ORSAY
<u>*N° D'ORDRE :*</u> 5565

THÈSE

présentée devant

L'Université de Paris-Sud

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
SPÉCIALITÉ : INFORMATIQUE

par JOHANNE COHEN

COMMUNICATIONS MULTIPOINTS DANS LE MODÈLE COMMUTÉ.

Soutenue le 14 décembre 1998

Après avis de :

FRIEDHELM	MEYER AUF DER HEIDE (Univ. de Paderborn, Allemagne)
CLAUDINE	PEYRAT (Univ. de Nice, Sophia-Antipolis)

Devant la commission d'examen formée de

PIERRE	FRAIGNIAUD (Univ. Paris-Sud, Directeur de thèse)
MARIE-CLAUDE	GAUDEL (Univ. Paris-Sud, Présidente du Jury)
MICHEL	HABIB (Univ. de Montpellier II)
ANDRZEJ	PELC (Univ. du Quebec à Hull, Canada)
DAVID	PELEG (Weizmann Institute, Israël)
CLAUDINE	PEYRAT (Univ. de Nice, Sophia-Antipolis)

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier la D.R.E.T, maintenant appelé D.G.A/D.S.P qui m'a financé ma thèse. Grâce à elle, j'ai pu réaliser cette thèse dans de bonnes conditions. Je remercie l'aide que m'a apporté le projet M.A.D.P.O.M du programme Télécommunication du CNRS.

Les professeurs Claudine Peyrat et Friedhelm Meyer Auf Der Heide ont accepté de rapporter ma thèse. Je remercie particulièrement Friedhelm Meyer Auf Der Heide qui a lu une thèse dans une langue qui n'est pas la sienne et Claudine Peyrat pour l'acuité de ses remarques.

Je remercie vivement le Professeur Marie-Claude Gaudel qui m'a fait l'honneur de présider mon jury.

Je remercie Michel Habib, Andrzej Pelc et David Peleg pour leurs participations au jury, pour leurs questions et pour l'intérêt qu'ils ont apporté à cette thèse.

Je suis très reconnaissante à Pierre Fraigniaud, mon directeur de thèse. Durant ces années de thèse, j'ai apprécié de travailler avec lui. Je le remercie de m'avoir aidé par ses remarques, par sa bonne humeur, et pour avoir assisté aux innombrables répétitions de tous mes exposés.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance aux deux laboratoires qui m'ont accueillis durant mes années de thèses : Le L.I.P et le L.R.I, notamment l'équipe Grafcomm qui a su m'intégrée très rapidement. Plus particulièrement, aux secrétaires et aux services techniques qui ont été patients avec moi.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont partagé mon bureau : les Pascals, Sandrine et Blaise, Houssef et Mario, Slim et Éric.

Ce manuscrit est aussi l'occasion de remercier les personnes qui m'ont aidé chacun à leur manière : ma famille, Olivier, Thierry, Nadia, les catalans (Lali, Montserrat, Margarita), Les Dominiques, Maryvonne, Eric, Cyril, Vivi, et les personnes participant à RUMEUR (ancien PRC PRS), et à TAROT (thème transversal du GdR CNRS ARP).

Table des matières

Introduction

On assiste actuellement à un développement spectaculaire des réseaux de communications, en particulier des réseaux informatiques. Ces réseaux informatiques sont d'une grande diversité. Ils peuvent être de petite taille (Local Area Network ou LAN) ou de très grande taille (Wide Area Network ou WAN) dont l'exemple le plus à la mode est Internet. Ils peuvent aussi bien interconnecter des processeurs dans des machines massivement parallèles (MMP), que des ordinateurs dans des réseaux de stations de travail (Networks of Workstations ou NOW). Vu l'augmentation de leur utilisation, il est primordial de savoir gérer efficacement les mouvements de données dans les réseaux.

Les réseaux de communications sont de plus en plus utilisés pour réaliser des communications de groupes, c'est-à-dire pour réaliser un ensemble de communications impliquant un groupe de processeurs ou d'ordinateurs. Voir par exemple le développement des systèmes vidéo, des visioconférences, des accès à des bases de données distribuées ou, l'utilisation croissante de l'informatique parallèle et distribuée. Les communications de groupes les plus utilisées sont les diffusions (une source doit envoyer un message vers un ensemble de destinations) ou les échanges totaux (un ensemble de nœuds du réseau doivent échanger leurs informations).

Il existe deux grandes approches pour étudier ce type de communications dans les réseaux. La première approche consiste à supposer la topologie du réseau fixée. C'est l'approche la plus répandue et la plus étudiée dans la littérature. Dans ce cadre, de nombreux protocoles ont été proposés et il existe même des bibliothèques de communications sous PVM ou MPI qui permettent de résoudre efficacement la plupart des communications à effectuer sur une machine parallèle. Le défaut majeur de cette approche est le fait que les réseaux WAN ne sont pas en pratique structurés ou, qu'ils le sont très peu comme les réseaux métropolitains ou, les réseaux de stations de travail.

Une deuxième approche consiste à étudier les communications sur un réseau arbitraire. Cette thèse s'inscrit dans cette deuxième approche. L'inconvénient de cette approche est que la détermination de protocoles de diffusions optimaux mène souvent à des problèmes NP-complets. Pour palier à ce fait, les protocoles usuels déterminent un arbre couvrant du réseau, et utilisent cet arbre pour faire transiter les communications. C'est le cas de CBT (Core Based Tree) et PIM (Protocol Internet Multicast).

Cette thèse présente une étude de l'optimisation des communications de groupes soit dans les réseaux quelconques lorsque le modèle induit un problème polynomial, soit dans les arbres lorsque le modèle induit un problème NP-complet. Nous étudions l'optimalité des protocoles suivant différents critères. Ces critères correspondent à des hypothèses sur les propriétés des nœuds du réseau ou, sur la façon dont sont acheminés les messages.

Dans le chapitre 1, nous présentons le contexte de notre étude. Nous introduisons tout d'abord notre modélisation des réseaux. Nous présentons les contraintes dans lesquelles nous nous placerons, c'est-à-dire les modes de commutation, les fonctions de routage et les fonctionnalités des nœuds (mode 1-port/Δ-port). Nous précisons également les communications de groupes (parfois aussi appelées communications structurées) étudiées dans ce document. Enfin, nous discutons les résultats connus dans la littérature et relatifs à notre contexte. En deux mots, nous nous placerons dans le modèle commuté, c'est-à-dire nous supposerons que les nœuds peuvent effectuer des communications longues distances (comme la commutation de circuit), la contrainte principale étant que deux chemins correspondant à deux appels simultanés doivent être arête-disjoints. Nous distinguons le mode 1-port (un nœud ne peut émettre ou recevoir qu'un appel à un instant donné) du mode Δ-port (un nœud peut émettre et/ou recevoir sur tous ses liens simultanément).

Le chapitre 2 est consacré à l'étude de la diffusion partielle en mode 1-port. Nous proposons un protocole de diffusion optimal en nombre de phases. Ce protocole s'applique dans des réseaux utilisant des fonctions de routages minimales, et minimise la bande passante à chaque phase. Nous prouvons que la minimisation d'autres paramètres, comme la charge des routeurs et le délai ou, la bande passante globale, mènent à des problèmes NP-complets. Nous présentons cependant un encadrement fin de la bande passante globale pour les arbres.

Le chapitre 3 présente une étude de l'échange total en mode 1-port sur une classe particulière de réseaux, les anneaux à cordes. Ce travail est au départ motivé par l'étude d'une conjecture sur la relation entre l'arête-bissection et le temps d'échange total. Nous proposons un protocole d'échange total sur les anneaux à cordes nous permettant de discuter cette conjecture.

Le chapitre 4 est encore une étude de la diffusion partielle en mode 1-port mais dans les réseaux orientés. Nous prouvons que la diffusion partielle sous ces hypothèses est NP-complète, contrairement au cas non-orienté. Nous nous sommes donc restreints aux arbres. Nous présentons un protocole de diffusion dans une sous-classe d'arbres : les étoiles généralisées. Cette recherche est un premier pas vers la détermination de protocoles pour les arbres, ce problème se révélant plus complexe que dans le cas non-orienté.

Le chapitre 5 se concentre sur la diffusion et l'échange total en mode Δ-port. Ce chapitre se divise en deux parties. La première partie prouve la NP-complétude de ces problèmes. La seconde partie se restreint donc aux arbres et présente des protocoles de diffusion et d'échange total optimaux en nombre de phases pour les arbres.

Le chapitre 6 enfin se consacre à la diffusion partielle sur les grilles en mode Δ-port et lorsque les routeurs possèdent la propriété de copie-retransmission. Sous ces hypothèses, nous présentons un protocole de diffusion optimal en terme de latence, et un protocole de diffusion optimal en terme de bande passante. Nous généralisons ensuite ces protocoles aux graphes Hamiltoniens.

Il ressort de ces différents travaux que, pour la plupart des topologies, déterminer un protocole de communication de groupe optimal sous les hypothèses de cette thèse est un problème NP-complet. En revanche, le problème est polynomial lorsque l'on se restreint aux arbres. Ce document se conclut donc par une discussion sur les développements envisageables.

CHAPITRE 1

Contexte de l'étude et état de l'art.

Ce premier chapitre a pour vocation de définir les notions utilisées dans ce manuscrit tout en récapitulant les principaux résultats de la littérature. Tout d'abord, nous modéliserons les réseaux et leurs paramètres principaux tels que les fonctions de routage et les modes de commutations. Nous précisons ensuite le cadre de notre étude en présentant les différents types de communications structurées étudiés, et sous quels modes de commutations. Finalement, la dernière partie de ce chapitre récapitule les résultats importants dans ce domaine afin de situer le travail de recherche que nous avons effectué.

1.1 Communications points-à-points

Nous considérons des réseaux constitués de nœuds qui possèdent chacun son propre séquenceur, son propre mémoire locale et, éventuellement, d'autres périphériques. Tous les nœuds ne sont pas nécessairement supposés identiques. Les nœuds du réseau sont connectés par des liens de communications grâce auxquels ils communiquent entre-eux par échange de messages. Cette modélisation se rapporte aussi bien à des machines à mémoire distribuée de type $MIMD$ qu'à des réseaux de stations de travail.

Un tel réseau se modélise par un graphe $G = (V, E)$ où V est l'ensemble des sommets et E est l'ensemble des arêtes ou des arcs selon que le graphe est orienté ou non. Chaque sommet du graphe correspond à un nœud du réseau. Chaque arête correspond à un lien de communication bidirectionnel et chaque arc correspond à un lien de communication unidirectionnel.

Si l'on veut faire communiquer deux nœuds du réseau, alors deux problèmes apparaissent immédiatement : quel itinéraire doit emprunter l'information (routage) ? De quelle façon doit transiter l'information le long de cet itinéraire (commutation) ? Le premier problème est résolu par le choix d'une *fonction de routage*. Le deuxième problème est résolu par le choix d'un *mode de commutations*. Nous formalisons ces notions dans les sections qui suivent.

1.1.1 Fonctions de routage

Tous les nœuds possèdent par hypothèse une composante appelée *routeur* . Ces routeurs ont pour fonction de transmettre les messages vers leur destination. La façon dont ils gèrent les messages est définie par une *fonction de routage*. Cette dernière se modélise dans ce document comme une fonction $R : V \times V \to E$ qui détermine le lien de sortie à utiliser en fonction du nœud courant et de la destination du message : un message à destination de y et actuellement sur le nœud x, est transmis par le routeur de x suivant l'arête $R(x, y)$ incidente à x. Nous rappelons les deux notions suivantes qui seront utilisées dans le reste du manuscrit.

- Une fonction de routage R est dite *adaptative* si elle propose plusieurs liens de sorties pour acheminer un message donné vers une destination donnée. Dans ce cas, la fonction se modélise par $R : V \times V \to \mathcal{P}(E)$ au lieu de $R : V \times V \to E$. Il est alors nécessaire d'avoir recours à une fonction de sélection pour choisir le lien à utiliser parmi les liens proposés.

- Une fonction de routage est dite *minimale* si, pour toute paire source/destination, tout chemin généré par la fonction de routage pour relier la source à la destination suit un plus court chemin entre la source et la destination. Le routage XY dans une grille est un exemple de routage minimal.

1.1.2 Modes de commutations

Nous présentons maintenant les différents modes de commutations possibles pour faire transiter les messages. On distingue principalement les modes suivants :

- La *commutation de messages* [61] (ou "Store and Forward") : chaque message est accompagné d'une entête. Il progresse de nœuds en nœuds dans le réseau jusqu'à sa destination finale. Chaque nœud intermédiaire stocke entièrement le message avant de le retransmettre (aucun canal n'est réservé).

- La *commutation de circuits* [61] : cette technique est semblable à celle utilisée dans les réseaux téléphoniques. Tout d'abord, un chemin est établi et réservé entre la source et la destination par propagation de l'entête du message contenant l'adresse de destination. Après l'établissement du circuit de connexion, les informations transitent le long de ce dernier. Le circuit est ensuite libéré (détruit) à la fin de la communication. Si d'autres messages veulent utiliser une partie de ce circuit avant la fin de la communication, ils doivent attendre la libération de cette ressource.

- Le *routage wormhole* [18, 54] diffère principalement de la commutation de circuits, pour ce qui concerne notre étude, par la façon dont les messages sont transmis le long du chemin entre la source et la destination. Dans le routage wormhole, un message est décomposé en petites unités appelées *flits*. Le premier flit joue le rôle de l'entête, et réserve un chemin de connexions entre la source et la destination. Les flits restant suivent comme dans un pipeline à la queue leu leu. Le dernier flit libère les connexions établies par l'entête. Le routage wormhole ne nécessite pas la réservation d'un chemin entier entre la source et la destination, et utilise un nombre de liens proportionnel à la longueur du message. Comme pour la commutation de circuits, les ressources acquises par l'entête (c'est-à-dire les liens) sont l'exclusivité du message correspondant.

Notre étude portera principalement sur le mode commutation de ciruits et ses extensions (wormhole, ATM [33, 41], WDM [12]).

1.1.3 Mesure du temps de communication

Dans cette thèse, nous supposerons que le temps physique T nécessaire pour réaliser une communication entre un nœud source x et un nœud destination y dépend d'un temps d'initialisation β, d'un temps de propagation τ, et du temps de commutation δ des routeurs. Il se modélise classiquement par la formule

$$T = \beta + L\tau + \delta d(x, y) \tag{1.1}$$

où L correspond à la taille du message, et $d(x, y)$ à la longueur du chemin dans le graphe.

