Modélisation des systèmes distribués

Propriété sur les invariants

On suppose que P_1 et P_2 sont des invariants du système de transition $\mathcal{S}$. Montrer que $P_1 \vee P_2$, $P_1 \wedge P_2$ sont aussi invariants pour $\mathcal{S}$.
Correction :

Soit un système de transitions $S = (\sum, I, \rightarrow)$
- $\sum$: ensemble états fini ou infini.
- I : ensemble états initiaux.
- $\rightarrow$: relation de transitions $\sum \rightarrow \sum$.

Soit P_1 un invariant $\left\{ \begin{array}{c} Init \Rightarrow P_1 \\ \forall \sigma, \sigma' \in \Sigma : P_1(\sigma) \wedge (\sigma \rightarrow \sigma') \Rightarrow P_1(\sigma') \end{array} \right.$

Soit P_2 un invariant $\left\{ \begin{array}{c} Init \Rightarrow P_2 \\ \forall \sigma, \sigma' \in \Sigma : P_2(\sigma) \wedge (\sigma \rightarrow \sigma') \Rightarrow P_2(\sigma') \end{array} \right.$

Grace à (1) et (3), on a $\begin{array}{c} Init \Rightarrow P_2 \vee P_1 \\ Init \Rightarrow P_2 \wedge P_1 \end{array}$ Grace à (2) et (4), on a
$\forall \sigma, \sigma' \in \Sigma :(P_1 \wedge P_2)(\sigma) \wedge (\sigma \rightarrow \sigma') \Rightarrow \quad \forall \sigma, \sigma' \in \Sigma :(P_1(\sigma) \wedge P_2(\sigma)) \wedge (\sigma \rightarrow \sigma')$
$\forall \sigma, \sigma' \in \Sigma :(P_1 \wedge P_2)(\sigma) \wedge (\sigma \rightarrow \sigma') \Rightarrow \quad P_1(\sigma') \wedge P_2(\sigma')$

Systèmes de transition

Soient $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ deux systèmes dont des invariants respectifs sont P_1 et P_2. On fusionne les deux systèmes $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$, en unissant les systèmes de transition supposés être définis sur le même espace d'états. Que peut-on dire de la propriété $P_1 \wedge P_2$?
Correction : Soit deux systèmes de transitions $S_1 = (\sum, I, \rightarrow_1)$, et $S_2 = (\sum, I, \rightarrow_2)$, tels que
- $\Sigma = \{q_0, q_1\}$
- $I = \{q_0\}$
- $\rightarrow_1 = \{(q_0, q_0), (q_1, q_1)\}$
- $\rightarrow_2 = \{(q_0, q_1)\}$

Voici les invariants
- $P_1(\sigma) = (\sigma = q_0)$
- $P_2(\sigma) = (\sigma = q_0 \vee \sigma = q_1)$

Et $P_1 \wedge P_2(\sigma) = (\sigma = q_0) \wedge (\sigma = q_0 \vee \sigma = q_1)$ invariant ? non car $(P_1 \wedge P_2)(q_0) \vee (q_0 \rightarrow q_1) \not\Rightarrow P_1 \wedge P_2(q_1)$.

Synchrone ou asynchrone

Définir un modèle de systèmes distribués (ayant 2 ou 3 processus) où les messages peuvent être transmis de manière synchrone (manière asynchrone).
Correction :

Synchrone Soit un système de transitions $\begin{array}{c} S_1 = (\sum_1, I_1, \mathcal{E}_1, \rightarrow_1) \\ \text{avec} \quad \rightarrow_1 = \rightarrow_{int1} \cup \rightarrow_{env\_mess1} \cup \rightarrow_{rec\_mess1} \end{array}$

Soit un système de transitions $\begin{array}{c} S_2 = (\sum_2, I_2, \mathcal{E}_2, \rightarrow_2) \\ \text{avec} \quad \rightarrow_2 = \rightarrow_{int2} \cup \rightarrow_{env\_mes2s} \cup \rightarrow_{rec\_mess2} \end{array}$

Conduit à un système de transitions S, $S = (\sum_1 \times \sum_2, I_1 \times I_2, \rightarrow)$, tel que $(q_1, q_2) \rightarrow (q'_1, q'_2)$ si
- $q_1 \rightarrow^{\epsilon_1}_{int1} q'_1$ et $q_2 = q'_2$ avec $\epsilon_1 = \emptyset$.

ou $q_2 \rightarrow^{\epsilon_2}_{int2} q'_2$ et $q_1 = q'_1$ avec $\epsilon_2 = \emptyset$.

ou $q_1 \rightarrow^{\epsilon}_{envmess} q'_1$ et $q_2 \rightarrow^{\epsilon}_{recmess} q'_2$, avec ϵ avec un message envoyeé de $S_1 \rightarrow S_2$.
ou $q_1 \rightarrow^{\epsilon}_{recmess} q'_1$ et $q_2 \rightarrow^{\epsilon}_{envmess} q'_2$, avec ϵ avec un message envoyeé de $S_2 \rightarrow S_1$.

