TD n°7 : Graphes planaires

Un graphe est *planaire* si on peut le dessiner dans le plan sans que les arêtes ne se croisent.

Exercice 1. – Relation d'Euler.

Soit $G = (V, E)$ un graphe planaire non vide *connexe*. Notons $n = |V|$, $a = |E|$. Considérons un dessin de G dans le plan (sans que les arêtes ne se croisent). Soit f le nombre de régions du plan délimitées par les arêtes de G.

a) Montrer la relation d'Euler $n - a + f = 2$.
b) On suppose $n \geqslant 3$. Montrer que $2a \geqslant 3f$. En déduire que $a \leqslant 3n - 6$.
c) Montrer que le degré moyen des sommets $\bar{d} := \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v)$ vérifie $\bar{d} < 6$. En déduire qu'il existe un sommet de degré au plus 5 dans G.

Exercice 2. – Exemples de graphes planaires et de graphes non planaire.

a) Le graphe complet à 4 sommets K_4 est-il planaire ?
b) Essayer de dessiner K_5 dans le plan – ou tout au moins de dessiner le maximum d'arêtes sans qu'elles ne se croisent. Quel est le nombre d'arêtes maximum que vous arrivez à placer ? Que pouvez-vous en déduire pour l'instant ?
c) En raisonnant par l'absurde, montrer que K_5 n'est pas planaire (indication : utiliser l'exercice 1).
d) Le graphe biparti complet $K_{3,3}$ est-il planaire ?

On rappelle qu'un *mineur* de G est un graphe obtenu à partir de G en supprimant des arêtes, des sommets, et en contractant des arêtes.

e) Expliquer pourquoi tout mineur d'un graphe planaire l'est aussi.
f) En déduire que si G contient $K_{3,3}$ ou K_5 comme mineur, il n'est pas planaire. (La réciproque est vraie : c'est le théorème de Kuratowski (1930).)

Exercice 3. – Coloration des graphes planaires avec 6 couleurs.

a) Montrer que tout graphe planaire G vérifie $\chi(G) \leqslant 6$.
b) En déduire un algorithme de 6-coloration des graphes planaires en temps polynomial.

Exercice 4. – Coloration des graphes planaires par des listes de 5 couleurs.

On définit le *nombre chromatique listé* $\chi_\ell(G)$ d'un graphe simple non orienté G comme le plus petit entier k tel que, si on associe à chaque sommet de G un ensemble de k couleurs, on peut colorier G proprement en coloriant chaque sommet avec une des couleurs de l'ensemble qui lui est associé.

a) Pour tout graphe G, montrer que $\chi(G) \leqslant \chi_\ell(G)$.
b) Montrer que tout graphe planaire véfifie $\chi_\ell(G) \leqslant 6$.

On va montrer dans cette section que tout graphe planaire vérifie $\chi_\ell(G) \leqslant 5$.

Un graphe planaire est *quasi-triangulé* si il est possible de le dessiner dans le plan de telle sorte que toutes les régions bornées ont une frontière de longueur 3 (par contre, la région non bornée peut être délimitée par un cycle plus long).

c) Pour prouver que tout graphe planaire G vérifie $\chi_\ell(G) \leqslant 5$, montrer qu'il suffit de le prouver dans le cas particulier où G est presque triangulé.

Pour $n \geqslant 3$, on définit $(\mathcal{P}_n)$ la propriété suivante :

Soit G un graphe planaire presque-triangulé à n sommets, dessiné dans le plan sans que les arêtes ne se croisent. On note B le cycle bordant la face extérieure. Soient u et v deux sommets adjacents de B. On associe à u et v deux couleurs distinctes $c(u) \neq c(v)$. À chaque autre sommet $w \in B$ on associe un ensemble $C(w)$ de 3 couleurs. Alors G peut être colorié par une application "$\theta : V \to$ Couleurs" vérifiant $\theta(u) = c(u)$, $\theta(v) = c(v)$ et $\theta(w) \in C(w)$ pour tout $w \in B \setminus \{u, v\}$.

d) Démontrer $(\mathcal{P}_3)$ – c'est la base de la récurrence.
e) Soit $n \geqslant 4$, on suppose avoir montré $(\mathcal{P}_i)$ pour tout $3 \leqslant i < n$. Démontrer $(\mathcal{P}_n)$ en considérant les deux sous-cas suivants :
  - *Premier cas.* Le cycle bordant la face externe possède une corde. *Indication :* couper le graphe en deux parties selon cette corde ;
  - *Second cas.* Le cycle bordant la face externe ne possède pas de corde. *Indication :* considérer w le sommet du bord qui est adjacent à u (mais qui n'est pas v). Raisonner sur $G \setminus \{w\}$.

f) En déduire que tout graphe planaire G vérifie $\chi_\ell(G) \leqslant 5$, et qu'il est donc 5-coloriable.

En fait, tout graphe planaire vérifie $\chi(G) \leqslant 4$. Ce résultat est connu sous le nom de théorème des quatre couleurs. Il a été démontré en 1976. Par contre, il existe des graphes planaires vérifiant $\chi_\ell(G) = 5$: le résultat démontré ci-dessus ne peut pas être amélioré pour le nombre chromatique listé.