Le choix du mode de commutations utilisé peut avoir pour conséquence de rendre certaines des constantes prépondérantes ou négligeables. Par exemple, dans le mode commutation de circuit, le temps de commutation du routeur est négligeable. En fait, le paramètre β prédomine souvent si L n'est pas trop grand. Dans la suite nous nous focaliserons principalement sur ce paramètre, c'est-à-dire nous compterons le nombre de phases des protocoles.

1.2 Communications structurées

Les réseaux de communications sont utilisés pour des communications points-à-points, mais aussi pour réaliser certains types de communications haut-niveaux entre groupes de processeurs. Parmi ces communications globales figurent les opérations suivantes :

– La *diffusion* à partir d'un nœud initiateur u est l'opération qui consiste à envoyer un même message à partir de u vers tous les autres nœuds du réseau.

– La *diffusion partielle* est le problème plus général qui consiste à envoyer un même message à partir d'une source u vers un groupe de nœuds du réseau. La diffusion partielle est souvent identifiée sous la terminologie anglo-saxonne “multicast”.

– L'*échange total* est l'opération où tous les nœuds du réseau effectuent simultanément une diffusion.

Nous étudierons ces communications structurées en utilisant différentes hypothèses et suivant différentes mesures de complexité. Évidemment, il existe bien d'autres communications structurées comme par exemple la distribution et la multi-distribution. Mais, sauf pour des cas spécifiques, nous ne les aborderons pas dans ce document.

Nous allons donner ici les définitions utilisées tout au long du manuscrit. Un *appel* est une communication entre un nœud source x et un nœud destination y. On notera $\{x \rightarrow y\}$ un appel de x vers y. L'appel peut être orienté ou non. En terme de graphes, un appel de x vers y est un chemin dans le graphe reliant x à y. Ce chemin est construit par la fonction de routage du réseau. Une *phase* de communication est un ensemble d'appels exécutés simultanément.

On appelle *protocole* une suite des phases de communications qui a pour effet de réaliser une communication structurée donnée. Dans toute cette thèse, nous ne considérons que les protocoles qui se réalisent en un nombre fini de phases.

Nous étudierons les communications structurées en fonction de différentes contraintes :

- *Mode* 1-*port* : durant chaque phase, tout nœud est la source ou la destination d'au plus un appel (ceci n'exclue pas que le nœud puisse être traversé par un ou plusieurs appels en tant que nœud intermédiaire).

- *Mode* Δ-*port* : durant chaque phase, tout nœud peut être la source ou la destination d'un ou plusieurs appels (Le symbole Δ fait référence au degré maximum d'un graphe).

- *Modèle voisins-à-voisins* [46] : tout appel s'effectue nécessairement entre deux sommets voisins dans le graphe. Dans la littérature, ce mode est appelé *modèle téléphone* si les voisins impliqués dans un appel peuvent échanger simultanément leurs informations (appels bidirectionnels), et *modèle télégraphe* si les communications sont monodirectionnelles.

- *Modèle commuté* [24] : les nœuds source et destination des appels ne sont pas nécessairement des nœuds voisins dans le graphe, mais, dans une même phase, les chemins des appels sont deux-à-deux arête-disjoints. Dans la littérature, il existe plusieurs variantes de ce mode commuté. L'une, appelée *modèle commuté sommet-disjoints* [39], impose qu'à chaque phase, les appels aient leurs chemins deux-à-deux sommet-disjoints. Le modèle commuté a pour but de modéliser les modes commutation de circuits et le mode wormhole.

Le principal objectif de cette thèse est de déterminer des bornes supérieures sur le nombre de phases nécessaires à la réalisation d'une communication structurée dans le modèle commuté dans un réseau quelconque. Nous comparerons les protocoles en fonction de leur complexité mesurée en nombre de phases. Lorsque deux protocoles possèdent le même nombre de phases, nous les comparerons suivant d'autres paramètres comme par exemple :

- le nombre de liens (arêtes) utilisés,

- la longueur des appels dans chaque phase,

- la charge des routeurs (c'est-à-dire le nombre d'appels traversant un même sommet dans chaque phase),

- le nombre total de routeurs utilisés dans chaque phase.

Cette thèse présente en particulier des protocoles de diffusion, de diffusion partielle et d'échange total dans le modèle commuté sous les contraintes 1-port et Δ-port. Nous trouvons dans la littérature de nombreux travaux relatifs à ces problèmes, mais ils proposent en général, des protocoles adaptés à des topologies fixées. Notre travail ne suppose pas la topologie fixée en se basant sur le fait que la plupart des réseaux d'ordinateurs n'ont pas, contrairement aux réseaux de processeurs, de topologies régulières. Nous nous sommes d'abord focalisés sur les réseaux arbitraires, puis nous nous sommes intéressés plus spécifiquement aux arbres. L'intérêt de l'étude des arbres provient du fait que tout graphe possède un arbre de recouvrement et dont savoir bien diffuser sur un arbre permet de définir des protocoles performants pour les réseaux arbitraires.

Dans la suite, nous noterons $b_1(G,u)$ le nombre de phases nécessaires pour effectuer la diffusion à partir de u dans G dans le modèle commuté en mode 1-port. De même, nous noterons $b_\Delta(G,u)$ le même paramètre dans le mode Δ-port. Il en sera de même pour l'échange total avec les notations correspondantes : $g_1(G)$ et $g_\Delta(G)$. Le reste du chapitre est consacré à un survol de la littérature consacrée aux communications structurées dans le modèle commuté. Nous distinguons les cas 1-port et Δ-port.

1.3 Communications structurées en mode 1-port

Un petit mot sur le modèle téléphone. De nombreuses études montrent que les problèmes de décision correspondant à la diffusion et à l'échange total sont NP-complets [32, 59] dans ce modèle. Confrontées à ce résultat, certaines études se sont consacrées à des classes particulières de topologies (voir [26, 34, 36]), tandis que d'autres ont cherché à mettre en évidence des heuristiques. Pour les topologies arbitraires, de ces différents travaux peuvent être extraits quelques résultats principaux. Kortsarz et Peleg [47] ont proposé une heuristique qui permet de trouver un protocole de diffusion de complexité (en nombre de phases) optimal à un facteur additif $O(\sqrt{n})$ près. Ravi [57] a ensuite proposé une méthode pour obtenir un protocole de diffusion dont le nombre de phases est de $O(\frac{\log^2 n}{\log\log n}\, b_1(G,u))$. Ces deux heuristiques se complètent. En effet, la première heuristique est performante lorsque le diamètre du graphe est grand, à l'opposé de la seconde, et inversement lorsque le diamètre est faible. Plus récemment, Bar-Noy et al [3] ont prouvé en utilisant la programmation linéaire qu'il existait un protocole de diffusion dont le nombre de phases est de $O(\log n\; b_1(G,u))$, et que le nombre de phases de ce protocole pouvait se calculer en temps polynomial. Ceci améliore considérablement le résultat de Ravi, cependant ce résultat n'est pas constructif. Passons maintenant au modèle commuté en distinguant les modes 1-port et Δ-port.

1.3.1 Diffusion dans le modèle commuté

Le théorème ci-dessous est la généralisation au modèle commuté du résultat classique du mode téléphone.

Théorème 1.1 *Dans le mode 1-port, pour tout réseau G de n nœuds, et pour tout nœud de u du graphe G, la diffusion à partir de u ne peut pas s'effectuer en moins de $\lceil \log_2 n \rceil$ phases.*

Ceci vient du fait qu'à chaque phase, un processeur ne peut informer qu'un unique nœud ne connaissant pas l'information. Ainsi, chaque phase permet au mieux de doubler le nombre de nœuds connaissant l'information diffusée. Le raisonnement utilise uniquement la contrainte 1-port et le résultat est valide aussi bien dans le modèle commuté qu'en mode téléphone. Tout en définissant le modèle commuté, Farley a donné un théorème important relatif à la diffusion :

Théorème 1.2 (Farley [24]) *Dans le modèle commuté 1-port, pour tout réseau G de n nœuds et pour tout nœud u de G, la diffusion à partir de u peut s'effectuer optimalement en*

$\lceil \log_2 n \rceil$ *phases.*

Plusieurs preuves de ce théorème existent dans la littérature [24, 42, 49]. Elles se basent toutes sur la construction d'un protocole de diffusion. À partir d'un arbre de recouvrement, Farley construit un protocole de diffusion où tous les appels utilisent uniquement les arêtes de cet arbre. La preuve donnée par Laforest [49] est développée ci-dessous.

Preuve. Considérons un arbre de recouvrement T du graphe G enraciné en u. Pour toute arête $e = \{x, y\} \in E$ de T, sa suppression décompose T en deux sous-arbres T_x et T_y. Soit U un ensemble quelconque de sommets. Une arête e est dite *paire relativement à* U si les deux sous-arbres obtenus après sa suppression, contiennent un nombre pair de sommets de U. Sinon, elle est dite *impaire relativement à* U. Tout d'abord, nous allons montrer comment, à partir d'un sous-ensemble de sommets U, construire $\lfloor U/2 \rfloor$ appels arête-disjoints dont chaque appel a pour extrémité des sommets de U et tel que chaque sommet de U participe à au plus un appel.

Supposons que la cardinalité de U soit paire. Pour toute arête e paire relativement à U, les deux sous-arbres T_x et T_y obtenus après sa suppression, contiennent un nombre pair de sommets de U. Nous observons que cette arête n'est traversée par aucun appel car tout sommet de T_x (resp. T_y) appartenant à U réalise un appel avec un sommet de T_x (resp. T_y). Aussi, nous pouvons constater que les arêtes impaires relativement à U sont nécessairement traversées par un appel. Supprimons toutes les arêtes paires de T relativement à U. Ces suppressions divisent l'arbre T en un ou plusieurs sous-arbres. Soit T_i un arbre ainsi obtenu, et soit U_i les sommets de $T_i \cap U$. Il est facile d'observer que l'arbre T_i possède les propriétés suivantes :

1. toutes les arêtes de T_i sont impaires relativement à U_i,
2. T_i contient un nombre pair de sommets de U,
3. chaque feuille de T_i est un élément de U_i,
4. le degré dans T_i de tout sommet interne x est impair si et seulement si x est dans U_i.

Nous allons construire des appels impliquant uniquement les sommets de U à partir de la décomposition de T après la suppression de toutes les arêtes paires. Nous définissons d'abord un appel entre deux feuilles ℓ et ℓ' d'un sous-arbre T_i de T. Cet appel est l'unique chemin de T_i les reliant. On supprime alors de nouveau les arêtes utilisées par l'appel reliant ℓ et ℓ'. En supprimant ces arêtes, on obtient une décomposition de T en une forêt d'arbres satisfaisant les quatre propriétés précédentes. On réitère ce processus de construction d'appels jusqu'à ce que la décomposition de T se réduise en des sommets isolés. Ainsi, sont construits les $U/2$ appels dont les extrémités sont les sommets de U.

Si la cardinalité de U est impaire, alors on se ramène au cas précédent en enlevant arbitrairement un sommet de U.

Nous construisons maintenant le protocole de diffusion. Celui-ci est construit dans le sens inverse en commençant par la dernière phase. Pour ceci, nous construisons une suite d'ensembles de sommets dits *actifs*, notés D_i, $i = 0, \ldots, \lceil \log_2 n \rceil$. Un sommet est actif à la phase t s'il connaît l'information à diffuser à ce moment. Après la dernière phase, tous les sommets sont actifs et donc $D_{\lceil \log_2 n \rceil} = V$. Avant la première phase, seul le sommet u est actif et donc $D_0 = \{u\}$. À partir de l'ensemble D_{i+1}, on construit l'ensemble D_i. On construit comme précédemment les $\left\lceil \frac{D_{i+1}}{2} \right\rceil$ appels et, pour chaque appel, on choisit arbitrairement une de ses extrémités pour construire D_i. Deux cas particuliers sont toutefois à signaler : d'une part, on choisit toujours u pour appartenir D_i et, d'autre part, si D_{i+1} est de cardinalité impaire, alors le sommet qui ne participe pas à un appel dans D_{i+1} est aussi choisi de façon à appartenir à D_i. □

Dans le chapitre 2, nous proposons une nouvelle preuve de ce résultat afin d'améliorer les caractéristiques des chemins. Notons qu'en modifiant légèrement la preuve du théorème 1.2, ce résultat peut s'étendre à la diffusion partielle.

Le théorème de Farley répond au problème de la recherche d'un protocole de diffusion minimisant le nombre de phases dans le modèle commuté, sous la contrainte 1-port. Il est cependant possible de classer les protocoles de diffusion optimaux en fonction du nombre total de liens utilisés. La construction de Farley donne un protocole de diffusion utilisant au plus $(n-1)\lceil \log_2 n \rceil$ liens. Ceci est une borne supérieure sur le nombre de liens utilisés pour réaliser optimalement une diffusion mais plusieurs études ont été récemment menées pour minimiser ce paramètre. Kane et Peters [43] ont en particulier donné explicitement un protocole minimisant à la fois le nombre de phases et le nombre de liens utilisés au total pour les cycles de 2^k sommets. Dans un cadre plus général, ils ont affiné la borne supérieure de Farley pour un cycle quelconque. Plus récemment, Farley et Fujita [29] ont proposé un protocole optimal en nombre de phases et de liens utilisés quelque soit l'initiateur de la diffusion dans un chemin quelconque. En fait, ce genre de problème est très similaire au problème de plongement d'un graphe dans un autre [53].

Dans ce document, nous proposons des protocoles de diffusions qui minimisent *à chaque phase* le nombre de liens utilisés. Nous avons également montré que le problème de trouver un protocole minimisant simultanément le nombre de phases et le nombre de liens utilisés au total est NP-complet. Nous avons cependant construit des protocoles qui minimisent ces deux paramètres à la fois dans les arbres.

Le fait d'ajouter la contrainte que les appels soient sommet-disjoints a pour conséquence de rendre NP-complets les problèmes de recherche d'un protocole minimisant le nombre de phases. Kortsarz et Peleg [47] ont cependant donné une heuristique qui permet de trouver un protocole de diffusion de complexité optimal en nombre de phases à un facteur multiplicatif $O(\frac{\log n}{\log \log n})$ près.