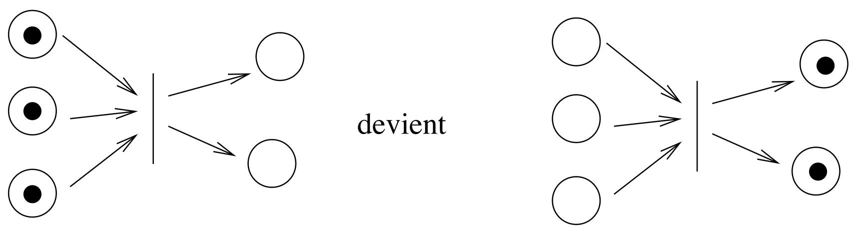
Asynchrone

Conduit à un système de transitions S, $S = (\sum_1 \times \sum_2 \times P, I_1 \times I_2 \times \emptyset, \rightarrow)$, tel que

1. P pile de messages (ici FIFO).
2. $(q_1, q_2, M) \rightarrow (q'_1, q'_2, M')$ si
   – $q_1 \rightarrow^{\epsilon_1}_{int1} q'_1$, $q_2 = q'_2$, $M = M'$.
   ou $q_2 \rightarrow^{\epsilon_2}_{int2} q'_2$, $q_1 = q'_1$, $M = M'$.
   ou $q_1 \rightarrow^{\epsilon}_{envmess} q'_1$ et $q_2 = q'_2$, avec ϵ avec un message envoyé de $S_1 \rightarrow S_2$, $M' = M \cup \{\epsilon\}$.
   ou $q_1 \rightarrow^{\epsilon}_{recmess} q'_1$ et $q_2 = q'_2$, avec ϵ avec un message envoyé de $S_2 \rightarrow S_1$, $M' = M - \{\epsilon\}$.
   ou $q_2 \rightarrow^{\epsilon}_{envmess} q'_2$ et $q_1 = q'_1$, avec ϵ avec un message envoyé de $S_2 \rightarrow S_1$, $M' = M \cup \{\epsilon\}$.
   ou $q_2 \rightarrow^{\epsilon}_{recmess} q'_2$ et $q_1 = q'_1$, avec ϵ avec un message envoyé de $S_1 \rightarrow S_2$, $M' = M - \{\epsilon\}$.

Réseau de petri

Un réseau de Petri est un ensemble de nœuds, d'arcs de transitions, de jetons. Ce réseau évolue dans le temps en fonction de certaines règles :



1. Modéliser un compteur modulo 4 sous forme d'un réseau de Petri. Écrire l'évaluation de ce réseau de Petri sous la forme d'un système de transitions.

Correction :

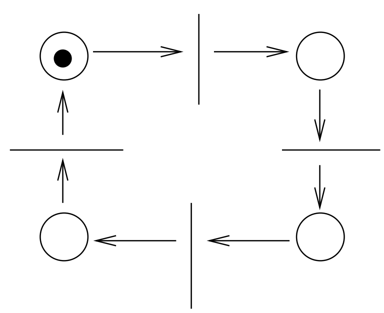


FIG. 1 – compteur modulo 4

2. Modéliser l'exclusion mutuelle sous forme de réseau de Petri.

Correction :

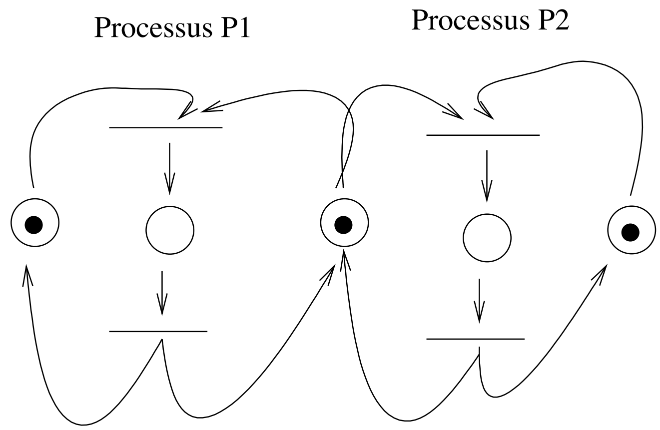
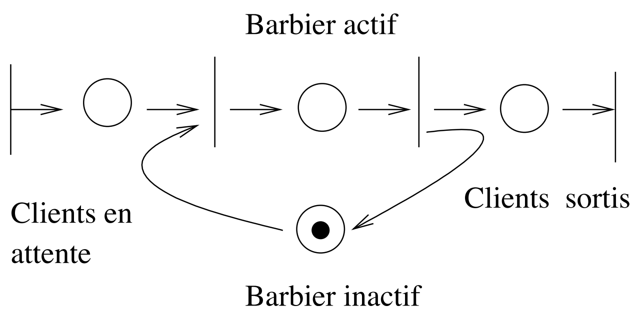


