Auteur : Johanne Cohen

graphe planaire

https://www.lri.fr/~jcohen/documents/enseignement/td-planaire.pdf

Exercice 1 Le problème du coloriage de graphe planaires

Un graphe est *planaire* si on peut le dessiner dans le plan sans que les arêtes ne se croisent. Soit $G = (V, E)$ un graphe planaire non vide *connexe*. Notons $n = |V|$, $a = |E|$.

Considérons un dessin de G dans le plan (sans que les arêtes ne se croisent). Soit f le nombre de régions du plan délimitées par les arêtes de G.

Question 1.1 Montrer que les graphes planaires respectent la relation d'Euler $n - a + f = 2$. (*Indication : raisonner par récurrence sur le nombre de faces*)

Question 1.2 On suppose $n \geqslant 3$. Montrer que $3f \leq 2a$.

Question 1.3 Montrer qu'il existe un sommet de degré au plus 5 dans le graphe planaire G.

Question 1.4 Concevoir un algorithme de 6-coloration en temps polynomial.

Remarque : tout graphe planaire peut être colorer avec 4 couleurs. Ce résultat est connu sous le nom de théorème des quatre couleurs. Il a été démontré en 1976 par Appel et Haken.

Exercice 2 Le problème de l'ensemble indépendant dans les graphes planaires

Le problème (de décision) de l'ensemble indépendant reste NP-complet même si les graphes sont planaires. Nous allons concevoir un algorithme calculant un ensemble indépendant de taille k pour les graphes planaires de n sommets en temps $O(6^k n)$.

Soit G un graphe planaire et k un entier. Par la question **3.3**, il existe un sommet u_0 un sommet de degré au plus 5 : on notera ces voisins $u_1, \ldots, u_d$ avec $d \leq 5$.

Question 2.1 Supposons que G possède un ensemble indépendant J de taille $k > 0$. Prouver que

1. Si J contient aucun sommet u_i avec $0 \leq i \leq d$, alors, il existe un ensemble indépendant de taille k contentant u_0.
2. Si J contient un sommet u_i avec $0 \leq i \leq d$, alors $J \backslash \{u_i\}$ est un ensemble indépendant de taille $k-1$ dans le graphe G_i, correspondant à G privé de tous les sommets v voisins de u_i et de leurs ses arêtes incidentes.

Question 2.2 Supposons que G ne possède pas un ensemble indépendant J de taille $k > 1$. Soit i entier entre 0 et d, Prouver que pour le graphe G_i correspondant à G privé de tous les sommets v voisins de u_i, ne possède pas un ensemble indépendant J de taille $k - 1$.

Considérons l'algorithme $\mathcal{A}(G, k)$ suivant

Entrée : un graphe planaire G et un entier k

Sortie : Vrai si et seulement si G possède un ensemble indépendant de taille k.

1. Si $k > |V(G)|$, alors renvoyer Faux.
2. Si $E(G) = \emptyset$ ou si $k = 0$, alors renvoyer Vrai.
3. Choisir un sommet u_0 de degré $d \leq 5$ avec pour voisins $u_1, \ldots, u_d$
4. Pour tout i allant de 0 à d, construire le graphe G_i tel que $V(G_i) = V(G) \backslash \Gamma_G(u_i)$ et $E(G_i) = E(G) \backslash \{e \in E : e$ a une extrémité dans $\Gamma_G(u_i)\}$
5. Renvoyer $\bigvee_{i=0}^{d} \mathcal{A}(G_i, k-1)$

Question 2.3 Exécuter cet algorithme sur une étoile à $n + 1$ sommets avec $k = 7$.

Question 2.4 Montrer que cet algorithme est correct.

Question 2.5 Donner la complexité de l'algorithme.