1.3.2 Échange total

En général, pour démontrer que le problème de l'échange total est NP-complet dans un modèle donné, on tente de faire une réduction via le problème de la diffusion dans le même modèle. Ceci est le cas pour l'échange total dans le modèle téléphone [59]. Malheureusement, dans le modèle commuté, le problème de la diffusion est polynomial et ce type de raisonnement ne peut donc pas s'appliquer. À notre connaissance, le problème de la NP-complétude de l'échange total dans le modèle commuté est un problème ouvert. Nous conjecturons que ce

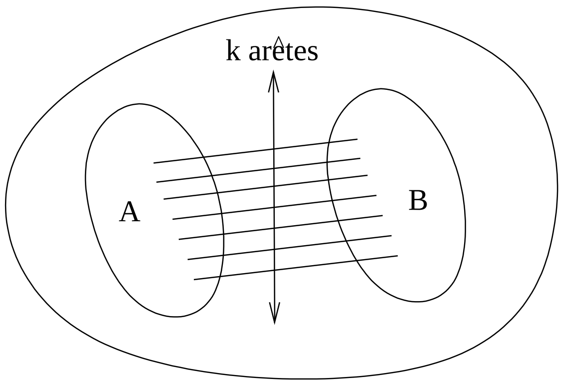


Fig. 1.1: *Partage du graphe en deux parties équilibrées*

problème est NP-complet car il existe un lien entre ce problème et celui de l'arête-bissection dans un graphe. Le théorème 1.3 ci-dessous, démontré par Klasing dans [44], illustre bien cette relation. Rappelons que l'*arête-bissection* est le nombre minimum d'arêtes dont la destruction sépare le graphe en deux sous graphes ayant le même nombre de sommets.

Théorème 1.3 Klasing [44] *Dans le modèle commuté, pour tout réseau G de n nœuds et d'arête-bissection k, nous avons la relation suivante :*

$$2\lceil \log_2 n \rceil - \lceil \log_2 k \rceil - \lceil \log_2 \lceil \log_2 k \rceil \rceil - 2 \leq g_1(G) \leq 2\lceil \log_2 n \rceil - 1$$

La borne supérieure est triviale par simple accumulation et diffusion. La démonstration de la borne inférieure est intéressante car elle consiste à partager le graphe en deux parties équilibrées en nombre de sommets et à étudier la migration des informations entre ces deux parties. Cette idée a été reprise dans [14, 49] pour prouver une borne inférieure sur le nombre de phases pour l'échange total dans un arbre.

Preuve. Nous coupons le graphe G en deux parties A et B de même cardinalité telles que seules k arêtes connectent les deux parties (voir la figure 1.1). Soit $I_v(r)$ le nombre d'informations originaires de A et connues du sommet $v \in B$ après la phase r. Soit $I(r) = \sum_{v \in B} I_v(r)$. Pour un protocole d'échange total se déroulant en t phases, comme tous les nœuds de B doivent entièrement connaître les informations appartenant originairement à A, on a l'équation suivante :

$$I(t) = \left(\frac{n}{2}\right)^2 \text{ et } I(r) < \left(\frac{n}{2}\right)^2 \text{ pour } r < t.$$

Soit $S(r)$ l'ensemble des informations qui ont été envoyées de A dans B durant la phase r. Soit $I(r,s) = \sum_{v \in B} I_v(r,s)$ où $I_v(r,s)$ est le nombre d'informations de $S(r)$ connues par le sommet v après la phase $r+s$. Observons qu'un nœud de B peut recevoir une information originaire de A de deux façons différentes durant une phase j : soit directement par un nœud de A (correspondant au paramètre $I(j,0)$), soit par un nœud de B.

Pour $r \in \{0, \ldots, \lceil \log_2 n \rceil - 1\}$, chaque nœud peut contenir au plus 2^r informations après la phase r. Ainsi, au plus $k\ 2^r$ informations peuvent transiter de A vers B durant la phase

$r+1$. Après la phase $\lceil \log_2 n \rceil$, tous les nœuds de A ne peuvent envoyer vers B qu'au plus $n/2$ informations de A. En utilisant les notations précédentes, on obtient :

$$I(r,0) = \begin{cases} k\ 2^r & \text{pour } r = 0, \ldots, \lceil \log_2 n \rceil - 1\ ; \\ k\ (n/2) & \text{pour } r \geq \lceil \log_2 n \rceil. \end{cases} \tag{1.2}$$

Maintenant, considérons le nombre d'informations de A déjà connues par un sommet de B. Comme précédemment, ce nombre peut au plus doubler à chaque phase :

$$I(r,s) = \begin{cases} k\ 2^r & \text{pour } r > 0, \quad s = 0, \ldots, \lceil \log_2 n \rceil - 1\ ; \\ k\ (n/2) & \text{pour } r > 0, \quad s \geq \lceil \log_2 n \rceil. \end{cases} \tag{1.3}$$

En remarquant que $I(t) = \sum_{r+s=t} I(r,s)$, en combinant cette relation avec les deux équations 1.2 et 1.3, et en réalisant une longue série de calculs, on obtient la borne du théorème. □

La borne supérieure et la borne inférieure sont très proches mais, dans certains cas, cet encadrement peut encore s'affiner en utilisant la "méthode en trois étapes" utilisée dans [37, 40]. Cette méthode se décompose en une étape d'accumulation, une étape d'échange total, et une étape de diffusion (voir l'algorithme 1.1).

Algorithme 1.1 Méthode en trois étapes.

1 Diviser G en r composantes connexes de même taille $\leq \lceil n/r \rceil$ appelées *composantes d'accumulation.*
2 Pour chaque composante d'accumulation, choisir un nœud appelé *représentant.*
/ L'étape d'accumulation */*
3 Dans chaque composante d'accumulation, tous les nœuds envoient leurs informations au représentant de la composante.
/ L'étape d'échange total */*
4 Faire un échange total dans l'ensemble des représentants.
/ L'étape de diffusion */*
5 Chaque représentant diffuse son information dans sa composante.

Dans le modèle commuté, les première et troisième étapes se réalisent toujours optimalement en utilisant $\lceil \log_2 \lceil n/r \rceil \rceil$ phases. Pour obtenir un protocole d'échange total performant en utilisant la méthode des trois étapes, il faut donc trouver une partition du graphe afin que le nombre de phases nécessaires à l'exécution de l'échange total de l'étape intermédiaire ne soit pas important. Après le choix de la partition du graphe, il faut donc choisir les représentants pertinemment de façon à réaliser si possible l'échange total en $\lceil \log_2 r \rceil$ phases. En d'autres termes, il faut pouvoir numéroter les représentants afin que l'échange total entre les représentants soit une simulation du protocole de l'échange total dans un graphe complet (protocole donné dans [46]) ou dans l'hypercube dans le modèle téléphone.

Cette méthode en trois étapes donne des protocoles réalisant l'échange total à $O(\lceil \log_2 \lceil \log_2 k \rceil \rceil)$ phases près de l'optimal sur des topologies classiques comme le CCC, le butterfly [40] et certains graphes planaires [38] (en prenant k égal à l'arête-bissection). En collaboration avec Barrière et Mitjana [5], nous avons développé un algorithme pour les anneaux à corde de degré trois [17]. Malheureusement, dans certain cas, nous avons été incapables d'affirmer ou d'infirmer si l'algorithme à trois étapes appliqué à notre partition du graphe est à $O(\lceil \log_2 \lceil \log_2 k \rceil \rceil)$ phases de l'optimal. Nous pensons que nous avons pris une borne supérieure de la bissection trop grossière.

En ce qui concerne les arbres, Laforest [49] a donné un encadrement étroit du nombre de phases nécessaires pour réaliser un échange total sur un arbre (voir le théorème 1.4). Si on supprime une arête e dans un arbre, on obtient deux sous-arbres. L'entier $n_{min}(e)$ correspond au nombre de sommets du plus petit de deux arbres. Le paramètre $n_{min}(T)$ est défini comme la valeur maximum de $n_{min}(e)$ parmi toutes les arêtes e de T.

Théorème 1.4 (Laforest [49]) *Soit T un arbre de n sommets. Dans le modèle commuté, nous avons l'encadrement suivant :*

$$\lceil \log_2 n \rceil + \lceil \log_2 n_{min}(T) + 1 \rceil - 2 \leq g_1(G) \leq \lceil \log_2 n \rceil + \lceil \log_2 n_{min}(T) \rceil + 4.$$

Preuve. La borne inférieure est obtenue en utilisant la même méthode que celle employée pour le théorème 1.3 mais en partageant l'arbre en deux sous-arbres suivant le paramètre $n_{min}(T)$. C'est-à-dire en choisissant l'arête de l'arbre qui a son paramètre $n_{min}(e) = n_{min}(T)$.

La borne supérieure est obtenue grâce à un protocole d'échange total. Tout d'abord, on choisit une arête $e = \{u, v\}$ telle que $n_{min}(e) = n_{min}(T)$. Supposons que le sommet u est le sommet appartenant au sous-arbre de T contenant le plus de sommets après suppression de l'arête e. En supposant que le degré de u est α, le graphe T peut alors se décomposer en α sous-arbres en supprimant le sommet u. En rajoutant le sommet u à un sous-arbre de cardinalité minimum, on détermine les composantes d'accumulation de la "méthode des trois étapes". Il est facile de voir que la cardinalité de ces sous-arbres est majorée par $n_{min}(e) + 1$. On sélectionne les représentants des composantes en prenant u si u appartient à cette composante, et le voisin de u appartenant à la composante sinon. L'ensemble des représentants forme une étoile[1] dans le graphe. En constatant qu'un échange total dans une étoile s'effectue en un nombre de phases optimal, les trois étapes peuvent se réaliser optimalement. En comptant l'ensemble des phases de ces trois étapes, on obtient la borne supérieure de l'énoncé. □

1.4 Communications structurées en mode Δ-port

Dans le modèle téléphone, comme les communications sont voisins-à-voisins, l'information peut être diffusée à partir de u en $exc(u)$ phases où $exc(u)$ est l'excentricité[2] de u. En considérant le protocole de diffusion appelé "inondation" et qui satisfait que, dès qu'un nœud a reçu l'information, ce nœud informe tous ses voisins à la phase suivante, on obtient le théorème suivant :

1. Une étoile est un arbre dont un sommet est connecté à tous les autres sommets.
2. L'excentricité de u est définie comme la distance maximale entre le nœud u et n'importe quel autre nœud du réseau.

Théorème 1.5 *Dans le modèle téléphone Δ-port, pour tout réseau G de n nœuds, la diffusion à partir de u s'effectue en exactement $exc(u)$ phases.*

On trouvera dans [58], un récapitulatif des résultats dans le modèle téléphone Δ-port. Puisque, dans le modèle commuté, un nœud peut communiquer avec n'importe quel autre nœud du réseau, cette borne n'est plus vraie dans ce modèle. Nous avons toutefois la borne inférieure suivante :

Théorème 1.6 *Dans le modèle commuté Δ-port, pour tout réseau G de n nœuds, pour tout nœud u de G, la diffusion à partir de u nécessite au moins $\lceil \log_{\Delta+1} n \rceil$ phases où Δ est le degré maximum du graphe.*

Cette borne est obtenue en constatant qu'après chaque phase, le nombre de nœuds informés peut être au maximum multiplié par $\Delta+1$. De nombreux travaux ont été effectués pour déterminer le nombre de phases d'une diffusion ou d'un échange total dans des topologies régulières (voir le tableau 1.1). Pour obtenir les résultats énoncés dans le tableau 1.1, les réseaux sont découpés en Δ parties "semblables" où Δ est le degré maximum du graphe. On résout ensuite indépendamment le problème dans chacune de ces parties. Par exemple, pour le problème de la diffusion, la première phase consiste à envoyer l'information à diffuser dans chacune des parties du graphe et, ensuite, chaque partie est récursivement divisée. Le problème consiste à trouver la bonne décomposition récursive du graphe. Par exemple, pour le tore, cette division est obtenue en utilisant la théorie des codes. Ces résultats ne se généralisent pas à priori pour l'étude de la diffusion et de l'échange total dans un graphe quelconque.

Graphe	Diffusion	Échange total
Tore de dimension 2 [55]	$\lceil \log_5 n \rceil$	$\lceil \frac{3}{2} \log_5 n \rceil$
Tore de dimension k [21] et de coté ℓ	$k\ \lceil \log_{2k+1} \ell \rceil$	$(k+1)\lceil \log_{2k+1} n \rceil$
De Bruijn $B(d,D)$ [22]	$\log_d(n)$	$\lceil \log_d n \rceil + \lceil \log_2 \lceil \log_2 n \rceil \rceil$
Hypercubes de dimension k [30]	$\left\lceil \frac{k}{\log k} \right\rceil$	problème ouvert

TAB. 1.1: *Nombre de phases d'une diffusion et d'un échange total pour quelques topologies spécifiques.*

Notre travail fut initialement motivé par la recherche d'une méthode générale pour construire un protocole de diffusion et d'échange total dans le mode Δ-port. Il se révéla que ce problème est NP-complet. Face à ce résultat, nous avons concentré nos efforts sur les arbres, topologies les plus souvent utilisées pour faire des diffusions partielles.

D'autres études ont été effectuées cherchant à obtenir un compromis entre le nombre de phases et d'autres paramètres comme le nombre de liens utilisés ou la taille des messages. Plus précisément, Peters et Spencer [56] ont trouvé un protocole de diffusion pour les tores qui minimise le nombre de phases et le nombre de liens utilisés. Plus récemment, Delmas [10] a étudié le paramètre relatif à la taille des messages pour chaque phase c'est-à-dire le maximum de la taille des messages échangés lors de cette phase. Cette étude donne la relation entre ce paramètre et le nombre de phases. L'auteur a déterminé un protocole de diffusion sur le graphe complet en supposant un modèle k-port (un nœud peut participer à au plus k appels). Cette étude met en évidence l'influence de la taille des messages sur un protocole de diffusion.

Le routage "wormhole" a également été intensivement étudié pour des topologies classiques comme dans les grilles et les hypercubes (voir le survey [26]). Dans ce mode, d'autres problèmes apparaissent comme par exemple savoir si on peut effectivement acheminer les messages sans causer d'interblocage [25] ou le calcul du coût du protocole d'une communication structurée en fonction d'une fonction de routage particulière.

D'autres travaux similaires ont été effectués dans un modèle presque identique au modèle commuté Δ-port. La seule différence consiste à autoriser les appels à avoir des arêtes communes. Sous ces hypothèses, le principal problème est de trouver un protocole minimisant le nombre d'appels passant par une même arête (ou arc) durant une phase, tout en fixant le nombre de phases. Par exemple, Beauquier et al [7] ont donné la complexité de ces problèmes en imposant un protocole "uni-phase". Dans ce modèle on peut trouver le protocole de diffusion minimisant le nombre de liens utilisant les arêtes en temps polynomial. En effet, il suffit de ramener le problème à un problème de la recherche du flot maximum dans un graphe. En revanche, le problème identique pour l'échange total est NP-complet (ceci est aussi démontré en réduisant le problème à un problème de flot). Face à ce résultat, les auteurs de [7] ont proposé un protocole optimal pour les tores et les arbres.

