1 Bases, logarithmes, récurrences

1.1 Manipulations de bases

Exercice 1

Cole Sear, le petit garçon du *Sixième sens*, disait : « I see dead people ». Ce que le protagoniste, joué par Bruce Willis, ne savait pas, c'est que le petit garçon comptait en hexadécimal. Combien de personnes voyait-il ?

Exercice 2

Faire les conversions suivantes :
- $(101010)_2$ en base 10
- $(483)_{10}$ en binaire
- $(111100011)_2$ en hexadécimal

Exercice 3

Calculer, sans passer systématiquement par la base 10, les expressions suivantes :
- $(102013)_4 + (1)_4$
- $(102013)_4 \times (4)_{10}$ et $(102013)_4 \div (4)_{10}$
- $(101011)_2 + (2A)_{16}$
- $(10110)_2 + (111)_1$

1.2 Logarithmes et puissances

Exercice 4

1. Quel est le nombre le plus grand que l'on puisse représenter avec n caractères en binaire ?
2. En déduire le nombre de caractères nécessaires pour représenter en binaire un nombre m quelconque.
3. Généraliser à une base b quelconque.

Exercice 5

1. Combien faut-il de caractères pour représenter $(42)_{10}$ en binaire ?
2. Combien vaut $\log_2(16)$?
3. À partir des deux questions précédentes, calculer combien il faut de caractères pour représenter $(42)_{10}$ en hexadécimal.

1.3 Preuves par récurrence

Exercice 6

Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :

1. $$\forall n \geq 1, \quad 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
2. $$\forall n \geq 1, \quad 7^n - 1 \text{ est divisible par } 6$$
3. $$\forall n \geq 1, \quad (n^3 - n) \text{ est divisible par } 3$$

Exercice 7

Un nombre premier est un entier supérieur à 1 qui n'a pas d'autre diviseurs que 1 et lui-même. Montrer que tout entier positif supérieur à 1 peut être décomposé en un produit de facteurs premiers.

Exercice 8

On se propose de démontrer le théorème suivant :
Théorème : tout le monde est d'accord avec le professeur
Preuve :

1. On considère tout d'abord un groupe de taille $n = 1$, composé uniquement du professeur. La propriété est naturellement vérifiée ;
2. On suppose maintenant que la propriété est vraie pour un groupe de taille n. On considère alors un groupe de taille $n+1$, où le professeur est la $n^{\text{ième}}$ personne. Si on exclue la personne $n+1$, alors tout le monde est d'accord avec le professeur (par hypothèse de récurrence). Si on retire maintenant la première personne, les n personnes restantes sont également d'accord avec le professeur, toujours pas hypothèse de récurrence.
   On conclue donc que la propriété est vraie pour $n+1$.

Question : cette preuve est-t-elle correcte ? Si non, où est l'erreur ?

2 Récursivité

Exercice 9

Dans cet exercice, on considèrera une liste $\mathcal{L}$ contenant n nombres entiers.

1. Proposer une méthode récursive pour rechercher un nombre k dans $\mathcal{L}$
2. Proposer deux méthodes récursives permettant de rechercher le plus grand entier contenu dans $\mathcal{L}$.

Exercice 10

Alice pense à un nombre entre 1 et 100, et Bob doit deviner quel est ce nombre. Pour cela, il a le droit de poser des questions du type : « le nombre est-il k ? », auxquelles Alice doit répondre (honnêtement) par « oui », « inférieur » ou « supérieur ».

1. Quelle est la stratégie la plus rapide que Bob puisse utiliser ?
2. Combien de questions devra-t-il poser au maximum avant de trouver la réponse ?

Exercice 11

Proposer une méthode permettant d'énumérer tous les mots de k lettres sur un alphabet à n lettres. Combien y en a-t-il ?

Exercice 12

Définition : un palindrome est un mot (ou une phrase) dont les lettres peuvent être lue de la même manière qu'on les lise de gauche à droite ou de droite à gauche. Par exemple : « radar », ou encore « Et si l'arôme des bottes révèle ma déviante et naïve dame, le verset t'obsède, moraliste ! ».
Proposer une définition récursive d'un palindrome (on ignorera les espaces et la ponctuation).

