TD sur les horloges logiques.

Exercice : Horloge matricielle

Considèrons un système contenant 3 sites. Tous les sites possèdent des horloges logiques matricielles. Supposons que l'horloge matricielle HM_3 du site 3 est

$$HM_3 = \begin{pmatrix} HM_3[1,1] & HM_3[1,2] & HM_3[1,3] \\ HM_3[2,1] & HM_3[2,2] & HM_3[2,3] \\ HM_3[3,3] & HM_3[3,2] & HM_3[3,3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Question 1 : A quoi correspond l'élément de l'horloge matricielle $HM_3[3,1]$, pour le site 3 ?
Correction : $HM_3[3,1]$ correspond au nombre de messages issus du site 3 vers le site 1 (Ici le site 3 a émis 1 message vers le site 1).

Question 2 : Même question pour les éléments $HM_3[1,3]$, $HM_3[2,3]$ pour le site 3.
Correction :
Le site 3 sait que
- $HM_3[1,3]$ correspond au nombre de messages issus du site 1 vers le site 3 (Ici le site 1 a émis 2 messages vers le site 3).
- $HM_3[2,3]$ correspond au nombre de messages issus du site 2 vers le site 3 (Ici le site 1 a émis 1 messages vers le site 2).

Le site 3 reçoit le message m en prevenance du site 1. L'estampille du message m est

$$EM_m = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

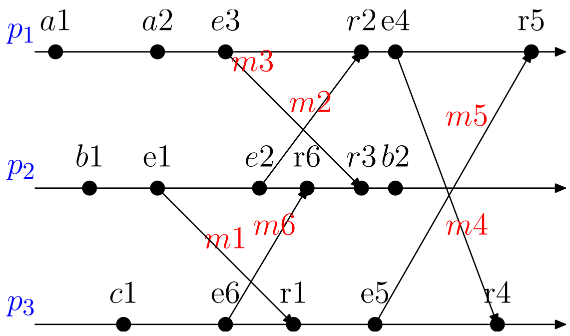
Question 3 : Que peut déduire le site 3 par rapport aux éléments $EM_m[1,3]$, $EM_m[2,3]$?
Correction :
le site 3 peut déduire en fonction de l'estampille du message m que
- le message m correspond au 3 messages envoié par 1. Comme le site 3 a recu 2 message venant de 1, il n'existe pas de message encore non recu venant de 1 dans le passé de la réception de ce message.
- dans le passé de l'émission de m, il existe l'évènement suivant : *le site* 2 *a émis son message* 2 *vers le site* 3. Mais le site 3 ne l'a pas encore reçu.

Question 4 : Le site 3 peut-il délivré le message m (délivrance causale) ? Justifier votre réponse.
Correction : Non. Pour respecter la délivrance causale, le site 3 doit attendre le message m' venant de 2 dont l'élément $EM_{m'}[2,3]$ de l'horloge matricielle est égale à 2.

Coupure cohérente et horloge vectorielle

Dans ce exercice, tous les sites possèdent des horloges logiques vectorielles. Par la suite, on notera $e' \rightsquigarrow e$ si l'évènement e' précède l'évènement e.

Question 1 : Dater les évènements sachant que les dates des évènements $a1$, $b1$ et $c1$ sont les suivants : $HV(a1) = (0, 0, 0)$, $HV(b1) = (0, 3, 1)$, $HV(c1) = (0, 0, 2)$. Donner les estampilles des messages.



Correction :

$HV(a_2) = (1, 0, 0)$	$HV(e_3) = (2, 0, 0)$	$HV(r_2) = (3, 5, 1)$	$HV(e_4) = (4, 5, 1)$	$HV(r_5) = (5, 5, 5)$
$HV(e_1) = (0, 4, 1)$	$HV(e_2) = (0, 5, 1)$	$HV(r_6) = (0, 6, 3)$	$HV(r_3) = (2, 7, 3)$	$HV(b_2) = (2, 8, 3)$
$HV(e_6) = (0, 0, 3)$	$HV(r_1) = (0, 4, 4)$	$HV(e_5) = (0, 4, 5)$	$HV(r_4) = (4, 5, 6)$	

$HV(m_3) = (2, 0, 0)$	$HV(m_1) = (0, 4, 1)$	$HV(m_2) = (0, 5, 1)$
$HV(m_6) = (0, 0, 3)$	$HV(m_5) = (0, 4, 5)$	$HV(m_4) = (4, 5, 1)$

Une coupure cohérente C est une coupure telle que $(e \in C)$ et $(e' \rightsquigarrow e) \Longrightarrow e' \in C$. La date de la coupure $C = (c_1, \ldots, c_n)$ est définie par $VH(C) = sup(VH(c_1), \ldots, VH(c_n))$.

Par exemple, dans la précédente figure, $C = (a_1, b_1, c_1)$ est une coupure et sa date est $(0, 3, 2)$ (car $sup(VH(a_1)[2], VH(b_1)[2], VH(c_1)[2]) = 3$).

Question 2 : La coupure $(e4, e2, e6)$ est-elle cohérente ? Donnez sa date.
Correction :

La coupure $(e4, e2, e6)$ a $(4, 5, 3)$ comme date.

Question 3 : Montrer que la coupure C cohérente si et seulement si $VH(C) = (VH(c_1)[1], \ldots, VH(c_n)[n])$.
Correction :

- **Supposons que la coupure C cohérente.** Par définition nous $\forall i, j,\ c_j \mid\mid c_i$.
  - Soit a_j le évenement de j tel que $a_j \rightsquigarrow c_i$, et $a_j \in C$.
  - Soit a_i, un évènement du site i avec $a_i \rightsquigarrow c_i$, et $a_j \rightsquigarrow a_i$
  - On a $VH(a_j)[i] < VH(a_i)[i] < VH(c_i)[i]$
  - Supposons que $c_j \rightsquigarrow a_j$: on aurait $c_j \rightsquigarrow a_j \rightsquigarrow a_i \rightsquigarrow c_i$ (Contradictoire avec le fait que $c_j \mid\mid c_i$).
  - donc $a_j \rightsquigarrow c_j$, $VH(c_j)[i] = argmax\{VH(a_j)[i] : a_j \rightsquigarrow c_j \wedge a_j \rightsquigarrow c_i\}$
  - donc $VH(c_j)[i] < VH(c_i)[i]$
- **Supposons que la coupure C a pour date $VH(C) = (VH(c_1)[1], \ldots, VH(c_n)[n])$.**
  Nous allons démontrer par contradiction que la coupure C cohérente. Supposons $\exists i \neq j,\ c_i \rightsquigarrow c_j$.
  - $c_i \rightsquigarrow a_i \rightsquigarrow a_j \rightsquigarrow c_j$ (message entre les deux sites) avec $VH(c_i)[i] < VH(a_i)[i]$
  - Comme $a_i \rightsquigarrow c_j$, on a $a_i \in C$ et $VH(c_i)[i] < VH(a_i)[i] \leq VH(c_j)[i]$
  - Ceci est contradictoire avec le fait que $VH(c_i)[i] \geq VH(c_j)[i]$

  Donc la coupure C cohérente.