1.5 Conclusion

En résumé, dans le modèle commuté, un protocole de diffusion minimisant le nombre de phases peut se construire en temps polynomial en mode 1-port quelque soit la source et le réseau. À notre connaissance, c'est l'unique résultat qui ne pose pas de contrainte sur la structure du réseau. En revanche, les autres résultats connus s'appliquent exclusivement à des topologies spécifiques (comme le tore) et ne sont pas à priori généralisables au cas des graphes quelconques.

Malgré leur simplicité, certains réseaux tendent cependant à posséder une structure irrégulière. C'est pourquoi nous nous sommes penchés sur les communications structurées dans des graphes quelconques. Nous avons montré que ces problèmes sont majoritairement NP-complets. Toutefois, nous donnerons dans ce document d'une part des algorithmes d'approximation pour des topologies quelconques et d'autre part des méthodes constructives de protocoles optimaux dans les arbres, architectures fréquemment utilisées pour les communications de groupes dans les réseaux de télécommunications [2, 20].

CHAPITRE 2 Diffusion partielle en mode 1-port

Les travaux présentés dans ce chapitre ont été partiellement réalisés en collaboration avec P. Fraigniaud, J.C. König et A. Raspaud [15].

Dans ce chapitre, nous considérons la diffusion partielle dans le modèle commuté en mode 1-port, et ce dans des réseaux quelconques. Pour estimer la complexité d'un protocole de diffusion partielle dans le modèle commuté, une première approche consiste à compter le nombre de phases du protocole. Notons que ceci n'implique pas que le réseau soit synchrone, ce n'est simplement qu'une estimation du temps requis par le protocole qui pourrait fonctionner dans un réseau asynchrone.

Comme nous l'avons déjà dit dans le chapitre 1, le problème de la diffusion partielle pour un réseau quelconque dans le modèle commuté est polynomial. Farley [24] a démontré que, pour tout réseau G de n nœuds, le nombre de phases nécessaires pour effectuer la diffusion partielle à partir de n'importe quel nœud de G est égal à $\lceil \log_2 n \rceil$. Cependant, la discussion n'est pas close pour autant car ce résultat n'englobe pas la notion de fonction de routage. Le premier objectif de ce chapitre est d'étendre le résultat de Farley en incluant les fonctions de routage. De plus, le protocole décrit dans [24, 49] n'utilise pas les ressources du réseau de façon équilibrée puisqu'il est basé sur la transmission de messages le long des arêtes d'un arbre couvrant du réseau. Cette gestion des appels provoque de ce fait de nombreux conflits et un délai élevé.

Parmi les principaux paramètres qui mesurent l'efficacité d'un protocole de diffusion partielle, nous nous intéresserons d'abord à la *bande passante* en minorant le nombre total de liens de communications utilisés par le protocole. Définissant un *transmetteur* comme un routeur mis explicitement à contribution par un protocole de diffusion partielle, nous nous intéresserons ensuite à minimiser le nombre et la charge des transmetteurs. Enfin, nous chercherons à minimiser la longueur maximum des chemins utilisés. Ce dernier paramètre nous permettra d'estimer la dégradation possible de la complexité en temps du protocole quand le temps de commutation des routeurs ne peut pas être négligé (voir équation 1.1).

Dans la section 2.1, nous proposons un algorithme polynomial qui calcule, pour tout réseau G, un protocole de diffusion partielle optimal en nombres de phases. Ce protocole minimise le nombre total d'arêtes utilisées à chaque phase. Il est à souligner que ce nouveau protocole s'applique également au modèle commuté avec fonction de routage minimale. La section 2.2 est dédiée à la NP-complétude de la minimisation de certaines ressources comme la bande passante, la charge des transmetteurs et la longueur des appels. Dans la section 2.3, nous mettrons en évidence des bornes inférieures et supérieures spécifiques aux arbres.

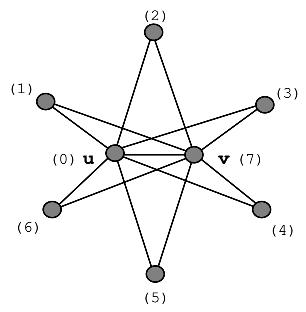


Fig. 2.1: *Une double étoile de 8 sommets.*

Ces bornes améliorent les résultats connus sur le nombre total d'arêtes utilisées [24].

2.1 Extension du théorème de Farley

Nous allons étendre le théorème de Farley, vu dans le chapitre 1, pour le modèle commuté *avec* fonction de routage. Il existe de nombreuses preuves de ce théorème ou, de résultats similaires (voir [24, 42, 49, 50]). Ces preuves utilisent toujours un arbre couvrant du réseau, et tous les appels sont effectués le long des arêtes de cet arbre couvrant. Ce n'est pas le cas de notre approche.

2.1.1 Théorème de Farley en utilisant les fonctions de routage

Tout arbre induit une fonction de routage puisqu'il existe un unique chemin entre deux nœuds dans un arbre. Par conséquent, tous les chemins utilisés par les protocoles de diffusion dans [24, 27, 42, 49] peuvent être générés par une fonction de routage. On peut ainsi déduire le corollaire suivant du théorème 1.2.

Corollaire 2.1 *Pour tout réseau G de n nœuds, il existe une fonction de routage non adaptative telle que le temps de diffusion depuis tout nœud de G est $\lceil \log_2 n \rceil$ dans le modèle commuté avec fonction de routage.*

Ce corollaire souligne le fait que, pour un certain ensemble de fonctions de routage (notamment celles qui routent sur des arbres couvrant le réseau), la diffusion partielle se réalise optimalement en nombre de phases. En revanche, pour tout réseau G, et pour toute fonction de routage R sur G, il n'existe pas toujours un protocole de diffusion qui s'effectue en $\lceil \log_2 n \rceil$ phases, à partir de tout nœud de G. Pour illustrer ce fait, considérons le contre-exemple décrit sur la figure 2.1 : une *double étoile* S_n^2 avec deux centres u et v, et $n-2$ "extrémités".

Considérons la fonction de routage non adaptative R ci-dessous pour router les messages sur la double étoile :

$$\begin{cases} \forall w \in V, w \neq u, w \neq v, \forall x \in V, R(w,x) = (w,u); \\ \forall x \in V, R(u,x) = (u,v); \\ \forall x \in V, R(v,x) = (v,x). \end{cases}$$

Informellement, pour tout appel entre deux sommets non voisins, la fonction de routage oblige ces appels à traverser l'arête $\{u, v\}$. Dans S_n^2, cette fonction de routage ne permet pas de faire une diffusion partielle en $\lceil \log_2 n \rceil$ phases. En effet, en prenant comme exemple la double étoile de 8 sommets, il n'est pas possible de diffuser en 3 phases à partir de tout nœud dans le modèle commuté avec fonction de routage. En effet, diffuser en 3 phases dans cette double étoile oblige la dernière phase à contenir 4 appels. Or, au moins deux de ces appels s'effectuent entre deux nœuds non-voisins et, par définition de R, ils utiliseraient l'arête entre u et v, ce qui est contraire aux hypothèses du modèle. (Le modèle commuté avec fonction de routage impose que les chemins des appels d'une même phase doivent être deux-à-deux arête-disjoints). Cet exemple montre que le modèle commuté avec fonction de routage est plus contraignant que le modèle commuté.

Fort de ce constat, nous allons restreindre notre étude aux fonctions de routage minimales (de plus courts chemins). Cette restriction n'est pas trop forte car la plupart des fonctions de routage utilisées pour les topologies usuelles (grilles, tores multidimensionnels, etc.) routent selon des plus courts chemins (routage XY, e-cube, etc.).

2.1.2 Un protocole utilisant des fonctions de routage minimales

Suite à ce qui a été dit dans la section 2.1.1, nous avons cherché un protocole de diffusion partielle utilisable dans le mode commuté avec fonction de routage. Tout d'abord, nous construisons un protocole de diffusion partielle où chaque appel correspond à un plus court chemin. Ceci permet de minimiser le nombre de commutations et de limiter la congestion du réseau, une forte congestion pourrait ralentir les communications externes au processus de diffusion.

Montrons tout d'abord comment construire chaque phase du protocole en utilisant des appels le long de plus courts chemins.

Définition 2.1 *Soit U un sous-ensemble de sommets d'un graphe $G = (V, E)$. Un quasi-couplage de U dans G est un ensemble $\mathcal{P}$ de $\left\lfloor \frac{|U|}{2} \right\rfloor$ plus courts chemins deux-à-deux arête-disjoints et tel que tous les sommets de U sont extrémités d'exactement un chemin de $\mathcal{P}$ (sauf un sommet non "couplé" si l'ensemble U est de cardinalité impaire).*

Le résultat suivant montre l'existence d'un quasi-couplage de U pour tout $U \subseteq V$.

Lemme 2.2 *Soit U un sous-ensemble de sommets d'un graphe $G = (V, E)$, il existe un quasi-couplage de U dans G.*

Preuve. Soit m le nombre de sommets de U. On associe à l'ensemble U le graphe complet K_m tel que chaque sommet de U correspond à un sommet de K_m. Nous pondérons les arêtes

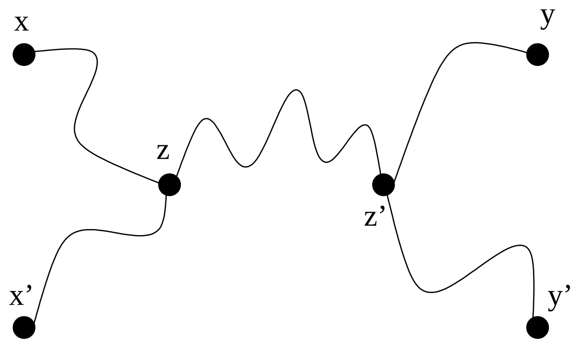


FIG. 2.2: *Dans le quasi-couplage de U, les deux chemins $P_{\{x,y\}}$ et $P_{\{x',y'\}}$ ne sont pas arête-disjoints.*

de K_m de façon à ce que le poids de l'arête $\{x, y\}$ corresponde à la distance $d_G(x, y)$ entre x et y dans G.

Considérons un couplage parfait $\mathcal{C}$ de K_m de poids minimum ($\mathcal{C}$ laisse un sommet non couplé si m est impair). Ce couplage définit un quasi-couplage de U noté $\mathcal{P}$ dans G en faisant correspondre à toute arête $\{x, y\}$ de $\mathcal{C}$ un plus court chemin quelconque connectant x à y dans G. Montrons que les chemins ainsi décrits sont deux-à-deux arête-disjoints. Raisonnons par l'absurde et supposons que deux chemins $P_{\{x,y\}}$ et $P_{\{x',y'\}}$ de $\mathcal{P}$ ne soient pas arête-disjoints (voir la figure 2.2). Notons $Q_{\{z,z'\}}$ une partie commune à ces deux chemins. Nous avons donc $P_{\{x,y\}} = \{x, \ldots, z\} \cup Q_{\{z,z'\}} \cup \{z', \ldots, y\}$, et $P_{\{x',y'\}} = \{x', \ldots, z\} \cup Q_{\{z,z'\}} \cup \{z', \ldots, y'\}$ en intervertissant si nécessaire les rôles de x' et y'.

Les couples $\{x, y\}$ et $\{x', y'\}$ pourraient ainsi être remplacés dans le couplage $\mathcal{C}$ par les couples $\{x, x'\}$ et $\{y, y'\}$. On obtiendrait ainsi un nouveau couplage $\mathcal{C}$'. Le poids des arêtes $\{x, y\}$ et $\{x', y'\}$ est égal à $d_G(x, z) + d_G(z', y) + d_G(x', z) + d_G(z', y') + 2d_G(z, z')$ tandis que le poids des arêtes $\{x, x'\}$ et $\{y, y'\}$ est inférieur ou égal à $d_G(x, z) + d_G(z', y) + d_G(x', z) + d_G(z', y')$. Comme $d_G(z, z') \neq 0$, le couplage $\mathcal{C}$' a un poids plus petit que le couplage original $\mathcal{C}$, d'où la contradiction avec le fait que le couplage $\mathcal{C}$ est de poids minimum. Par conséquent, les chemins de $\mathcal{P}$ sont deux-à-deux arête-disjoints. □

Nous pouvons déduire le théorème suivant :

Théorème 2.3 *Pour tout graphe $G = (V, E)$ de n nœuds, pour tout ensemble de nœuds D de G, et pour tout nœud $u \in D$ de G, on peut construire en temps polynomial un protocole de diffusion partielle du sommet u vers D procédant en $\lceil \log_2 |D| \rceil$ phases et tel que*

1. *tous les appels s'effectuent le long de plus courts chemins ;*
2. *à chaque phase $i = 1, \ldots, \lceil \log_2 |D| \rceil$, la somme des longueurs des chemins utilisés est minimum parmi tous les ensembles possibles de chemins d'origine les sommets informés à la phase $i - 1$ et d'extrémité les sommets informés à la phase i (u est informé au temps 0).*

Preuve. Le protocole de diffusion partielle à partir d'un sommet u se construit en commençant par la dernière phase. Cette dernière phase correspond à un quasi-couplage de D.

