

TD n°6 : Couplages

Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté. Un *couplage* de G est un sous-ensemble d'arêtes *indépendantes* $C \subset E$. Autrement dit, c'est un ensemble d'arêtes tel que chaque sommet du graphe est l'extrémité d'au plus une arête de C . Si chaque sommet du graphe est l'extrémité d'une arête de C exactement, le couplage est dit *parfait*.

EXERCICE 1. – Exemples introductifs.

- a) Montrer que si $G = (V, E)$ contient un couplage parfait, alors $|V|$ est pair.
- b) Déterminer les entiers n tels que P_n (chaîne à $n + 1$ sommets) contient un couplage parfait.
- c) Donner le nombre minimum d'arêtes d'un graphe à $2p$ sommets contenant un couplage parfait.
- d) Montrer que si un graphe ayant un nombre pair de sommets contient un cycle hamiltonien (un cycle passant exactement une fois par chaque sommet) alors il contient deux couplages parfaits disjoints. La réciproque est-elle vraie ?

EXERCICE 2. – Couplages dans les arbres binaires, aspects algorithmiques.

On considère dans cet exercice des arbres binaires enracinés planaires. Enraciné signifie qu'un sommet unique est *marqué*, c'est la racine. Planaire signifie qu'on distingue le fils gauche et le fils droit. Les arbres considérés peuvent avoir des noeuds possédant un seul fils (contrairement à d'autres types d'arbres binaires où chaque noeud possède 0 ou 2 fils).

- a) Donner deux exemples d'arbres binaires à 10 sommets et de hauteur 3, l'un contenant un couplage parfait, et l'autre non.

Dans les questions suivantes, on s'intéresse aux aspects algorithmiques.

- b) Donner une définition récursive des arbres binaires. En déduire une structure de données que vous utiliserez dans la suite du problème.
- c) Écrire un algorithme récursif décidant en temps linéaire si un arbre binaire fourni en entrée contient un couplage parfait.

EXERCICE 3. – Couplage dans les graphes bipartis

Soit $G = ((A \cup B), E)$ un graphe biparti avec A , et B les deux ensembles de sommets tels que chaque arête de G a une extrémité dans A et une autre dans B .

- a) Sur un exemple, transformer G en un graphe de flot G_f en ajoutant un sommet source s et un sommet puits p de telle façon qu'il y a correspondance entre un couplage maximal de G et un flot maximal de G_f
- b) Généraliser cette transformation. Montrer que l'ensemble des arêtes entre A et B traversées par le flot maximal forment un couplage maximum.