Exercice 13

Définition : Soient $a, b \in \mathbb{N}$, avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. On s'intéresse à l'ensemble $\mathcal{D}$ des nombres qui divisent a et b. $\mathcal{D}$ contient au moins un élément, 1, et est fini, donc $\mathcal{D}$ contient un plus grand élément, qu'on nomme le **plus grand commun diviseur** (ou pgcd) de a et b. On cherche à calculer $\text{pgcd}(a, b)$.

1. Montrer que si n divise a et b, n divise aussi le reste r de la division euclidienne de a par b. En déduire que $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r)$.
2. En déduire un algorithme permettant de calculer $\text{pgcd}(a, b)$.

Exercice 14

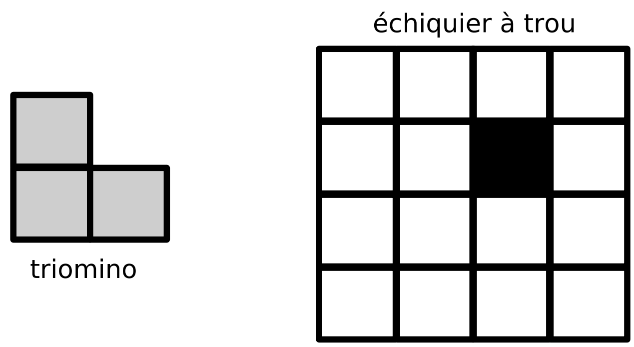
Dans le *jeu de Nim*, un certain nombre de bâtons sont disposées en rang devant deux joueurs. Chaque joueur, à tour de rôle, choisit de prendre 1, 2 ou 3 bâtons. Celui qui prend le dernier bâton a perdu.

1. Qui gagne si la position de départ comporte 1, 2, 3, 4 ou 5 bâtons ?
2. Si la position de départ comporte un nombre quelconque de bâtons, quelle est la stratégie à suivre pour gagner ?

Exercice 15

On appelle un *échiquier à trou* de rang n un plateau composé de $2^n \times 2^n$ cases, dont une des cases a été enlevée. Un échiquier à trou de rang 1 comporte donc 3 cases et un trou. Un échiquier à trou de rang 2 est représenté sur la figure ci-dessous.

Un triomino en « L » est un bloc de trois carrés disposés comme indiqué sur la figure.



1. Est-il possible de paver l'échiquier de la figure à l'aide de triominos ?
2. Est-il toujours possible de paver un échiquier à trou à l'aide de triominos ?

Exercice 16

On cherche à calculer le nombre maximum de parts de pizza que l'on peut obtenir en effectuant k coupes droites dans une pizza. Peu importe la taille ou la forme des parts. Appelons ce nombre P_k.

1. Calculer P_0, P_1, P_2, P_3 à la main.
2. Si l'on a déjà effectué k coupes, quelle est la meilleure stratégie pour placer la coupe $k+1$ afin de maximiser le nombre de parts créées ?
3. Exprimer P_{k+1} en fonction de P_k
4. Exprimer P_k en fonction de k

3 Fonctions, relations, structures algébriques

3.1 Les ensembles

Exercice 17

Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et soit les parties suivantes de E :

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$, $C = \{1, 3, 5, 7\}$, et $D = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
Calculer

1. $\overline{A}$, $A \cup C$, $\overline{A \cup C}$, $A \cap C$, $\overline{A \cap C}$,
2. $(A \cap B) \cup (C \cap D)$, $(A \cup C) \cap (B \cup D)$
3. $A - D$, $D - A$, $A \bigtriangleup D$

Exercice 18

On s'intéresse au nombre de voitures garées dans un parking. On a les informations suivantes : il y a
- 100 voitures de la marque *« Renault »*,
- 85 voitures de couleur claire,
- 36 voitures de la marque *« Renault »* et de couleur foncée,

Peut-on calculer le nombre de véhicules sur le parking ? Si, oui, calculer le. Si non, dire pourquoi.

Exercice 19

Donner les positions relatives de $A, B, C \subset E$ si $A \cup B = B \cap C$

Exercice 20

Soit A, B deux parties d'un ensemble E. A l'aide de dessins, comparer

1. entre $\overline{(A \cap B)}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$
2. entre $\overline{(A \cup B)}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$

Exercice 21

Soient A, B, C trois sous-ensembles quelconques d'un ensemble E. Démontrer que
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $A - B = A \cap \overline{B}$
- $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.