Nous choisissons alors arbitrairement une extrémité de chaque chemin de ce quasi-couplage de D en gardant l'initiateur de la diffusion et le sommet non couplé si $|D|$ est impair. On construit ainsi successivement une suite de quasi-couplages de D_i, $i = 1, \ldots, \lceil \log_2 |D| \rceil$, tels que $D_1 = D$, $|D_{i+1}| = \left\lceil \frac{|D_i|}{2} \right\rceil$ et $u \in D_i$ pour tout i. Ce protocole peut être calculé en temps polynomial puisqu'on peut calculer un couplage parfait de poids minimum dans le graphe complet en temps polynomial [23]. □

Cette preuve démontre en particulier de nouveau le théorème de Farley. Mais le théorème 2.3 peut aussi s'appliquer dans le modèle commuté avec fonction de routage minimale parce que la façon dont les plus courts chemins ont été choisis dans la preuve du lemme 2.2 n'importe pas lors de l'exécution du protocole. En particulier, ils peuvent être construits en utilisant les itinéraires indiqués par une fonction de routage (éventuellement adaptative) minimale. Par conséquent, nous obtenons le résultat suivant qui améliore fortement le corollaire 2.1 :

Théorème 2.4 *Pour tout réseau $G = (V, E)$ de n nœuds, pour tout ensemble $D \subseteq V$, pour tout nœud $u \in D$, et pour toute fonction de routage minimale (éventuellement adaptative) sur G, on peut calculer en temps polynomial un protocole de diffusion partielle de u vers D qui s'effectue en $\lceil \log_2 |D| \rceil$ phases dans le modèle commuté avec fonction de routage, et tel qu'à chaque phase $i \in \{1, \ldots, \lceil \log_2 |D| \rceil\}$, la somme des longueurs des chemins utilisés est minimum parmi tous les ensembles possibles de chemins d'origine les sommets informés à la phase $i - 1$ et d'extrémité les sommets informés à la phase i.*

Le théorème 2.4 a été prouvé indépendamment par Birchler et al [9]. Leur protocole ne minimise cependant pas à chaque phase le nombre de liens utilisés. Le théorème 2.4 signifie que, quelque soit le réseau et la fonction de routage minimale (éventuellement adaptative) sur ce réseau, il est possible d'effectuer une diffusion partielle optimale en nombre de phases. Notons qu'à chaque phase, ce protocole minimise aussi le nombre de liens de communications impliqués dans la diffusion partielle, c'est-à-dire la bande passante utilisée. Ce n'est cependant pas évident qu'il n'est pas possible de faire mieux globalement, car ici, la minimisation s'effectue de manière gloutonne, phase par phase. Qu'en est-il si le protocole est considéré globalement ? Que se passe-t-il pour les autres paramètres comme par exemple le délai ? La section suivante a pour but de répondre à ces questions.

2.2 Minimisation de la charge et du délai

Cette section s'intéresse à la minimisation de certaines ressources comme la bande passante, la charge des routeurs et les longueurs des appels, aussi bien à chaque phase d'un protocole que durant tout le protocole de diffusion partielle.

2.2.1 Minimisation de la bande passante

Les théorèmes 2.3 et 2.4 montrent qu'il est possible de minimiser la bande passante *à chaque phase* d'un protocole de la diffusion partielle. En d'autres termes, le nombre de canaux de communication impliqués peut être minimisé à chaque phase. Mais ceci ne signifie pas que la somme des longueurs de tous les chemins utilisés durant l'ensemble du protocole de diffusion partielle soit minimum. Pour illustrer ceci, considérons le chemin $P_4 = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ et supposons que x_0 est la source. Dans le protocole donné dans la preuve du théorème 2.3, pour la dernière phase, le quasi-couplage suivant est construit : $\mathcal{P}_2 = \{(x_0, x_1), (x_2, x_3)\}$. Donc si x_0 et x_3 sont alors choisis (la sélection est arbitraire sauf pour la source), alors le quasi-couplage $\mathcal{P}_1 = \{(x_0, x_3)\}$ correspond à la première phase. À chaque phase, le nombre de canaux de communications impliqués est minimum pour les extrémités considérées. La somme de toutes les longueurs des chemins est $1+1+3=5$. Par contre, lors de la construction de la dernière phase du protocole, si nous avions choisi x_2 à la place de x_3, alors le nombre de liens utilisés durant ce protocole serait $1+1+2=4$, et c'est le minimum possible.

Malheureusement, minimiser globalement le nombre de liens utilisés (la bande passante) par un protocole de diffusion partielle est un problème NP-complet :

Théorème 2.5 *Le problème suivant est NP-complet :*
MINIMUM TOTAL DE LA LONGUEUR DES CHEMINS (MTLC)

Instance: *Un graphe $G = (V, E)$, un sommet u de G, un sous-ensemble $D \subseteq V$, et un entier k.*

Question: *Existe-t-il un protocole de diffusion partielle à partir du sommet u vers D dans G s'effectuant en $\lceil \log_2 |D| \rceil$ phases dans modèle commuté, et tel que la somme de toutes les longueurs des chemins des appels générés par ce protocole est au plus k ?*

Preuve. Il est facilement démontrable que MTLC est dans NP. Maintenant, prouvons que MTLC est NP-difficile en le réduisant au problème DLOG suivant :

DIFFUSION LOG (DLOG)

Instance: Un graphe $G = (V, E)$ de n sommets, et un sommet u de G.

Question: Existe-t-il un protocole de diffusion partielle à partir de u dans G s'effectuant en au plus $\lceil \log_2 n \rceil$ phases dans le modèle téléphone?

La NP-complétude du problème DLOG peut être démontrée en utilisant une technique semblable à celle utilisée dans [63] pour démontrer la NP-complétude du problème de la diffusion dans le modèle téléphone. Soit donc (G, u) une instance du problème DLOG. Nous transformons polynomialement cette instance en une instance du problème MTLC en fixant $D = V$ et $k = n - 1$.

S'il existe un protocole de diffusion à partir de u dans G s'effectuant en au plus $\lceil \log_2 n \rceil$ phases dans le modèle téléphone, alors il existe un protocole de diffusion à partir du sommet u dans G en $\lceil \log_2 n \rceil$ phases dans le modèle commuté et tel que la somme de toutes les longueurs des chemins de communications est au plus $n - 1$. Réciproquement, s'il existe un protocole de diffusion à partir de u dans G s'effectuant en $\lceil \log_2 n \rceil$ phases dans le modèle commuté, et tel que la somme de toutes les longueurs des chemins des appels soit au plus $n - 1$, alors tous les appels sont effectués entre des sommets voisins et, par conséquent, il existe un protocole de diffusion à partir de u dans G s'effectuant en au plus $\lceil \log_2 n \rceil$ phases dans le modèle téléphone. $\square$

Le théorème 2.5 implique qu'il est difficile de minimiser la charge globale sur les arêtes d'un protocole de diffusion partielle. Cependant, on peut approcher cette valeur à un facteur logarithmique près. Pour tout réseau $G = (V, E)$, pour tout nœud $u \in V$ et pour tout ensemble $D \subseteq V$, $u \in D$, notons $S(G, D, u)$ le minimum, pris sur tous les protocoles de diffusion partielle à partir du sommet u vers D dans G effectués en $\lceil \log_2 |D| \rceil$ phases, de la somme de toutes les longueurs de tous les chemins générés par le protocole.

Le théorème 2.5 montre que la minimisation de $S(G, D, u)$ est un problème NP-complet. Néanmoins nous avons :

Théorème 2.6 *Soit $G = (V, E)$ un graphe arbitraire, soit $D \subseteq V$ et soit $u \in D$. La somme totale de toutes les longueurs de tous les chemins générés par le protocole de diffusion partielle du théorème 2.3 est au plus $\lceil \log_2 |D| \rceil S(G, D, u)$.*

Preuve. Puisque tout nœud de l'ensemble D doit recevoir le message, $S(G, D, u)$ est au moins égal au nombre d'arêtes n_s d'un arbre de Steiner [62] couvrant D. De plus, pour tout i, $1 \leq i \leq \lceil \log_2 |D| \rceil$, le nombre d'arêtes d'un quasi-couplage de D_i construit dans l'algorithme du théorème 2.3 est majoré par le nombre d'arêtes d'un arbre de Steiner T_i couvrant D_i. En effet, on peut trouver un quasi-couplage de D_i utilisant seulement les arêtes de T_i, et le quasi-couplage de D_i utilisé dans le protocole construit par l'algorithme du théorème 2.3 dans G utilise ainsi moins d'arêtes que celui construit dans l'arbre de Steiner. Par conséquent, pour tout i, $1 \leq i \leq \lceil \log_2 |D| \rceil$, le nombre d'arêtes du quasi-couplage de D_i est au plus égal au nombre d'arêtes n_s d'un arbre de Steiner couvrant D. Le protocole du théorème 2.3 génère donc des chemins de longueur totale au plus $\lceil \log_2 |D| \rceil n_s \leq \lceil \log_2 |D| \rceil S(G, D, u)$. $\square$

2.2.2 Minimisation du nombre de transmetteurs

Nous allons montrer que minimiser le nombre de transmetteurs impliqués dans un protocole de diffusion partielle optimal en nombre de phases est NP-complet. Ce résultat est valide que l'on considère le protocole phase par phase ou, que l'on considère le protocole globalement.

Définition 2.2 *Soit U un sous-ensemble de sommets d'un graphe G et $\mathcal{P}$ un quasi-couplage de U. Un* transmetteur *est un sommet de G qui est traversé par un chemin de $\mathcal{P}$ (c'est-à-dire un nœud interne d'un chemin de $\mathcal{P}$).*

Théorème 2.7 *Le problème suivant est NP-complet :*
Nombre Minimum de Transmetteurs (NMT)

Instance: *Un graphe $G = (V, E)$, un sous-ensemble $U \subseteq V$, et un entier k.*

Question: *Existe-t-il un quasi-couplage de U ayant au plus k transmetteurs ?*

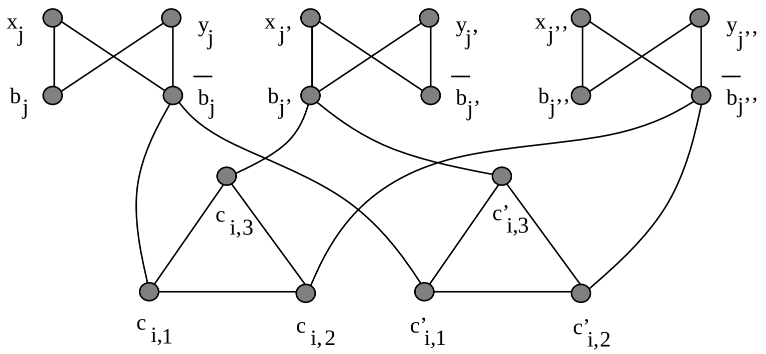


FIG. 2.3: *Construction de la preuve du théorème 2.7. La clause c_i satisfait $c_i[1] = \bar{b}_j$, $c_i[2] = \bar{b}_{j''}$ et $c_i[3] = b_{j'}$. Ainsi les nœuds $c_{i,1}$ et $c'_{i,1}$ sont connectés au nœud $\bar{b}_j$, les nœuds $c_{i,2}$ et $c'_{i,2}$ sont connectés au nœud $b_{j'}$, et les nœuds $c_{i,3}$ et $c'_{i,3}$ sont connectés au nœud $\bar{b}_{j''}$.*

Preuve. Il est facile de voir que NMT est dans NP. NMT est NP-difficile par une réduction à partir de 3SAT. Soit un ensemble de variables booléennes $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, et un ensemble de clauses $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ d'une instance de 3SAT (où chaque clause c_i a exactement trois littéraux $c_i[1], c_i[2]$ et $c_i[3]$). Nous construisons une instance de NMT de la façon suivante. Nous associons à chaque clause c_i de C deux copies du graphe complet à trois sommets K_3. Dans chaque K_3, chaque sommet correspond à un littéral de la clause. Ces sommets sont notés $c_{i,1}, c_{i,2}$ et $c_{i,3}$ dans la première copie, et $c'_{i,1}, c'_{i,2}$ et $c'_{i,3}$ dans la deuxième copie. Nous associons aussi une copie de graphe biparti complet $K_{2,2}$ à chaque variable booléenne b_i dans B. La première partition du graphe biparti $K_{2,2}$ est composée de deux sommets notés b_i et $\bar{b}_i$, et la deuxième partition est composée de deux sommets notés x_i et y_i. Nous connectons les littéraux de chaque clause au sommet booléen correspondant de la façon suivante (voir la figure 2.3) : si $c_i[\ell] = b_j$ (resp. $c_i[\ell] = \bar{b}_j$), alors nous ajoutons deux arêtes, l'une entre $c_{i,\ell}$ et b_j (resp. $\bar{b}_j$) et l'autre entre $c'_{i,\ell}$ et b_j (resp. $\bar{b}_j$). Nous obtenons un graphe G avec $6m + 4n$ sommets. Soit U le sous-ensemble de sommets composé des $6m$ sommets du graphe complet K_3, et des $2n$ sommets x_i, y_i, $i = 1, \dots, n$. Fixons $k = n$. Nous allons démontrer que C est satisfiable si et seulement s'il existe un quasi-couplage de U avec au plus n transmetteurs (c'est-à-dire avec exactement n transmetteurs).

Supposons C satisfiable. Nous construisons un quasi-couplage de U avec exactement n transmetteurs. Pour $i = 1, \dots, n$, connectez x_i à y_i avec un chemin traversant le sommet b_i si la solution affecte b_i à *vrai*, et traversant le sommet $\bar{b}_i$ sinon. Comme C est satisfiable, chaque clause c_i, $i = 1, \dots, m$, contient au moins un des trois littéraux dans c_i égal à vrai. Supposons que $c_i[\ell]$ soit un littéral positif. Si $c_i[\ell] = b_j$ (resp. $c_i[\ell] = \bar{b}_j$) alors connectez les deux sommets $c_{i,\ell}$ et $c'_{i,\ell}$ par un chemin traversant le sommet b_j (resp. $\bar{b}_j$). Puis, dans chaque copie de K_3 correspondant à la clause c_i, connectez $c_{i,\ell'}$ avec $c_{i,\ell''}$ et $c'_{i,\ell'}$ avec $c'_{i,\ell''}$, $\ell' \neq \ell \neq \ell''$, par un chemin de longueur 1. Nous obtenons ainsi un quasi-couplage de U avec exactement n transmetteurs (chaque copie de $K_{2,2}$ contient un transmetteur).

Réciproquement, supposons qu'il existe un quasi-couplage de U avec exactement n transmetteurs. En raison de la structure de U et de G, chaque copie de $K_{2,2}$ doit contenir un transmetteur parce que les sommets x_i et y_i, $i = 1, \dots, n$ doivent faire partie du quasi-couplage de U. Dans le $K_{2,2}$ correspondant à la $j$ème variable, $j = 1, \dots, n$, si le transmetteur est le nœud b_j, alors nous affectons b_j à *vrai*, sinon à *faux*. Dans chaque K_3, au moins un sommet doit être connecté avec un nœud extérieur, par un chemin de longueur au moins 2. Ce chemin traverse nécessairement un des transmetteurs. Ceci implique que, dans chaque K_3, il existe une arête connectée à un nœud correspondant à un littéral qui est *vrai*. Par conséquent, chaque clause contient au moins un littéral vrai, et C est satisfiable. □

Le résultat suivant montre que minimiser le nombre de routeurs impliqués n'est pas seulement difficile quand on considère une phase unique, mais aussi lorsque l'on considère le protocole tout entier.

