TD n^{o}2 : Degré.

Tous les graphes considérés dans cette feuille sont non orientés et simples, c'est-à-dire sans multi-arêtes et sans bouclettes.

Exercice 1. – Montrer que dans une région comportant au moins deux habitants, il existe toujours deux personnes connaissant le même nombre d'habitants de cette région.

Exercice 2. – Soit $G = (V, E)$ un graphe. On note $d(v)$ le degré d'un sommet $v \in V$. Montrer que :

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Exercice 3. – On définit le degré moyen d'un graphe $G = (V, E)$ par $\bar{d} = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v)$. Dans un graphe non vide (c'est-à-dire comportant au moins un sommet), montrer qu'il existe un sommet de degré au plus $\bar{d}$. Existe-t-il un toujours un sommet de degré au moins $\bar{d}$? Et un sommet de degré $\bar{d}$ exactement ?

Exercice 4. – Ordres des graphes k-réguliers.

Un graphe est k-régulier si tous ses sommets sont de degré k.

a) Dessiner un graphe 2-régulier à 9 sommets.
b) Dessiner un autre graphe 2-régulier à 9 sommets (non isomorphe au premier).
c) Dessiner un graphe 3-régulier à 8 sommets.

La suite de cet exercice consiste à déterminer, pour un entier k donné, tous les entiers n pour lesquels il existe un graphe k-régulier à n sommets.

d) Traiter successivement les cas $k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$.

On considère maintenant le cas général : soit k un entier quelconque (fixé dans la suite de l'exercice).

e) Montrer que si il existe un graphe k-régulier à n sommets, alors $k < n$.
f) Donner une seconde condition nécessaire sur n pour qu'il existe un graphe k-régulier à n sommets (on pourra utiliser un exercice du début de cette feuille).
g) Pour tout entier n vérifiant les deux conditions obtenues aux questions précédentes, construire un graphe k-régulier à n sommets. Conclure.

Exercice 5. – Suites des degrés des sommets d'un graphe.

Une suite décroissante (au sens large) d'entiers $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ est dite *graphique* si il existe un graphe à n sommets $\{v_1, \ldots, v_n\}$ avec v_i de degré d_i pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

a) Donner l'exemple de deux graphes non isomorphes ayant la même suite de degrés. (Ceci montre que cette suite ne caractérise pas le graphe.)
b) Les suites $(7, 6, 5, 4, 3, 3, 2)$ et $(6, 6, 5, 4, 3, 3, 1)$ sont-elles graphiques ?
c) Montrer que si la suite $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ est graphique, alors $\sum_{i=1}^{n} d_i$ est pair.
d) Le but de cette question est de montrer que si la suite $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ est graphique, alors pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{d_i, k\}.$$

Soit G un graphe de suite de degrés $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ sur les sommets $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ avec $d(v_i) = d_i$. Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. On pose $A = \{v_1, \ldots, v_k\}$, $C = \{v_i \mid d_i < k\} \setminus A$ et $B = V \setminus (A \cup C)$. Soit $E_{A,A}$ l'ensemble des arêtes de G reliant deux sommets de A entre eux, $E_{A,B}$ les arêtes de G entre A et B, et $E_{A,C}$ les arêtes de G entre A et C.

- Montrer que $\sum_{i=1}^{k} d_i = 2|E_{A,A}| + |E_{A,B}| + |E_{A,C}|$.
- Montrer que $2|E_{A,A}| \leqslant k(k-1)$.
- Montrer que $|E_{A,B}| \leqslant k|B|$.
- Montrer $|E_{A,C}| \leqslant \sum_{v \in C} d(v)$.
- Conclure.

Les deux conditions précédentes réunies fournissent une caractérisation des suites graphiques, ce que nous ne montrerons pas. Nous allons à la place établir une caractérisation récursive des suites graphiques.
Pour une suite décroissante (au sens large) d'entiers $d = (d_1, \ldots, d_n)$ non vide, on définit

$$d' = \operatorname{tri}\left(d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n\right).$$

e) Expliquer d'une phrase comment d' est obtenue à partir de d.
f) Montrer que si d est non vide, d est graphique si et seulement si d' est graphique.
g) En déduire un algorithme qui, étant donnée une suite d donnée en entrée, décide si elle est graphique et construit un graphe de suite de degrés d quand c'est possible.