Exercice 22

Montrer que : $A \cap B = A \cap C \iff A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$

Exercice 23

Soit $f : E \to F$ une application. Soit $A, B \subset E$ et soit $C, D \subset F$. A-t-on nécessairement :

1. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
3. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(C)$
4. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(C)$
5. $f^{-1}(f(A)) = A$
6. $f(f^{-1}(C)) = C$

Justifier chaque cas par une preuve ou par un contre-exemple.

3.2 Les fonctions

Exercice 24

À l'aide de *« patates »*, dessiner une application non injective, puis une application non surjective.

Exercice 25

Déterminer si les applications suivantes sont surjectives ou non :

1. l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$;
2. l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = 2n$;
3. l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = (-1)^n \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Exercice 26

Montrer que les applications suivantes sont injectives ou non

1. l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$;
2. l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = 2n$;
3. l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = (-1)^n \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Exercice 27

L'application $f(x) = x + 1$ est-elle bijective de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$? Et de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$?

Exercice 28

Interpréter les phrases suivantes en terme d'injectivité et de surjectivité :

1. il existe des nombres entiers relatifs différents (dans $\mathbb{Z}$) qui ont le même carré ;
2. tout nombre réel positif a une racine carrée ;
3. le nombre 3 n'est le sinus d'aucun nombre ;
4. un nombre complexe est caractérisé par ses parties réelles et imaginaires.

Exercice 29

Soient A et B des ensembles finis, et soit $f : A \to B$ une application :

1. si f est injective, alors $|A| \leq |B|$;
2. si f est surjective, alors $|A| \geq |B|$.

Exercice 30

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications et $h = g \circ f$. Montrer les propositions suivantes :

1. h surjective $\Rightarrow$ g surjective
2. h injective $\Rightarrow$ f injective
3. (h injective et f surjective) $\Rightarrow$ g injective
4. (h surjective et g injective) $\Rightarrow$ f surjective

Les implications réciproques sont-elles vraies ?

Exercice 31

Soit $f : E \to E$ une application. On définit par récurrence les applications f^n par $f^1 = f$ et $f^n = f \circ f^{n-1}$.

1. On suppose que f est injective. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, f^n$ est injective.
2. On suppose que f est surjective. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, f^n$ est surjective.

4 Relations

4.1 Relations

Exercice 32

Écrire sous forme d'ensemble les relations suivantes :
- « est inférieure strictement à »
- « est inférieure ou égal à »

Sont-elles reflexives, symétriques, transitives ?

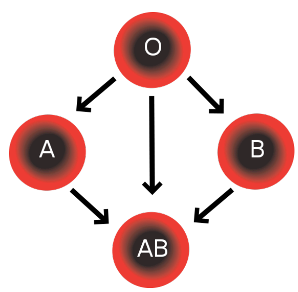
Exercice 33

Écrire sous forme de relation les applications suivantes :

1. l'application $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ définie par $f(x) = x \mod 2$;
2. l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = 2n$

Exercice 34

Considérons le graphe de compatibilité des groupes sanguins : $x \to y$ signifie que une personne du groupe sanguin x peut donner son sang à une personne du groupe sanguin y.



Définir la relation *« compatibilité »*. Est-elle refléxive, transitive, symétrique, antisymétrique ?

Exercice 35

La relation suivante est-elle une relation d'équivalence :

$\mathcal{T} : \mathcal{T} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{N},\ \text{et}\ a + b \text{ pair }\}.$

Donner la classe d'équivalence de 3, 4, 5, 6

Exercice 36

Donner des exemples de relations qui sont

1. réflexives et symétriques mais pas transitives,
2. réflexives et transitives mais pas symétriques,
3. symétriques et transitives mais pas réflexives,

Exercice 37

Les relations suivantes sont-elles des relations d'ordre ?

1. $\mathcal{P}$: $\forall x, y \in \mathbb{N}, x\mathcal{P}y \Leftrightarrow x \leq y$.
2. $\mathcal{Q}$: $\forall x, y \in \mathbb{N}, x\mathcal{Q}y \Leftrightarrow x < y$.
3. $\mathcal{R}$: $\forall x, y \in \mathbb{N}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x$ est multiple de y.

Exercice 38

Montrer que pour tout entier n, la relation *« équivalent modulo n »* est une relation d'équivalence sur les entiers. Cette relation partitionne-t-elle les entiers ?
Rappel : On dit que $a \equiv b \mod n$ s'il existe une entier q tel que $a - b = qn$.