Théorème 2.8 *Le problème suivant est NP-complet :*
MINIMUM DU NOMBRE TOTAL DE TRANSMETTEURS (MNTT)

Instance: *Un graphe G, un sommet u de G, et un entier k.*

Question: *Existe-t-il un protocole de diffusion optimal en temps à partir de u dans le modèle commuté qui implique au plus k transmetteurs pendant la totalité de son exécution ?*

Preuve. Le problème MNTT avec $k = 0$ est équivalent au problème DLOG. En effet, s'il existe un protocole $\mathcal{B}$ de diffusion partielle en temps $\lceil \log_2 n \rceil$ tel qu'aucun sommet soit un transmetteur, alors tous les appels sont des appels voisins-à-voisins, et par conséquent ils utilisent seulement une arête. Donc le protocole $\mathcal{B}$ satisfait les contraintes du modèle téléphone. Réciproquement, si $\mathcal{B}$ est un protocole de diffusion en temps $\lceil \log_2 n \rceil$ dans le modèle téléphone, alors le nombre correspondant de transmetteurs est réduit à zéro. □

2.2.3 Minimisation de la charge des routeurs

Nous étudions ici un autre paramètre, la charge des routeurs. Un routeur est généralement capable de router toute permutation de ses ports d'entrée sur ses ports de sortie. Cependant, le processus d'allocation des canaux de sortie est en général séquentiel, et il peut donc consommer du temps lorsque de nombreux messages traversent le même routeur au même instant. Par conséquent, il est intéressant de minimiser la charge des routeurs.

Soit $\mathcal{P}$ un quasi-couplage d'un sous-ensemble de sommets U d'un graphe G. Définissons la charge d'un transmetteur x donné comme le nombre de chemins qui traversent x (x n'est pas un sommet terminal). Ce paramètre est noté $\mu(U, \mathcal{P}, x)$. La charge du quasi-couplage de U est notée $\mu(U, \mathcal{P})$, et définie par $\mu(U, \mathcal{P}) = \max_x \mu(U, \mathcal{P}, x)$.

Définition 2.3 *L'*indice de charge *d'un sous-ensemble U d'un graphe $G = (V, E)$ est le minimum de $\mu(U, \mathcal{P})$ pris sur tous les quasi-couplages $\mathcal{P}$ de U. Il est noté $\mu(U)$. Quand la minimisation est restreinte à des quasi-couplages ne contenant que des plus courts chemins, ce paramètre est noté $\mu_m(U)$.*

Clairement, si nous voulons minimiser la charge des routeurs, nous avons à trouver $\mathcal{P}$, quasi-couplage de U, pour lequel nous avons $\mu(U, \mathcal{P}) = \mu(U)$ à chaque phase du protocole de la diffusion partielle. Malheureusement, nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.9 *Le problème suivant est NP-complet :*
INDEX DE CHARGE DES QUASI-COUPLAGES DE PLUS COURTS CHEMINS (IDC)

Instance: *Un graphe $G = (V, E)$, un sous-ensemble $U \subset V$ et un entier k.*

Question: $\mu_m(U) \leq k$?

Preuve. Il est facile de voir que $IDC \in NP$ parce que l'on peut vérifier en temps polynomial si un quasi-couplage de U contient seulement des plus courts chemins et si sa charge est inférieure ou égale à k. Prouvons que IDC est NP-complet par transformation à partir du problème CS suivant :

TRANSVERSAL OU COUVERTURE SOMMET (CS)

Instance: Un graphe $G = (V, E)$ et un entier positif b.

Question: Existe-t-il un transversal de taille au plus b, c'est-à-dire un sous-ensemble $S \subset V$ tel que $|S| \leq b$ et tel que, pour toute arête de E, au moins une de ses extrémités appartienne à S ?

Soit une instance de CS donnée par le graphe $G = (V, E)$ et l'entier positif b. Nous posons $k = 1$. Nous allons construire un graphe $G' = (V', E')$ et un sous-ensemble de sommets U tel que, dans le graphe G', le sous-ensemble U satisfait $\mu_m(U) \leq 1$ si et seulement si G a un transversal de taille au plus b. Le graphe G' consiste en $2b$ chemins $P_i, i = 1, \ldots, 2b$, de trois sommets (x_i, y_i, z_i) chacun, et en un sous-graphe $G_e = (V_e, E_e)$ défini pour chaque arête e de G comme suit :

Chaque arête du graphe G correspond, dans le graphe G', à un sous-graphe $G_e = (V_e, E_e)$, appelé boîte noire de e. La boîte noire d'une arête $e = \{u, v\} \in E$ est représentée sur la figure 2.4. Elle est composée de 44 sommets. Seulement 20 d'entre eux sont explicitement dessinés dans la figure 2.4. Les 24 autres sont virtuellement représentés par des lignes pointillées : chaque ligne pointillé $C = c_1 - c_2$ représente une croix de cinq sommets. Les cinq sommets notés $[e, u_i]$, $i = 1, \ldots, 5$ (resp. $[e, v_i]$, $i = 1, \ldots, 5$) sont les sommets de la boîte noire représentants le sommet extrémité u (resp. v) de l'arête $e = \{u, v\}$. Nous identifions aussi deux sommets particuliers notés $e^{(1)}$ et $e^{(2)}$ sur la figure 2.4. En résumé, la boîte noire de l'arête $e = \{u, v\}$ est identifiée par quatre sommets $[e, u_1]$, $[e, u_5]$, $[e, v_1]$, et $[e, v_5]$ appartenant à U. Observons que la boîte est construite de telle façon que s'il existe un quasi-couplage de U tel que $\mu_m(U) \leq 1$, alors la propriété suivante est satisfaite :

Propriété 2.1 *Seuls deux sommets de la boîte e sont reliés à un sommet extérieur à celle-ci et ces deux sommets sont soit les sommets $[e, u_1]$ et $[e, u_5]$, soit les sommets $[e, v_1]$ et $[e, v_5]$.*

Nous prouverons cette propriété plus tard, à la fin de la description de la transformation.

Pour chaque sommet $v \in V$, soient $e_1, \ldots, e_d$ les d arêtes incidentes à v (d est le degré de v). Pour $i = 1, \ldots, d - 1$, la boîte noire de l'arête e_i est reliée à la boîte noire de l'arête e_{i+1} par une arête $\{[e_i, v_5], [e_{i+1}, v_1]\}$ (voir la figure 2.6). Toutes ces connexions forment un chemin Q_v.

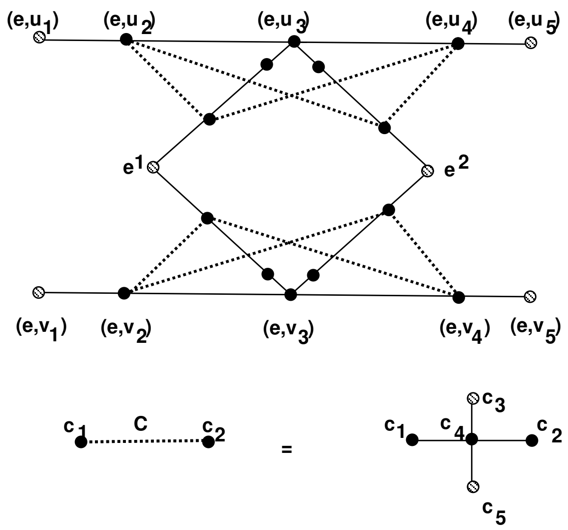


FIG. 2.4: *La boîte noire de l'arête $e = \{u, v\}$ (les lignes pointillées représentent une croix de cinq sommets). Les sommets appartenant à U sont grisés.*

$$\begin{aligned} Q_v = \; & \{[e_1, v_1], [e_1, v_2], \ldots, [e_1, v_5], [e_2, v_1], \ldots, [e_2, v_5] \\ & [e_2, v_1], \ldots, [e_2, v_5], \ldots, [e_d, v_1], \ldots, [e_d, v_5]\}. \end{aligned}$$

Finalement, les premier et dernier sommets de Q_v, $[e_1, v_1]$ et $[e_d, v_5]$, sont connectés aux sommets $y_1, \ldots, y_{2b}$. En fait, ceci définit un graphe biparti complet $K_{2,2b}$ (voir la figure 2.6). Enfin, l'ensemble U est alors défini par

$$\begin{aligned} U = \; & \{[e, u_1], [e, u_5], [e, v_1], [e, v_5], e^{(1)}, e^{(2)} \;/ e \in E\} \\ & \cup \{c_3, c_5, \text{ pour chaque croix } C\} \\ & \cup \{x_i, y_i, z_i, \; i = 1, \ldots, 2b\}. \end{aligned}$$

Tous les nœuds de U sont grisés sur les figures 2.4 et 2.6. Bien sûr, G' et U peuvent être construits en temps polynomial à partir de G et de b.

Soit $\mathcal{P}$ un quasi-couplage de U ne contenant que des plus courts chemins et satisfaisant $\mu(U, \mathcal{P}) \leq 1$. Tout d'abord, nous allons démontrer la propriété 2.1 satisfaite par $\mathcal{P}$ dans la boîte noire d'une arête $e = \{u, v\}$. Dans toute croix C de la boîte noire, les sommets c_3 et c_5 doivent être connectés ensemble, sinon $\mu(U, \mathcal{P}, c_4) > 1$. En outre, aucun autre chemin de $\mathcal{P}$ traverse la croix C, sinon la charge de c_4 augmenterait. Par ce fait, les sommets $e^{(1)}$ et $e^{(2)}$ doivent être connectés ensemble, car connecter $e^{(1)}$ par un plus court chemin à un nœud de U distinct de $e^{(2)}$ requiert de passer à travers une croix, et nous avons vu que cela n'était pas possible. Le sommet $[e, u_1]$ ne peut pas être connecté au sommet $[e, u_5]$ ou, à un quelconque sommet qui n'appartiendrait pas à la même boîte noire, car sinon le chemin devrait traverser une croix. Si le sommet $[e, u_1]$ est connecté au sommet $[e, u_5]$, alors le sommet $[e, v_1]$ n'est pas relié au sommet $[e, v_5]$ car sinon la charge du sommet $[e, u_3]$ ou du sommet $[e, v_3]$ serait supérieure à 1 en raison du chemin reliant $e^{(1)}$ à $e^{(2)}$. Nous pouvons faire le même raisonnement en supposant que le sommet $[e, u_1]$ n'est pas connecté au sommet $[e, u_5]$. Ainsi nous avons démontré la propriété 2.1.

Montrons qu'il existe un quasi-couplage de U de charge maximale 1 utilisant uniquement des plus courts chemins si et seulement si G a un transversal de taille b ou inférieure.

◇ Supposons qu'il existe un quasi-couplage de U, noté $\mathcal{P}$, de plus courts chemins et tel que $\mu(U, \mathcal{P}) \leq 1$. Par la propriété 2.1, nous savons déjà quelle est la forme des chemins traversant des nœuds des boîtes noires. Pour chaque chemin $P_i = (x_i, y_i, z_i)$, un seul sommet de P_i peut être couplé à un sommet n'appartenant pas à P_i, car sinon la charge de y_i serait strictement plus grande que 1. Pour la même raison, deux sommets extérieurs à P_i ne peuvent pas être reliés via le sommet y_i. Sans perte de généralité, nous pouvons donc supposer que le sommet y_i est le sommet qui doit être couplé à un sommet en dehors du chemin P_i. Soit u un sommet de G, et soient $e_1, e_2, \ldots, e_d$ ses arêtes incidentes en notant d le degré de u. Si le sommet $[e_1, u_1]$ est relié à un sommet y_i alors, par la propriété 2.1, le sommet $[e_1, u_5]$ sera connecté avec le sommet $[e_2, u_1]$. Donc $[e_2, u_5]$ sera couplé avec $[e_3, u_1]$ et ainsi de suite jusqu'à ce que $[e_d, u_5]$ soit couplé avec un sommet y_j.

  Soit S l'ensemble des sommets de G tels que les sommets $[e_1, u_1]$ et $[e_d, u_5]$ soient couplés à des sommets de type $y_i, i \in \{1, \ldots, 2b\}$ dans le quasi-couplage de U. Notez que $|S| \leq b$. Supposons que S ne soit pas un transversal de G. Soit e une arête de G telle qu'aucune de ses extrémités n'appartienne à S. Par la propriété 2.1, au moins deux sommets de la boîte noire correspondante à e doivent être connectés à un sommet extérieur à celle-ci. Notons u l'extrémité de e telle que les sommets $[e, u_1]$ et $[e, u_5]$ soient tous deux connectés à des sommets extérieurs de la boîte noire de e dans $\mathcal{P}$. Le sommet $[e, u_5]$ est connecté à un sommet $[e', u_1]$, le sommet $[e', u_5]$ est connecté à un sommet $[e'', u_1]$, et ainsi de suite. Finalement, si le degré de u est d et si $e_1, \ldots, e_d$ sont les d arêtes incidentes à u, alors le sommet $[e_{d-1}, u_5]$ est couplé au sommet $[e_d, u_1]$ du chemin Q_u. Le sommet $[e_d, u_5]$ doit alors être couplé à un sommet appartenant à l'ensemble $\{y_i, i = 1, ..., 2b\}$, car sinon la charge d'un sommet dans $\{y_i, i = 1, ..., 2b\}$ serait plus grande que 1. Pour la même raison, le sommet $[e_1, u_1]$ doit être couplé à un sommet appartenant à $\{y_i, i = 1, \ldots, 2b\}$. Nous avons donc $u \in S$ et nous arrivons à une contradiction. Par conséquent, S est un transversal de G de taille au plus b.

◇ Réciproquement, supposons que $S \subset V$ soit un transversal de G de taille au plus b. Si $|S| < b$, alors nous pouvons toujours ajouter des sommets à S afin d'obtenir un transversal S' de taille b. Donc, nous pouvons supposer sans perte de généralité que $|S| = b$. Pour tout sommet s de G, soit d son degré et soit $e_1, \ldots, e_d$ ses d arêtes incidentes. Nous construisons le quasi-couplage de U noté $\mathcal{P}$ de la façon suivante. Les sommets de S sont étiquetés de 1 à b.

  – Si $s \in S$, alors soit i son étiquette dans S. Nous décidons que y_{2i} est couplé au sommet $[e_1, s_1]$, que le sommet $[e_1, s_5]$ est couplé au sommet $[e_2, s_1]$, et ainsi de suite jusqu'à ce que $[e_d, s_5]$ soit couplé à y_{2i+1}.
  – Si $s \notin S$, alors, pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, le sommet $[e_i, s_1]$ est couplé à $[e_i, s_5]$ et le chemin de $e^{(1)}$ vers $e_i^{(2)}$ passe à travers le sommet $[e_i, v_3]$ où e_i est l'arête $\{s, v\}$.

