Auteur : Johanne Cohen

graphe planaire

https://www.lri.fr/~jcohen/documents/enseignement/td-planaire.pdf

Exercice 1 Le problème du coloriage de graphe planaires

Un graphe est *planaire* si on peut le dessiner dans le plan sans que les arêtes ne se croisent. Soit $G = (V, E)$ un graphe planaire non vide *connexe*. Notons $n = |V|$, $a = |E|$.

Considérons un dessin de G dans le plan (sans que les arêtes ne se croisent). Soit f le nombre de régions du plan délimitées par les arêtes de G.

Question 1.1 Montrer que les graphes planaires respectent la relation d'Euler $n - a + f = 2$. (*Indication : raisonner par récurrence sur le nombre de faces*)

Correction

On procède par récurrence sur le nombre f de faces. Si $f = 1$, le graphe possède uniquement une unique face. Par conséquent, le graphe connexe ne possède aucun cycle et est un arbre. Ainsi, $n - a + f = n - (n - 1) + 1 = 2$ et la formule est vérifiée.

Supposons que la formule d'Euler satisfaite pour les valeurs inférieur à f.

Soit e une arête d'un cycle du graphe. Par définition, l'arête appartient sépare deux faces A et B. En supprimant cette arête, le nouveau graphe obtenu possède le même nombre de sommets (n), $a - 1$ arêtes. De plus ce graphe a $f - 1$ faces puisque A et B forment une seule face de ce nouveau graphe. En appliquant l' hypothèse de récurrence, on a

$$n - (a - 1) + f - 1 = 2$$

En simplifiant on obtient $n - a + f = 2$ et le graphe respecte bien la formule d'Euler.

Donc tout graphe planaire satisfait la formule d'Euler. $\square$

Question 1.2 On suppose $n \geqslant 3$. Montrer que $3f \leq 2a$.

Correction

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de faces. Notons $nb(F)$ le nombre d'arêtes qui délimitent la face F

Chaque face F est délimitée par au moins 3 arêtes.

$$nb(F) \geq 3$$

Donc $\sum_{i \in \mathcal{F}} nb(F) \geq 3 \cdot f$

Chaque arête est une frontière de deux faces et donc on peut en déduire que

$$\sum_{i \in \mathcal{F}} nb(F) = 2a$$

Donc en combinant les deux équations, on obtient $3f \leq 2a$. $\square$

Question 1.3 Montrer qu'il existe un sommet de degré au plus 5 dans le graphe planaire G.

Correction

Si G possède des sommets de degré 1, alors il existe bien un sommet de degré au plus 5 dans G.

Supposons que G ne possède pas des sommets de degré 1. Raisonnons par l'absurde et supposons que pour tout sommet v de G, $d(v) \geq 6$. On a $6n \leq 2a$ car la somme de tous les sommets est égale à 2 fois le nombre de arêtes.

En appliquant la formule d'Euler ($n - a + f = 2$), on a $f = 2 + a - n$.

$$\begin{array}{rcl} 3f & \leq & 2a \\ 3(2+a-n) & \leq & 2a \\ a & \leq & 3n-6 \\ 2a & \leq & 6n-12 \end{array}$$

Ce qui est en contradiction avec $6n \leq 2a$. Donc il existe un sommet de degré au plus 5 dans G. □

Question 1.4 Concevoir un algorithme de 6-coloration en temps polynomial.

Correction

Notons $\mathcal{D}(G)$ l'ensemble des sommets de G tel que leur degrés sont inférieurs ou égale à 5. Nous allons contruire une suite de graphes $G_1, \ldots, G_n$ de la façon suivante

1. $G_1 \leftarrow G$
2. pour i allant de 2 à n faire
   (a) calculer $\mathcal{D}(G_i)$;
   (b) extraire un sommet v_i tel que $v_i \in \mathcal{D}(G_i)$;
   (c) construire $G_{i+1} = (V_{i+1}, E_{i+1})$ tel que
   $V_{i+1} = V_i \backslash \{v_i\}$, et $E_{i+1} = E_i \backslash \{e : e$ est adjacent à v_i dans $G_i\}$.

Tout d'abord remarquons que ces graphes sont des graphes planaires (puisqu'on enlève simplement un sommet entre deux graphes G_i et G_{i-1}.)

A partir de cette suite, nous pouvons construire une coloration $c : V \rightarrow \{1, \ldots, 6\}$ de la façon suivante :

1. pour i allant de n à 1 faire
   (a) colorier v_i avec la plus petite couleur qui n'appartient aux couleurs de son voisinage dans G_i ;

Nous construisons une coloration utilisant 6 couleurs : à chaque itération i, le sommet a au plus 5 voisins et donc il peut être voisin de sommets ayant au plus 5 couleurs différentes. □

Remarque : tout graphe planaire peut être colorer avec 4 couleurs. Ce résultat est connu sous le nom de théorème des quatre couleurs. Il a été démontré en 1976 par Appel et Haken.