Exercice 39

Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. On définit sur l'ensemble $E \times E$ la relation $\mathcal{R}$:
$(p, q)\mathcal{R}(p', q')$ si $p - p'$ est pair et $q - q'$ est divisible par 3.

1. Donner le cardinal de $E \times E$.
2. Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

   On désigne par $\overline{(p, q)}$ la classe d'équivalence de (p, q).
3. Combien y a-t-il de classes d'équivalence différentes ? Donner leur liste.
   (a) Calculer le nombre d'éléments des classes $\overline{(1, 1)}$, $\overline{(1, 2)}$ et $\overline{(1, 3)}$.
   (b) Soit $q \in E$. Montrer que si $(x, y) \in \overline{(1, q)}$, alors $(x + 1, y) \in \overline{(2, q)}$
4. Déterminer le cardinal de chaque classe d'équivalence. Le résultat est-il compatible avec celui de la question 1 ?

5 Structures algébriques

Exercice 40

Dans $\mathbb{Z}$, trouver :

1. une loi non associative
2. une loi n'ayant pas d'élément neutre
3. une loi pour lequel il n'y a pas toujours d'élément inverse
4. une loi non commutative

Exercice 41

Considérons l'ensemble $E = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ et la loi $\oplus : E \times E \to E$ définie de la façon suivante $x \oplus y \equiv (x + y) \mod k$

1. Montrer que la loi $\oplus$ admet un élément neutre, un élément inverse pour chaque élément de E.
2. Montrer que loi $\oplus$ est associative.
3. Que peut-on en déduire ?

Exercice 42

Construire un groupe à partir de $E_1 = \{e\}$, de $E_2 = \{e, a\}$

Définition : Soient $(G, \circ)$, et $(G', \bullet)$ deux groupes. On appelle un morphisme de groupes de $(G, \circ)$ dans $(G', \bullet)$, toute application $f : G \to G'$ qui vérifie la condition

$$\forall (x, y) \in G^2 \; f(x \circ y) = f(x) \bullet f(y)$$

Exercice 43

Montrer que $f : G \to G$ tel que $f(x) = x$ est un morphisme de groupe.

Exercice 44

Soit f morphisme de groupes de $(G, \circ)$ dans $(G', \bullet)$. Montrer que
- L'image par f de l'élément neutre e de G est l'élément neutre e' de G'
- pour tout $x \in G$, $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$
- pour $n \in \mathbb{Z}$ pour tout $x \in G$, $f(x^n) = (f(x))^n$

Exercice 45

On possède un bol $\mathcal{B}$ rempli de pierres blanches et un bol $\mathcal{N}$ rempli de pierres noires $\bullet$. On considère l'opération $\bowtie$ qui consiste à prendre des pierres dans $\mathcal{B}$ ou dans $\mathcal{N}$, et à les poser sur la table, en respectant la règle suivante : chaque $\bullet$ annule un $\circ$. On a par exemple :
$\circ \bowtie \circ\circ = \circ \circ \circ$
$\circ \circ \circ \bowtie \bullet = \circ\circ$
$\bullet\bullet \bowtie \circ = \bullet$
On considère $\mathcal{P}$ l'ensemble des combinaisons de pierres que l'on peut former :

$$\mathcal{P} = \{\emptyset, \bullet, \circ, \bullet\bullet, \circ\circ, \ldots\}$$

De plus, après avoir remarqué que les éléments de $\mathcal{P}$ ne peuvent contenir qu'une couleur de pierres, on notera $\circ^n$ le lot $\circ \ldots \circ$ contenant n pierres.

1. $\bowtie$ est-elle une loi de composition interne sur $\mathcal{P}$?
2. $(\mathcal{P}, \bowtie)$ est-il un groupe ? Est-il abélien ?
3. On considère la fonction f, qui prend un lot de pierres quelconques et rajoute autant de pierres de la même couleur sur la table. On a donc $f(\circ\circ) = \circ \circ \circ\circ$, et $f(\bullet) = \bullet\bullet$.

$$\begin{array}{lll} f: & \mathcal{P} & \to \mathcal{P} \\ & f(x^k) & \to x^{2k} \end{array}$$

   Montrer que f est un automorphisme.
4. On considère maintenant $g : \mathcal{P}^2 \to \mathcal{P}$ qui a $x^a, y^b \in \mathcal{P}$ associe le lot de pierres z construit de la manière suivante :
   - pour chaque pierre blanche de x, on ajoute b pierres de la couleur de y au lot z.
   - pour chaque pierre noire de x, on ajoute b pierres de la couleur opposée à y.