On peut vérifier que ce quasi-couplage de U a une charge égale à 1. On a $\mu(U, \mathcal{P}) \leq 1$ et tous les chemins dans $\mathcal{P}$ sont des plus courts chemins. □

Le théorème 2.9 montre qu'il est difficile de minimiser la charge des routeurs à chaque phase si les appels utilisent des plus courts chemins. Malheureusement, nous n'avons pas pu prouver ce résultat sans condition sur les quasi-couplages de U. Nous conjecturons que la NP-complétude de ce problème reste vraie même si aucune contrainte n'est posée sur la longueur des chemins du quasi-couplage.

Étant donné un graphe G, et u un de ses sommets, nous notons $M(G, u)$ le minimum de $\max_{i=1,\ldots,\lceil \log_2 n \rceil} \mu(U_i, \mathcal{P}_i)$ pris sur tous les protocoles de diffusion $\mathcal{B}$ à partir de u dans G qui s'effectuent en $\lceil \log_2 n \rceil$ phases dans le modèle commuté, et où $\mathcal{P}_i$ est l'ensemble des chemins correspondant au quasi-couplage de U_i généré à la phase i du protocole $\mathcal{B}$. Nous avons :

Théorème 2.10 *Le problème suivant est NP-complet :*
MINIMUM DE LA CHARGE SUR L'ENSEMBLE DE LA DIFFUSION (MCD)

Instance: *Un graphe G, un sommet u de G et un entier k.*

Question: $M(G, u) \leq k$?

Preuve. S'il existe un protocole de diffusion $\mathcal{B}$ tel que $M(G, u) = 0$ alors aucun sommet n'est un transmetteur à aucune des phases. Donc le protocole $\mathcal{B}$ est un protocole de diffusion à partir de u en $\lceil \log_2 n \rceil$ phases dans le modèle téléphone. La réciproque est vraie. Par conséquent le problème MCD avec $k = 0$ est équivalent au problème NP-complet DLOG. □

2.2.4 Minimisation des longueurs des appels

Nous nous intéressons maintenant aux temps de commutations induits par de longs chemins. Même si les réseaux utilisant le modèle commuté ne sont pas très sensibles à la longueur des chemins ($\beta >> \delta$ dans la formule 1.1), on peut souhaiter qu'un appel n'excède pas une distance raisonnable entre la source et la destination. Étant donné $\mathcal{P}$ un quasi-couplage de U, nous notons $L(U, \mathcal{P})$ la longueur maximale des chemins de $\mathcal{P}$. Soit $L(U) = \min_{\mathcal{P}} L(U, \mathcal{P})$. Si le temps de commutation des routeurs ne peut pas être négligé, $L(U)$ est un paramètre important à minimiser à chaque phase du protocole de diffusion partielle. Malheureusement, nous avons :

Théorème 2.11 *Le problème suivant est NP-complet :*
LONGUEUR MAXIMALE D'UN QUASI-COUPLAGE DE U (LMPC)

Instance: *Un graphe $G = (V, E)$, un sous-ensemble $U \subset V$ et un entier k.*

Question: $L(U) \leq k$?

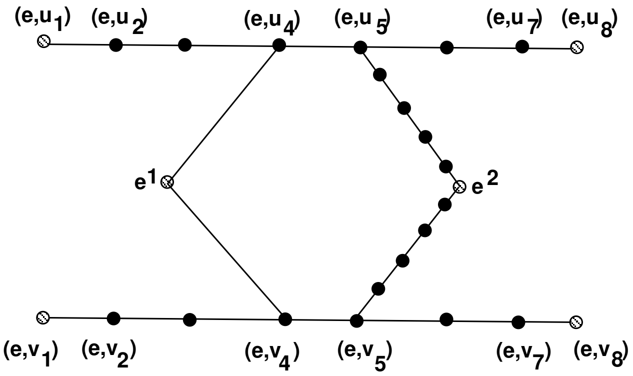


FIG. 2.5: *La boîte noire de l'arête $e = \{u, v\}$. Les sommets de U sont grisés.*

Preuve. Il est facile de montrer que LMPC dans NP. Pour prouver qu'il est NP-complet, nous transformons le problème CS en LMPC avec $k = 7$. Soit une instance arbitraire de CS donnée par un graphe $G = (V, E)$ et un entier positif b. Nous construisons une instance de LMPC, c'est-à-dire un graphe $G' = (V', E')$ et un sous-ensemble U de sommets de G', tel que U possède un quasi-couplage $\mathcal{P}$ satisfaisant $L(U, \mathcal{P}) \leq 7$ si et seulement si G a un transversal de taille b ou inférieure. La construction de G' est très similaire à celle de la preuve du théorème 2.9. Les seules différences sont :

1. Chacun des $2b$ chemins P_i de longueur 3 est transformé en un simple sommet y_i, $i = 1, \ldots, 2b$.

2. Les sous-graphes, appelés boîtes noires et correspondant aux arêtes de G, sont maintenant représentés dans la figure 2.5.

3. Chaque graphe biparti $K_{2,2b}$ reliant les deux points terminaux d'un chemin Q_u au sommet y_i, $i = 1, \ldots, 2b$ est légèrement transformé en remplaçant chaque arête par un chemin de longueur 7.

L'ensemble U est défini exactement comme dans la preuve du théorème 2.9. Le lecteur peut vérifier que les boîtes noires présentées satisfont la propriété 2.1 de la preuve du théorème 2.9. En fait, le reste de la preuve est identique à la preuve du théorème 2.9. □

En considérant le protocole dans son entier, nous avons obtenu des résultats similaires pour les paramètres suivants : la longueur maximum des chemins de tous les appels du protocole, et la somme des maxima des longueurs des chemins. Étant donné un graphe G et un sommet u de G, nous notons $L_{sum}(G, u)$ le minimum pris sur tous les protocoles de diffusion à partir de u s'effectuant en $\lceil \log_2 n \rceil$ phases dans le modèle commuté, de la somme des longueurs maximums des $\lceil \log_2 n \rceil$ quasi-couplages générés par ce protocole. Plus formellement, $L_{sum}(G, u) = \min_{\mathcal{B}} \sum_{i=1}^{\lceil \log_2 n \rceil} L(U_i, \mathcal{P}_i)$ où $\mathcal{P}_i$ est le quasi-couplage de U_i à la phase i du protocole de diffusion $\mathcal{B}$, $i = 1, \ldots, \lceil \log_2 n \rceil$. Nous avons :

Théorème 2.12 *Le problème suivant est NP-complet :*

SOMME MAXIMALE DES LONGUEURS DES APPELS (MAXSL)

Instance: *Un graphe G, un sommet u de G, et un entier k.*

Question: $L_{sum}(G, u) \leq k$?

Preuve. S'il existe un protocole $\mathcal{B}$ de diffusion tel que $L_{sum}(G, u) \leq \lceil \log_2 n \rceil$, alors tout appel satisfait les contraintes du modèle téléphone. Ainsi le protocole $\mathcal{B}$ est un protocole de diffusion à partir de u en $\lceil \log_2 n \rceil$ phases dans le modèle téléphone. La réciproque est clairement vraie. Ainsi le problème MaxSL avec $k = \lceil \log_2 n \rceil$ est équivalent au problème NP-complet DLOG. □

Étant donné un graphe G et un sommet u de G, $L_{max}(G, u)$ est le minimum pris sur tous les protocoles de diffusion à partir de u s'effectuant en $\lceil \log_2 n \rceil$ phases, des longueurs maximums de tous les chemins des $\lceil \log_2 n \rceil$ quasi-couplages générés à chaque phase par ce protocole. Plus formellement $L_{max}(G, u) = \min_{\mathcal{B}} \max_{i=1 \ldots \lceil \log_2 n \rceil} L(U_i, \mathcal{P}_i)$ où $\mathcal{P}_i$ est le quasi-couplage de U_i à la phase i du protocole de diffusion, $i = 1, \ldots, \lceil \log_2 n \rceil$. Nous avons :

Théorème 2.13 *Le problème suivant est NP-complet :*
MAXIMUM DE LA SOMME DES LONGUEURS MAXSL

Instance: *Un graphe G, un sommet u de G, et un entier k.*

Question: $L_{max}(G, u) \leq k$?

Preuve. Cette preuve est similaire à celle du théorème 2.12 : le problème MaxSL avec $k = 1$ est équivalent au problème NP-complet DLOG. □

2.3 Diffusion partielle dans les arbres

Nous allons maintenant restreindre notre étude au problème de la diffusion et de la diffusion partielle dans les arbres. Nous dériverons ainsi des bornes supérieures et inférieures sur le nombre total des liens utilisés $S(G, D, u)$ pour les arbres plus fines que les bornes du théorème 2.6.

Comme nous l'avons fait dans le chapitre 1, l'initiateur u de la diffusion est la racine de l'arbre T. Nous notons T_e et $\overline{T_e}$ les deux sous-arbres résultant de la suppression d'une arête e dans T. T_e contient la racine et $\overline{T_e}$ est le complémentaire de T_e dans l'arbre. Tout ensemble de sommets U contenant le sommet u induit une fonction w_U qui pondère les arêtes de T de la façon suivante. Nous définissons $w_U(e) = |V(T_e) \cap U|$, c'est-à-dire le nombre de sommets de U dans T_e. À partir de la fonction $w_U(e)$, nous reformulons la définition de la parité d'une arête. Une arête e est dit *paire* relativement à U si $w_U(e)$ est paire. Sinon, elle est dite *impaire* relativement à U.

Nous allons tout d'abord déterminer un protocole de diffusion presque identique à celui vu dans la section 1.3.1. Dans la section 1.3.1, le choix de l'émetteur d'un appel est fait arbitrairement. Ce choix est ici réglementé par certaines lois que l'on citera plus tard.

2.3.1 Protocole de diffusion partielle

Comme nous l'avons déjà fait précédemment, nous considérerons en fait le problème dual de la diffusion partielle, c'est-à-dire le problème de l'accumulation (inverser les appels dans une accumulation définit un schéma de diffusion). Dans le problème de l'accumulation, chaque nœud de l'ensemble des destinations D possède une certaine information que u doit fusionner. Un protocole d'accumulation est décrit par une séquence $D_0, D_1, \ldots, D_{\lceil \log_2 |D| \rceil}$ de sous-ensembles de sommets avec $D_0 = D$, $D_{\lceil \log_2 |D| \rceil} = u$ et $D_{t+1} \subseteq D_t$, pour tout t, $0 \leq t \leq \lceil \log_2 |D| \rceil$. D_t représente un ensemble de sommets tel que l'union des informations détenues par ces sommets à la phase t est exactement l'union de toutes les informations initialement détenues par tous les sommets de D. L'ensemble D_{t+1} est construit en utilisant seulement l'information de D_t. D_t est appelé l'ensemble *actif* à la phase t. Un sommet appartenant à un ensemble actif est appelé un sommet actif.

Commençons par introduire une autre notation. Étant donnés deux sommets x et y de l'arbre, nous notons par $s_t(x, y)$ le nombre d'avant-derniers bits égaux à 0 dans l'expression binaire des poids $w_{D_t}(e)$ des arêtes e appartenant au chemin de x à y dans T. En d'autres termes, s'il existe q arêtes sur le plus chemin de x à y dans T, et si les poids de ces q arêtes sont notés par $w^{(1)}, \ldots, w^{(q)}$, alors $s_t(x, y) = q - \sum_{i=1}^{q} w_2^{(i)}$. Pour simplifier, supposons dans un premier temps que $|D| = 2^k$.

Notre protocole d'accumulation procède comme dans la preuve du théorème 2.3, c'est-à-dire par une construction successive de quasi-couplages de D_t, $t = 0, \ldots, \lceil \log_2 |D| \rceil$. La sélection des sommets diffère cependant de la technique précédente (voir section 1.3.1). En effet, nous allons faire spécialement attention à la façon de choisir quelle extrémité de chacun des chemins du quasi-couplage de D_t est à conserver à la phase suivante. Plus précisément, la phase t de notre protocole peut être décomposée en deux phases :

1. Construire un quasi-couplage de D_t en utilisant seulement des arêtes impaires relativement à D_t (voir [42]).

2. Pour chaque couple de sommets (x, y) du quasi-couplage de D_t, soit z le premier ancêtre commun de x et y. Si $s_t(z, x) = s_t(z, y)$, alors choisir le sommet qui est le plus proche de la racine u, et le mettre dans l'ensemble D_{t+1} (choisir arbitrairement un de ces deux sommets si $d(x, u) = d(y, u)$). Si $s_t(z, x) < s_t(z, y)$, alors mettre x dans D_{t+1}, et si $s_t(z, x) > s_t(z, y)$, alors mettre y dans D_{t+1}.

Nous renvoyons le lecteur à [42, 49, 50] pour comprendre comment la phase 1 peut s'effectuer en temps polynomial.

2.3.2 Encadrement du nombre de liens utilisés dans une diffusion

Montrons que le protocole de diffusion en temps $\lceil \log_2 |D| \rceil$ de la section précédente satisfait le fait que le nombre d'arêtes utilisées durant les $\lceil \log_2 |D| \rceil$ phases est borné supérieurement par $2 \sum_{e \in E} g(w_D(e))$ où $g(\alpha)$ est égal au nombre de 1 dans la représentation binaire de l'entier α. Dans ce but, nous prouvons tout d'abord ce qui suit :

Lemme 2.14 *S'il y a α arêtes impaires avant la phase t (relativement à D_t), alors il y a au plus $\beta + \alpha/2$ arêtes impaires après la phase t (relativement à D_{t+1}) où β est la somme des avant-derniers bits des poids $w_{D_t}(e)$ de toutes les arêtes $e \in E$.*

Preuve. Puisque $|D| = 2^k$, le nombre de sommets actifs est divisé par 2 après chaque phase. Clairement, pour toute arête paire e à la phase t, $w_{D_{t+1}}(e) = \frac{w_{D_t}(e)}{2}$ et sa parité à la phase $t+1$ dépend de l'avant dernier bit de $w_{D_t}(e)$, une arête paire devenant impaire si l'avant dernier bit de son précédent poids était 1. Le cas des arêtes impaires est plus complexe. Toute arête impaire e relativement à D_t est utilisée pendant la phase t. Soit donc une arête impaire e utilisée pour un appel entre x et y. Soit z le premier ancêtre commun de x et y, et soit $w_{D_t}(e) = 2k+1$. Considérons les différentes possibilités pour le choix du nœud $v \in \{x, y\}$ mis dans D_{t+1}.

