	0	1	1	1	$(0 \vee 0 \vee 1)$	$(1 \vee 0 \vee 0)$	$(1 \vee 1 \vee 0)$

ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	x	y	$(\ell_1 \vee \ell_2 \vee x)$	$(\ell_3 \vee \neg x \vee \alpha)$
1	1	1	0	0	$(1 \vee 1 \vee 0)$	$(1 \vee 1 \vee \alpha)$
1	1	0	0	$*$	$(1 \vee 1 \vee 0)$	$(0 \vee 1 \vee \alpha)$
1	0	1	$*$	0	$(1 \vee 0 \vee x)$	$(1 \vee \neg x \vee \alpha)$*
0	1	1	$*$	0	$(0 \vee 1 \vee x)$	$(1 \vee \neg x \vee \alpha)$
1	0	0	0	0	$(1 \vee 0 \vee x)$	$(0 \vee 1 \vee \alpha)$*
0	1	0	0	$*$	$(0 \vee 1 \vee 0)$	$(0 \vee 1 \vee \alpha)$*
0	0	1	1	1	$(0 \vee 0 \vee 1)$	$(1 \vee 0 \vee \alpha)$*
0	0	0	1	1	$(0 \vee 0 \vee 1)$	$(0 \vee 0 \vee \alpha)$

Supposons qu'il existe une affectation f telle que toutes les clauses respectent la contrainte *NAE*. Nous allons montrer que l'affection f satisfait toutes les clauses de l'instance $3 - SAT$.

Nous allons nous concentrer sur les trois nouvelles clauses associéesà la clause c. Supposons que la fonction f ne satisfait pas la clause $c = (\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3)$.

ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	x	y	$(\ell_1 \vee \ell_2 \vee x)$	$(\ell_3 \vee \neg x \vee y)$	$(\alpha \vee x \vee y)$
0	0	0	1	1	$(0 \vee 0 \vee 1)$	$(0 \vee 0 \vee 1)$	$(\alpha \vee 1 \vee 1)$

Par l'étude de cas, on peut montrer que $\alpha = 0$. Si la fonction f ne satisfait pas toutes les clauses de 3-SAT, il suffit d'inverver les valeurs d'affectation de f pour trouver une fonction f' qui satisfait l'instance $3 - SAT$. Sinon, il existe une autre clause $c' = (\ell'_1 \vee \ell'_2 \vee \ell'_3)$ telle que la fonction f la satisfait.

ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	x	y	$(\ell_1 \vee \ell_2 \vee x)$	$(\ell_3 \vee \neg x \vee y)$	$(\alpha \vee x \vee y)$
x	y	1	1	0	$(x \vee y \vee 1)$	$(1 \vee 0 \vee 0)$	$(0 \vee 1 \vee 0)$

□

Exercice 9 Le problème 3-couleurs.

3-Couleurs

Données : un graphe non-orienté $G = (V, E)$ et un entier k.

Question : Existe-t-il une coloration propre de G composé de 3 couleurs ?

Pour cela, nous allons faire la réduction à partir du problème 3-SAT NAE. Soit $\mathcal{I} =< U, L >$ une instance du problème 3-SAT NAE. Maintenant, nous allons transformer cette instance en une instance $\mathcal{I}'$ du problème 3-Couleurs de la façon suivante. Nous allons construire un graphe $G = (V, E)$ tel que

- Pour chaque variable u_i, il y a deux sommets qui lui sont associés : u_i et $\neg u_i$. Il y a une arête qui relie les sommets u_i et $\neg u_i$.
- Un sommet distingué v est adjacents à tous les sommets de $\{u_i, \neg u_i | u_i \in U\}$
- Pour chaque clause $C_j = (y_{j,1} \vee y_{j,2} \ \vee y_{j,3})$, trois sommets a_i, b_i, et d_i formant un triangle sont associés à la clause C_j tels que il y a une arête entre a_i et $y_{j,1}$, entre b_i et $y_{j,2}$, entre b_i et $y_{j,3}$).

Question 9.1 Construire le graphe pour la formule

$$L = (u_1 \vee \neg u_2 \vee u_3) \wedge (\neg u_1 \vee \neg u_3 \vee u_4) \wedge (u_2 \vee \neg u_3 \vee \neg u_4)$$

Question 9.2 Continuez la preuve.