   Ainsi, $g(\circ, \bullet\bullet) = \bullet\bullet$, $g(\bullet, \circ\circ) = \bullet\bullet$, $g(\bullet, \bullet\bullet) = \circ\circ$ et $g(\circ\circ, \bullet\bullet) = \bullet \bullet \bullet\bullet$.
   Montrer que g est une loi de composition associative, distributive, avec un élément neutre.
5. Montrer que $(\mathcal{P}, \bowtie, g)$ est un anneau.

6 Permutations

Exercice 46

Sam Loyd, un auteur de jeux mathématiques américain, est réputé avoir commercialisé à la fin du XIXième siècle le puzzle suivant (nommé « 14-15 »), en offrant une prime de \$1000 au premier qui trouverait la solution. Il s'agit d'une variante du jeu de taquin, inventé par Noyes Chapman vers 1874, comportant 4x4 cases numérotées, où les cases 14 et 15 sont inversées et où la 16ième case est manquante.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Il s'agit de replacer les cases dans le bon ordre, en faisant glisser une pièce touchant un trou à la place du trou. On se propose dans cet exercice de vérifier si la résolution de ce puzzle est possible, ou si monsieur Loyd était sûr de garder ses $1000. Pour cela, nous allons étudier les permutations.

Définition : Soit E un ensemble. L'ensemble S_E des bijections de E muni de la loi de composition des applications est un groupe. En particulier pour $n > 0$, l'ensemble des bijections de $\{1, \ldots, n\}$ muni de $\circ$ est un groupe qu'on note S_n. On appelle permutations les éléments de S_n.

Notation : Soit σ une permutation de S_6 telle que $\sigma(1) = 6$, $\sigma(3) = 5$ et $\sigma(n) = n$ sinon. On notera σ de la façon suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Soit E un ensemble à n éléments. Montrer que S_E est isomorphe à S_n.
2. Quel est le cardinal de S_n ?

Définition : on appelle *cycle* de longueur $r > 1$ de S_n une permutation $c \in S_n$ telle qu'il existe $x_1, \ldots, x_r \in \{1, \ldots, n\}$ vérifiant $c(x_1) = x_2, \ldots, c(x_{r-1}) = x_r$ et $c(x_r) = x_1$, et telle que c laisse fixes les autres éléments de $\{1, \ldots, n\}$. La notation usuelle pour un cycle est $c = (x_1 \ldots x_r)$.

3. Toute permutation se décompose en produit de cycles disjoints. Chercher, sur l'exemple suivant, cette décomposition (qui est unique, à l'ordre des cycles près) et proposer une méthode pour obtenir la décomposition en général.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 9 & 5 & 2 & 1 & 6 & 8 & 7 & 10 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

Définition : Une *transposition* est une permutation qui échange deux éléments, et laisse tous les autres inchangés. C'est aussi un cycle de longueur 2. On note $\tau = (i \;\; j)$ la transposition qui échange i et j (n est sous-entendu).

4. Montrer que S_n est engendré par l'ensemble des transpositions (c'est à dire qu'une permutation peut être décomposée en produit de transpositions).

Théorème : Si σ est une permutation de S_n qui peut s'écrire comme produit de transpositions de deux manières différentes $\sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_r$ et $\sigma = \tau'_1 \circ \ldots \circ \tau'_{r'}$, alors r et r' sont de même parité.

5. Les mouvements des pièces du jeu du 14-15 sont des transpositions sur S_{16}, en considérant que la case vide est numérotée 16. Comment exprimer la configuration recherchée en termes de transpositions ?
6. Observer les mouvements de la case vide, numérotée 16. Que peut-on dire d'une série de transpositions qui ramène 16 à sa place ?
7. Conclure.

Exercice 47

Si f est un morphisme de $(G, \boxdot)$ dans $(H, \odot)$ et g un morphisme de $(H, \odot)$ dans $(K, \circledast)$, montrer que $g \circ f$ réalise un morphisme de $(G, \boxdot)$ dans $(K, \circledast)$.

Exercice 48

Soit f un morphisme de $(G, \boxdot)$ dans $(H, \odot)$. Montrer que f est injectif si et seulement si son noyau est réduit à $e_{\boxdot}$ (l'élément neutre de $\boxdot$).

