TD n$^{\text{o}}$1 : Combinatoire élémentaire et dénombrement

Exercice 1. – Nombre d'applications.

a) Rappeler quel est le nombre d'applications d'un ensemble fini X dans un ensemble fini Y.
b) Chaque membre d'une troupe de sept comédiens (distincts et identifiés : Anna, Boris, ..., Gaëlle) doit choisir exactement un accessoire parmi les suivants : béret, paire de lunettes, foulard et montre. Chaque accessoire est disponible en nombre illimité. De combien de manières peut s'accessoiriser la troupe ?
c) *Variante.* Chaque comédien peut choisir de prendre ou non un accessoire.
d) *Seconde variante.* Il n'existe qu'un exemplaire de chaque accessoire ; les quatre accessoires doivent être tous utilisés ; un même comédien peut en porter un nombre quelconque (aucun, un seul, ou plusieurs).

Exercice 2. – Coefficients binomiaux.

Les rappels sur les coefficients binomiaux ne seront pas faits en cours. Les résultats de cet exercice seront considérés comme acquis et réutilisables à souhait, sans démonstration, dans la suite du module.

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le nombre de choix de k éléments parmi n ; autrement dit, c'est le nombre de sous-ensembles à k éléments de $\{1,\ldots,n\}$.
a) Sans calcul, montrer que $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$ – ce qui explique le nom de *coefficient binomial.*
b) Montrer que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
c) Par un argument bijectif, montrer que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.
d) Calculer la valeur de $\binom{n}{k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant 7$.
e) Montrer que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (pour $0 \leqslant k \leqslant n$).

Exercice 3. – Nombre de cellules d'un arrangement d'hyperplans affines en position générale.

On dit qu'un ensemble de droites du plan est en position générale si deux droites quelconques d'entre elles s'intersectent (en un point) et trois droites quelconques d'entre elles ont une intersection vide.
a) Combien n droites du plan en position générale délimitent-elles de regions du plan ?
La suite de l'exercice consiste à compter le nombre de régions délimitées par des hyperplans en dimension supérieure.
b) Que peut signifier *être en position générale* pour un ensemble d'hyperplans de $\mathbb{R}^d$?
c) Établir une relation de récurrence sur $\Phi_{n,d}$, le nombre de régions délimitées par n hyperplans de $\mathbb{R}^d$ en position générale.
d) Connaissez-vous une autre suite double satisfaisant cette même équation de récurrence ? Ces suites sont-elles égales ?
e) Exprimer le terme général de $(\Phi_{n,d})$.

Exercice 4. – Principe des tiroirs.

Si on range n pigeons dans m tiroirs avec $m < n$, un tiroir contient plusieurs pigeons.

a) Montrer qu'un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^3$ possède deux faces délimitées par le même nombre d'arêtes.
b) Soit $\xi \in \mathbb{R}$ et un entier $n > 1$. Montrer qu'il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \{n, \ldots, 2n\}$ tel que

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{n^2}.$$

Indication. Ranger les $n + 1$ réels $k\xi - \lfloor k\xi \rfloor$, pour $n \leqslant k \leqslant 2n$, dans un ensemble de n tiroirs appropriés.
Remarque. En fixant la taille du dénominateur à $q = 1/2n$, on pourrait approximer ξ par un rationnel avec une précision $1/4n$ (et c'est optimal). Le résultat précédent montre qu'en laissant un peu de latitude dans le choix du dénominateur, on peut faire beaucoup mieux qu'avec la méthode naïve.
c) Soit $A \subset \{1, 2, \ldots, 2n\}$ avec $|A| = n + 1$. Montrer qu'il existe deux éléments distincts de A tel que l'un divise l'autre.
d) Montrer la généralisation suivante du principe des tiroirs : si un ensemble de $mr + 1$ éléments est partitionné en m ensembles, un ensemble contient au moins $r + 1$ éléments.
e) En utilisant la question précédente, montrer que toute suite de $n^2 + 1$ nombres contient une sous-séquence monotone de longueur $n + 1$.
Indication. Pour la suite $a_1, \ldots, a_{n^2+1}$, raisonner sur ℓ_i la longueur de la plus longue sous-séquence croissante à partir de a_i (pour $1 \leqslant i \leqslant n^2 + 1$).

Exercice 5. – Permutations d'un ensemble fini.

Une façon de battre un paquet de 32 cartes consiste à répéter n fois l'opération suivante :
- Prendre la carte du dessus et la placer de côté ;
- Placer sous le paquet la carte se trouvant au milieu ;
- Placer la carte mise de côté en dessous du paquet.

a) Pour quelles valeurs de l'entier n l'ordre des cartes est-il inchangé ?
b) Pour un ordre donné des cartes au départ, combien d'ordres de cartes différents peut-on obtenir (quand n parcourt l'ensemble des entiers) ? Comparer au nombre total d'ordres possibles sur les cartes.