FIG. 2 – exclusion mutuelle

Exercice : Modélisation sous forme de rĄéseau de Pétri

1 Modéliser le problème du barbier.

Correction :

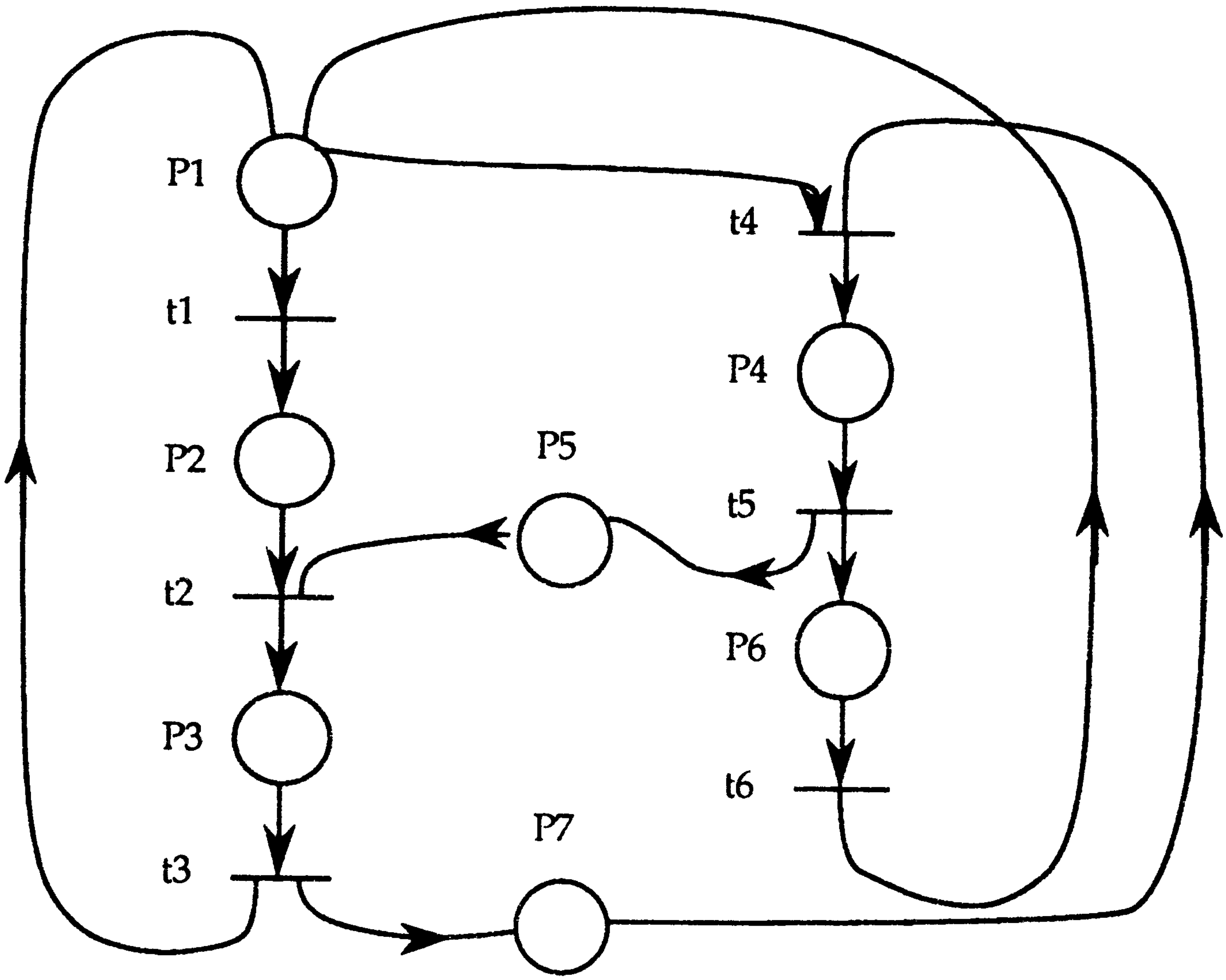


2 Modéliser le problème de la piscine (n cabines, k paniers).

Correction : Donnons les interpretons des transition en terme d'évenements.

1. t1 prendre une cabine sans avoir de panier.
2. t2 prendre un panier en ayant une cabine.
3. t3 liberer un cabine et aller nager
4. t4 prendre une cabine apres avoir nage.
5. t5 prendre un panier et se rhabiller dans un cabine
6. t6 liberer une cabine

1. place P_1 : n jetons
2. place P_5 : k jetons


P1
t1
P2
t2
P3
t3
P4
t4
P5
t5
P6
t6
P7