7 Logique (1/2)

Logique

Exercice 49

Pour chacun des énoncés suivants, choisir une lettre de proposition pour représenter les propositions élémentaires et montrer quelle est la forme logique de l'énoncé.

1. Ou ce n'est pas Sophia, ou bien elle a beaucoup changé.
2. Si c'est Sophia, elle a beaucoup changé.
3. Karpov doit sacrifier une tour ou Kasparov fera mat en trois coups.
4. Si Karpov ne sacrifie pas une tour, Kasparov fera mat en trois coups.
5. Ni Paul ni Maurice n'ont réussi.
6. Paul et Maurice ne réussiront pas tous les deux.
7. Si Maurice réussit, Paul réussira, sinon aucun des deux ne réussira.

Exercice 50

Relier les propositions équivalentes.

1. $\neg(p \wedge q)$	a. $(\neg p \wedge \neg q)$
2. $\neg(p \vee q)$	b. $q \rightarrow (\neg p)$
3. $p \rightarrow (\neg q)$	c. $(\neg p \vee \neg q)$
4. $\neg(p \rightarrow q)$	d. $p \wedge (\neg q)$

Exercice 51

Soient p et s les propositions signifiant respectivement « Paul aime Sophie » et « Sophie aime Paul ». Pour chacune des formules suivantes, trouver un énoncé en français (cohérent et simple) qui lui corresponde.

1. $(\neg p \wedge s)$
2. $\neg(p \wedge s)$
3. $\neg(p \vee s)$
4. $(p \leftrightarrow s)$
5. $\neg(p \rightarrow s)$

Exercice 52

Un connecteur logique binaire ($\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$) peut-être vu comme une application de $\{v, f\}^2$ vers $\{v, f\}$.

1. Décrire l'application correspondant au connecteur logique $\wedge$.
2. Combien existe-t-il de connecteurs logiques différents ?
3. Écrire la table de vérité d'un connecteur logique autre que ceux usuels.

Exercice 53

Pour chacun des schémas d'inférence suivants, trouvez une interprétation des lettres des formules qui rendent vraies les prémisses et fausse la conclusion. Que peut-on en déduire concernant ces schémas d'inférence ?

$$\begin{array}{l} \text{Si } p \text{ alors non } q \\ \text{non } q \\ \hline \text{non } p \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \\ \text{si } p \text{ alors } q \\ \text{si } q \text{ alors } r \\ \hline \text{non } r \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{si } p \text{ alors } q \\ \text{si } q \text{ alors } r \\ \text{non } r \\ \hline p \end{array}$$

Exercice 54

Le professeur Lenoir a été retrouvé à Paris, dans sa bibliothèque, sauvagement assassiné avec un chandelier. La police a arrêté quatre suspects, les a interrogés, et a obtenu les témoignages suivants :

Paul :
– Je ne connaissais pas le professeur Lenoir
– Émile connaissait le professeur Lenoir
– À l'heure du crime, j'étais à New York en compagnie de Victor

Émile :
– Je ne connaissais pas le professeur Lenoir
– Victor connaissait le professeur Lenoir
– André couchait avec la femme du professeur Lenoir

Victor :
– Je ne connaissais pas le professeur Lenoir
– À l'heure du crime, j'étais à Tokyo avec André
– Je n'étais donc pas à New York avec Paul

André :
– Émile couchait avec la femme du professeur Lenoir
– Mais pas moi !
– À l'heure du crime, j'étais à Tokyo avec Victor

Le détective chargé de l'enquête est persuadé que chaque témoin a menti une fois et une seule. En supposant que le coupable fasse partie des quatre témoins, qui a tué le professeur Lenoir ?

Exercice 55

Soit la formule suivante : $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p)$

1. Dessiner l'arbre de formation de cette formule
2. Calculer sa table de vérité

8 Logique (2/2)

8.1 Tableaux de Karnaugh

Exercice 56

Trouver une formule booléenne équivalente au tableau de Karnaugh suivant :

AB \CD	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	0	1	1	0

Exercice 57

Trouver une formule booléenne équivalente au tableau de Karnaugh suivant :

AB \CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	1	0	0	1

8.2 Quantificateurs

Exercice 58

Traduire en langage ordinaire les formules suivantes :

1. $\forall n \in \bullet, \exists m \in \bullet, m > n$
2. $\exists m \in \bullet, \forall n \in \bullet, m > n$
3. $\forall x \in \mathbb{Q}, \forall z \in \mathbb{Q}, \exists y \in \mathbb{Q}, x < y < z$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$

Exercice 59

Écrire en langage logique la négation des formules de l'exercice précédent. Parmis toutes ces formules, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses ?

