Auteur : Johanne Cohen

Exercices sur les probabilités

https://www.lri.fr/~jcohen/documents/enseignement/td-proba.pdf

Pour s'entrainer.

Exercice 1 Considérons $H(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$. Montrer que $\forall n \geq 1, ln(n) + 1 \geq H(n) \geq ln(n) + 1$

Exercice 2 On se donne trois pièces dont une et une seule est biaisée de telle sorte que $Pr(Face) = 2/3$. On lance les pièces et on obtient Face Face Pile. Quelle est la probabilité que la première pièce soit la pièce biaisée ?

Exercice 3 Considérons un module de détection de spam de courrier électronique.

- Le module réussit à identifier les courriers indésirables dans 99% des cas.
- Son taux de faux positifs est toutefois de 2% . C'est à dire le module annonce qu'un message est indésirable alors qu'il ne l'est pas.

Les statistiques officielles indiquent que 10% du courriers électroniques recçus est indésirable.

Quelle est la probabilité qu'un message soit effectivement indésirable lorsque le module indique que c'est le cas ?

Exercice 4 Montrer que la loi géométrique est sans mémoire : soit Z une variable aléatoire Z de loi géométrique de paramètres n et p. Alors pour tous $k \geq 0$ et $n \geq 1$,

$$Pr(X = n + k | X > k) = P(X = n)$$

Exercice 5 Soient X et Y des variables aléatoires réelles d'espérance finie et a et b des réels. Alors montrer que $E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$.

Exercice 6 Calculer l'espérance

- de variable aléatoire Y de loi de Bernoulli de paramètre p.
- de variable aléatoire X de loi binomiale de paramètres n et p.
- de variable aléatoire Z de loi géométrique de paramètres n et p.

Problème MAX_SAT.

Problème : F formule en forme normale conjonctive (CNF) (par exemple, $F = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4) \dots)$.

Problème : quel est le nombre maximal de clauses satisfiables ?

Le problème de décision accocié est NP-complet.

Notons $x_1, \dots, x_n$ les variables de la formule F. Considérons l'algorithme suivant :

1. chaque variable prend x_i la valeur vrai ou faux suivant la loi de Bernouilli de paramètre de manière indépendante

Exercice 7 Notons k_j le nombre de littéraux de la j-ème clause. Calculer l'espérence de l'évènement E_j ≪ *la j-ème clause est satisfaite* ≫

Exercice 8 Notons $k = min_{j=1}^{m} k_j$. Considérons la variable aléatoire Y correspondant au nombre de clause satisfaites. Montrer que $E[Y] \geq m(1 - 2^{-k})$.

Exercice 9 Soit OPT la solution optimale et notons $|OPT|$ le nombre de clauses satisfaites par OPT Montrer que $E[Y] \geq 1/2|OPT|$

Remarque : Cet algorithme probabilite est un algorithme d'approximation de rapport 1/2.

Problème de la coupe minimun.

Une coupure d'un graphe est un ensemble d'arêtes telles que les enlever coupe le graphe en deux ou plus composantes connexes. Étant donné un graphe $G = (V, E)$, le problème de la coupure **minimale** consiste à déterminer une coupure de cardinalité minimale du graphe.

Algorithme randomisé On opère $n - 2$ itérations, où n est le nombre de sommets. A chaque itération, on choisit aléatoirement selon une loi uniforme une arête $\{u, v\}$ du graphe, et on la contracte :

- c'est-à-dire, on fusionne u et v en un unique sommet, on élimine toutes les arêtes entre u et v et on garde toutes les autres arêtes.
- Le nouveau graphe obtenu peut avoir des multi-arêtes (plusieurs arêtes entre deux mêmes sommets) mais pas de boucle.

Enfin, les arêtes restantes sont retournées.

Exercice 10 Soit G un graphe à n sommets et $\mathcal{C}$ une coupe minimale de G. Montrer que si $\mathcal{C}$ est de cardinalité k, alors G a au moins $\frac{kn}{2}$ arêtes.

Exercice 11 Montrer que une coupe $\mathcal{C}$ sera retournée par notre algorithme si et seulement si aucune des arêtes de $\mathcal{C}$ n'est sélectionée pour être contractée.

Soit $\mathcal{C}$ une coupure minimale de taille k. Notons

- E_i l'événement que l'arête contractée à l'itération i n'est pas dans C.
- $F_i = \bigcap_{j=1}^{i} E_j$ l'événement qu'**aucune** arête de C **n'**a été contractée pendant les premières i itérations.

Exercice 12 Montrer que $\Pr(E_1) = \Pr(F_1) \geq 1 - \frac{2}{n}$.

Exercice 13 Montrer que que $\Pr(E_2|F_1) \geq 1 - \frac{2}{n-1}$.

Exercice 14 Montrer que $\Pr(E_i|F_{i-1}) \geq 1 - \frac{2}{n-i+1}$ et que $\Pr(F_{n-2}) \geq \frac{2}{n(n-1)}$.

Exercice 15 En déduire que l'algorithme produit une coupure minimale avec probabilité au moins $\frac{2}{n(n-1)}$.

Exercice 16 Supposons que l'on exécute l'algorithme $n(n-1)\log n$ **fois**, et que l'on produise en sortie la plus petite coupure trouvée dans toutes les itérations. Borner la probabilité que l'on ne produise pas une coupure minimale. *Indication : $1 - x \leq e^{-x}$ pour $0 \leq x \leq 1$.*