Exercice 2 Le problème de l'ensemble indépendant dans les graphes planaires

Le problème (de décision) de l'ensemble indépendant reste NP-complet même si les graphes sont planaires. Nous allons concevoir un algorithme calculant un ensemble indépendant de taille k pour les graphes planaires de n sommets en temps $O(6^k n)$.

Soit G un graphe planaire et k un entier. Par la question **3.3**, il existe un sommet u_0 un sommet de degré au plus 5 : on notera ces voisins $u_1, \ldots, u_d$ avec $d \leq 5$.

Question 2.1 Supposons que G possède un ensemble indépendant J de taille $k > 0$. Prouver que

1. Si J contient aucun sommet u_i avec $0 \leq i \leq d$, alors, il existe un ensemble indépendant

de taille k contentant u_0.

Correction

Soit v un sommet de J, $J\backslash\{v\} \cup \{u_0\}$ est un ensemble indépendant de taille k puisque J et $J\backslash\{v\} \cup \{u_0\}$ ne contient aucun voisin de u_0. □

2. Si J contient un sommet u_i avec $0 \leq i \leq d$, alors $J\backslash\{u_i\}$ est un ensemble indépendant de taille $k-1$ dans le graphe G_i, correspondant à G privé de tous les sommets v voisins de u_i et de leurs ses arêtes incidentes.

Correction

Il suffit de constater que

1. les sommets $J\backslash\{u_i\}$ sont uniquement des sommets qui ne sont pas voisins de u_i : ils sont des sommets de G_i
2. les sommets $J\backslash\{u_i\}$ forment un ensemble indépendant dans G_i puisque ils forment un ensemble indépendant dans G

□

Question 2.2 Supposons que G ne possède pas un ensemble indépendant J de taille $k > 1$. Soit i entier entre 0 et d, Prouver que pour le graphe G_i correspondant à G privé de tous les sommets v voisins de u_i, ne possède pas un ensemble indépendant J de taille $k-1$.

Considérons l'algorithme $\mathcal{A}(G,k)$ suivant

Entrée : un graphe planaire G et un entier k

Sortie : Vrai si et seulement si G possède un ensemble indépendant de taille k.

1. Si $k > |V(G)|$, alors renvoyer Faux.
2. Si $E(G) = \emptyset$ ou si $k = 0$, alors renvoyer Vrai.
3. Choisir un sommet u_0 de degré $d \leq 5$ avec pour voisins $u_1, \ldots, u_d$
4. Pour tout i allant de 0 à d, construire le graphe G_i tel que $V(G_i) = V(G)\backslash\Gamma_G(u_i)$ et $E(G_i) = E(G)\backslash\{e \in E : e$ a une extrémité dans $\Gamma_G(u_i)\}$
5. Renvoyer $\bigvee_{i=0}^{d} \mathcal{A}(G_i, k-1)$

Question 2.3 Exécuter cet algorithme sur une étoile à $n+1$ sommets avec $k = 7$.

Correction

Les tests des lignes 1 et 2 ne s'appliquent pas. Puis la ligne 3 sélectionne une feuille u_0 qui est une feuille. On construit deux graphes : G_0 composé de 5 sommets isolés, et G_1 vide. Ensuite, $\mathcal{A}(G_0, 6)$ $\mathcal{A}(G_1, 6)$ sont évalués à Faux tous les deux (instruction 1). Et donc $\mathcal{A}(G_0, 7) = Faux$, ce qui est correct. □

Question 2.4 Montrer que cet algorithme est correct.

Question 2.5 Donner la complexité de l'algorithme.

Correction

La construction de chaque graphe G_i nécessite $O(n+m)$ opérations. Au total, la construction de tous les graphes nécessite $O(5n+5m) = O(5^2n)$ opérations. Soit a_k le nombre maximum de fois que l'on exécute l'instruction "construction des graphes G_i". On

a h
$$\begin{gathered}a_1 = 1 = (6^0)\\ a_k \leq 1 + (6)a_{k-1}\\ a_2 \leq 1 + (6)a_1\\ a_3 \leq 1 + (6)a_2 \leq 1 + (6)^1 + (6)^2\end{gathered}$$
Par récurrence

$$a_k \leq (6^0) + 6^1 + 6^2 + 6^{k-1} < \frac{6^k - 1}{5} < \frac{6^k}{5}$$

$$a_k < \frac{6^k}{5}$$

Donc la complexité totale est $O(a_k 5^2 n)$ soit $O(6^k 5n) = O(6^k n)$. □