Exercice 60

Traduire en langage logique les phrases suivantes :

1. Le carré de tout nombre réel est positif
2. Un nombre divisible par 8 est divisible par 2
3. Il existe un nombre pair divisible par 3
4. Le produit de deux nombres réels est positif si et seulement si ces deux nombres réels sont positifs
5. Les deux seules solutions de l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ sont 2 et 3

Exercice 61

Les propositions suivantes sont-elles équivalentes ? Si non, celle de gauche implique-t-elle celle de droite ?

1. $\neg(\exists x, P(x))$ et $(\forall x, \neg P(x))$
2. $(\forall x, P(x) \wedge Q(x))$ et $((\forall x, P(x)) \wedge (\forall x, Q(x)))$
3. $((\forall x, P(x)) \vee (\forall x, Q(x)))$ et $(\forall x, P(x) \vee Q(x))$
4. $(\exists x, P(x) \vee Q(x))$ et $((\exists x, P(x)) \vee (\exists x, Q(x)))$
5. $(\exists x, P(x) \wedge Q(x))$ et $((\exists x, P(x)) \wedge (\exists x, Q(x)))$
6. $(\exists x, \forall y, P(x, y))$ et $(\forall y, \exists x, P(x, y))$

8.3 Purs et pires

Sur l'île de Puro-Pira, il y a deux types d'habitants : les Purs, qui disent toujours la vérité, et les Pires, qui mentent toujours.

Dans les exercices qui suivent, chaque évènement est indépendant (donc, d'un évènement à l'autre, Alice et Bob peuvent devenir Purs ou Pires).

Exercice 62

Que peut-on déduire des rencontres suivantes ?

1. Bob dit : nous sommes tous les deux des Pires.
2. Alice dit : je suis une Pure et Bob est un Pire.
3. Alice dit : si je suis une Pure, alors Bob est un Pire.

Exercice 63

1. Trouver une phrase que ni un Pur ni un Pire ne peut dire
2. Trouver une phrase qui peut être dire par un Pur mais aussi par un Pire.

8.4 Évaluation des formules (du calcul des propositions)

Exercice 64

Rappels : une *tautologie* est une formule qui prend la valeur *vrai* pour toutes les valuations (pour chaque manière d'affecter des valeurs booléennes à ses variables). On note « A est une tautologie » ainsi : « $\models A$ ». A est *satisfiable* ssi elle prend la valeur *vrai* pour au moins une valuation. C'est une *antilogie* ssi elle ne prend la valeur *vrai* pour aucune valuation.

Soient A et B deux formules. Parmis les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

1. A est une tautologie si et seulement si sa négation est une antilogie.
2. Si A et B sont satisfiables, alors $(A \wedge B)$ est satisfiable.
3. Si A et B sont des tautologies, alors $\models (A \wedge B)$.
4. Si $\models (A \vee B)$, alors $\models A$ ou $\models B$.
5. Si $\models (A \leftrightarrow B)$, alors $\models A$ et $\models B$.

Exercice 65

Rappel : Soit H un ensemble de formules et C une formule. On dit que C est *conséquence logique* de H si toutes les interprétations qui rendent vraies toutes les formules de H rendent aussi vraie la formule C. Cela se note « $H \models C$ ». On peut lister plusieurs ensembles de formules, par exemple « $H_1, H_2, H_3 \models C$ » signifie : « si H_1, H_2 et H_3 sont vraies, alors C est vraie. »

Soient A, B et C des formules. Prouver les propriétés suivantes :

1. $A \models A$
2. Si $\not\models B$ et $\models A$, alors $B \models A$
3. Si $A \models B$ et $B \models C$, alors $A \models C$
4. Si $A \models B$ et $A \models \neg B$, alors $\models \neg A$
5. Si $A \models B$ et $\neg A \models B$, alors $\models B$
6. Si $A \models C$ et $B \models C$, alors $(A \vee B) \models C$
7. $A, B \models C$ si et seulement si $(A \wedge B) \models C$