- Si $v \in V \setminus V(T_e)$, alors $w_{D_{t+1}}(e) = k$, et e reste impaire si et seulement si l'avant dernier bit de son précédent poids était un 1 (ou autrement dit, si k est impair). Ce cas est pris en compte dans le terme β de l'énoncé.
- Si $v \in V(T_e)$, alors $w_{D_{t+1}}(e) = k+1$, et e reste impaire si et seulement si l'avant dernier bit de son précédent poids était un 0 (ou autrement dit, si k est pair). Puisque le choix de conserver v comme un sommet actif permet de minimiser le nombre de zéros à l'avant dernière position de l'expression binaire des poids des arêtes entre x et y d'une part et de leur ancêtre commun z d'autre part, ce cas est pris en compte dans le terme $\alpha/2$ de l'énoncé.

Par conséquent, le lemme 2.14 est démontré. $\square$

Maintenant, soit $(w_D(e))_i$ le i^{eme} bit de l'expression binaire de $w_D(e)$, et soit $S_i = \sum_{e \in E}(w_D(e))_i$, pour $1 \le i \le \lceil \log_2 |D| \rceil$. Par définition, nous avons

$$\sum_{e \in E} g(w_D(e)) = \sum_{i=1}^{\lceil \log_2 |D| \rceil} S_i. \tag{2.1}$$

Après la première phase, au plus S_1 arêtes sont utilisées puisqu'il y a seulement S_1 arêtes impaires. D'après le lemme 2.14, au plus $S_2 + S_1/2$ arêtes sont utilisées à la deuxième phase. Plus généralement, nous avons :

Lemme 2.15 *À toute phase t, $1 \le t \le \lceil \log_2 |D| \rceil$, au plus $\sum_{i=1}^{t} \frac{S_i}{2^{t-i}}$ arêtes sont utilisées dans le quasi-couplage de D_t.*

Preuve. Nous utilisons le lemme 2.14, pour montrer que la somme des avant-derniers bits des poids $w_{D_t}(e)$ de toutes les arêtes $e \in E$ est égale à S_t. Nous avons vu que si $w_{D_t}(e)$ est impaire, alors $w_{D_{t+1}}(e) = \frac{w_{D_t}(e)}{2}$ et par conséquent, les bits de poids forts de $w_D(e)$ ne sont pas modifiés. Si $w_{D_t}(e) = 2k+1$, deux cas doivent être considérés : $w_{D_{t+1}}(e) = k$ ou $w_{D_{t+1}}(e) = k+1$. Dans le premier cas, les bits de poids forts de $w_D(e)$ ne sont pas modifiés. Le deuxième cas arrive seulement lorsque les avant-derniers bits de $w_{U_t}(e)$ sont 0 et, par conséquent, les bits de poids forts de $w_D(e)$ ne sont pas modifiés. Ceci montre que la somme des avant-derniers bits des poids $w_{U_t}(e)$ de toutes les arêtes $e \in E$ est égale à S_t. □

Maintenant, il est facile de vérifier que

$$\sum_{t=1}^{\lceil \log_2 |D| \rceil} \sum_{i=1}^{t} \frac{S_i}{2^{t-i}} \leq 2 \sum_{i=1}^{\lceil \log_2 |D| \rceil} S_i,$$

c'est-à-dire, en utilisant l'équation 2.1,

$$\sum_{t=1}^{\lceil \log_2 |D| \rceil} \sum_{i=1}^{t} \frac{S_i}{2^{t-i}} \leq 2 \sum_{e \in E} g(w_D(e)).$$

Ceci termine le cas où $|D| = 2^k$.

Si $|D|$ n'est pas une puissance de deux, c'est-à-dire si $|D| = 2^k - a$ où $0 < a < 2^k$, on peut considérer la diffusion partielle dans un arbre T' de $n + a$ sommets qui consiste en T plus a "nouveaux" sommets directement connectés à la racine u, et formant un ensemble stable S (un ensemble stable est un ensemble de sommets sans arête entre eux). Soit $D' = D \cup S$. D' a un nombre de sommets qui est une puissance de 2. Nous pouvons donc appliquer l'algorithme à D' dans T'. De plus, nous opérons de telle sorte que tout sommet de S communique soit avec un autre sommet de S, soit avec u. Ceci est possible car tout quasi-couplage qui ne satisfait pas le fait que tous les sommets de S communiquent soit avec un autre sommet de S soit avec u peut être transformé en un autre quasi-couplage qui satisfait cette propriété, et cela sans accroître le nombre d'arêtes utilisées. En effet, supposons que $s \in S$ est relié avec $v \notin S$. Deux cas peuvent être considérés : soit il existe un autre sommet $s' \in S$ qui est connecté avec $v' \notin S$, soit il n'en existe pas. Dans le premier cas, nous remplaçons les couplages $\{s, v\}$ et $\{s', v'\}$ par $\{s, s'\}$ et $\{v, v'\}$. Dans le deuxième cas, si $v \neq u$, alors on remplace les couplages $\{s, v\}$ et $\{u, w\}$ par $\{s, u\}$ et $\{v, w\}$ où w est le sommet originalement couplé avec u. Appelons $\mathcal{A}'$ ce protocole.

Si on ne considère pas les appels impliquant des sommets de S, $\mathcal{A}$' induit un protocole $\mathcal{A}$ qui accumule l'information de D dans la racine u de l'arbre T. Notons que, par construction de l'algorithme $\mathcal{A}$', u est le seul sommet potentiellement inactif de tout ensemble actif durant l'exécution de $\mathcal{A}$. Notons $S_{\mathcal{A}}$ (respectivement $S_{\mathcal{A}'}$) la somme globale des longueurs des chemins générés par l'exécution de $\mathcal{A}$ (respectivement $\mathcal{A}$'). Puisque $|D'|$ est une puissance de 2, nous avons $S_{\mathcal{A}'} \leq 2 \sum_{e \in E(T')} g(w_{D'}(e))$. En fait, nous pouvons améliorer légèrement cette borne supérieure par $S_{\mathcal{A}'} \leq 2 \sum_{e \in E(T)} g(w_{D'}(e)) + \hat{S}(K_{1,a}, K_{1,a}, u)$ où $K_{1,a}$ est l'étoile de $1 + a$ sommets enracinée en u, et où la fonction $\hat{S}$ est définie comme S sauf que la minimisation est prise sur tous les protocoles de diffusion partielle dans lesquels le seul sommet actif non couplé dans un quasi-couplage est la source de la diffusion partielle. Puisque, dans $\mathcal{A}$', aucun sommet de S ne communique avec un sommet de T différent de la racine, nous avons $S_{\mathcal{A}} \leq S_{\mathcal{A}'} - \hat{S}(K_{1,a}, K_{1,a}, u)$. Par conséquent, $S(T, D, u) \leq 2 \sum_{e \in E(T)} g(w_{D'}(e))$. Finalement, puisque $g(w_{D'}(e)) = g(w_D(e))$, nous avons $S(T, D, u) \leq 2 \sum_{e \in E(T)} g(w_D(e))$. Nous pouvons résumer ce qui vient d'être dit dans ce début de section par le lemme suivant :

Lemme 2.16 *Soit $T = (V, E)$ un arbre, soit $D \subseteq V$ un ensemble arbitraire de sommets, soit $u \in D$. Nous avons $S(T, D, u) \leq 2 \sum_{e \in E} g(w_D(e))$ par l'algorithme de la section 2.3.1.*

Afin de trouver un minorant de $S(T, D, u)$, commençons par quelque notation. Nous définissons la fonction f par induction : $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, et

$$\text{pour tout entier } \alpha > 1,\ f(\alpha) = \min\left(f(\left\lceil \frac{\alpha}{2} \right\rceil), f(\left\lfloor \frac{\alpha}{2} \right\rfloor)\right) + (\alpha \bmod 2).$$

En terme d'expressions binaires, pour toute chaîne M binaire non vide, on peut vérifier que

- $f(M0) = f(M)$ et $f(M01) = f(M) + 1$;
- $f(M0N) = f(M1) + 1$ pour toute chaîne $N = 11\ldots11$ de longueur au moins 2.

Par exemple, on a

$$f(110011101011) = f(1100111011) + 1 = f(11001111) + 2 = f(1101) + 3 = f(11) + 4 = 6.$$

Considérons ce qui arrive, lors d'une diffusion partielle, à une arête e de poids $w_D(e)$. Soit $K_e = V(T_e) \cap D$. Intuitivement, si $|K_e|$ est pair, alors e ne sera pas utilisée dans un quasi-couplage de D. Cependant, si $|K_e|$ est impair, alors e sera utilisée et, en fonction du choix de l'une des deux extrémités du chemin passant par e (voir la preuve du théorème 2.3), nous aurons $\left\lceil \frac{|K_e|}{2} \right\rceil$ ou $\left\lfloor \frac{|K_e|}{2} \right\rfloor$ destinations du même côté de u relativement à e. Ainsi, intuitivement, $\sum_{e \in E} f(w_D(e))$ est une borne inférieure pour $S(G, D, u)$.

Plus formellement, nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.17 *Soit $T = (V, E)$ un arbre, soit $D \subseteq V$ un ensemble arbitraire de sommets, et soit $u \in D$. Nous avons $\sum_{e \in E} f(w_D(e)) \leq S(T, D, u) \leq 2 \sum_{e \in E} g(w_D(e))$.*

Preuve. Comme nous avons déjà déterminé la borne supérieure de cet encadrement dans le lemme 2.16, nous allons nous concentrer sur la preuve de la borne inférieure.

Supposons pour commencer que $|D| = 2^k$ et prouvons, par récurrence sur k, que toute arête e est utilisée au plus $f(w_D(e))$ fois dans tout protocole de diffusion partielle de u vers D. Ce résultat est clairement vrai pour $k = 0$. Soit $k > 0$, et supposons que toute arête e est utilisée au plus $f(w_D(e))$ fois dans tout protocole de diffusion partielle de u vers tout ensemble D tel que $|D| = 2^i, 0 \leq i < k$.

À toute phase de tout protocole de diffusion partielle s'effectuant en un nombre de phases optimal, tous les nœuds actifs prennent part aux appels, et comme prouvé dans [42, 49, 50], seulement les arêtes impaires peuvent être utilisées dans le quasi-couplage. Soit D' l'ensemble des nœuds actifs après la première phase d'un protocole d'accumulation quelconque. $|D'| = 2^{k-1}$.

- Si une arête e est paire avant la première phase, alors aucun appel n'utilise cette arête et le poids de e est simplement divisé par 2. Par hypothèse de récurrence, l'arête e sera ensuite utilisée au moins $f(w_{D'}(e))$ fois dans tout protocole de diffusion partielle, c'est-à-dire au moins $f(w_D(e))$ fois par définition de f puisque $w_D(e)$ est pair.

– Si une arête e est impaire avant la première phase, alors un appel entre deux sommets utilise cette arête à la première phase de tout protocole d'accumulation. Suivant le choix du nœud actif pour la phase suivante, le poids de l'arête e sera égal à $\lceil w_D(e)/2 \rceil$ ou à $\lfloor w_D(e)/2 \rfloor$. Par conséquent, une arête e est utilisée au moins $1 + \min(f(\lceil w_D(e)/2 \rceil),\ f(\lfloor w_D(e)/2 \rfloor))$ fois, c'est-à-dire au moins $f((w_D(e))$ fois par définition de la fonction f.

Le cas où $|D|$ n'est pas une puissance de 2 peut être résolu en utilisant les mêmes arguments que dans la preuve de la borne supérieure. Ceci conclut la preuve. □

Bien que nous pensions que les deux bornes du théorème 2.17 diffèrent en moyenne d'un petit facteur (éventuellement une constante), nous n'avons pas réussi à prouver ce fait. Il y a des arbres pour lesquels les deux bornes diffèrent de plus d'une constante (par exemple l'arbre binaire). Cependant, dans de nombreux exemples, comme le chemin, l'étoile, et l'arbre binomial, ces deux bornes diffèrent au plus d'un facteur 3. Aussi, on peut montrer facilement que la valeur moyenne du rapport $\frac{g(\alpha)}{f(\alpha)}$ est bornée par une constante quand α est choisi aléatoirement selon une loi uniforme.

Remarque : On peut également minimiser le nombre de transmetteurs et leur charge à chaque phase en temps polynomial pour les arbres. En effet, en utilisant la terminologie de cette preuve, seulement les arêtes impaires appartiennent à des appels du quasi-couplage. Ces deux paramètres peuvent ainsi être déterminés en fonction du nombre d'arêtes impaires incidentes à un sommet. Un sommet est un transmetteur si au moins deux arêtes impaires lui sont incidentes, ces deux arêtes correspondant à un appel qui le traverse. De plus, la charge d'un transmetteur est égale à $\lfloor n_i/2 \rfloor$ où n_i correspond au nombre d'arêtes impaires qui lui sont incidentes.

2.4 Conclusion

La table 2.4 résume la complexité des problèmes de minimisation reliée au problème de la diffusion partielle dans le modèle commuté avec ou sans fonction de routage.

	diffusion partielle	quasi-couplage de U
Somme des longueurs des chemins	NP-complet (Théorème 2.5)	**P** (Lemme 2.2)
Nombres de transmetteurs	NP-complet (Théorème 2.8)	NP-complet (Théorème 2.7)
Charge des transmetteurs	NP-complet (Théorème 2.10)	NP-complet (Théorème 2.9)
Longueur maximum des chemins	NP-complet (Théorème 2.12)	NP-complet (Théorème 2.11)
Somme des longueurs maximum des chemins	NP-complet (Théorème 2.13)	

TAB. 2.1: *Complexité des problèmes de minimisation des ressources.*

Même si la plupart de ces problèmes sont NP-complets, le principal paramètre à optimiser dans le modèle commuté reste l'utilisation de la bande passante. Un protocole de communication dans le modèle commuté se doit en effet de minimiser la congestion des liens. De ce point de vue, nous avons mis en évidence un algorithme polynomial qui calcule, pour tout réseau et pour toute fonction de routage adaptative de plus court chemin, un protocole de diffusion partielle qui s'effectue en nombre optimal de phases. En outre, ce protocole satisfait le fait que la somme des longueurs des chemins à chaque phase soit minimum. En d'autres termes, la bande passante requise par le protocole à chaque phase est minimum. Même si minimiser l'utilisation de la bande passante globale pour toutes les phases du protocole est NP-complet, notre algorithme approche la borne inférieure à un facteur multiplicatif logarithmique près. De plus, nous avons mis en évidence une stratégie spécifique pour les arbres. Cette stratégie approche la borne inférieure de la bande passante utilisée à un facteur multiplicatif également logarithmique, mais ce facteur est conjecturé être une constante en moyenne.

La minimisation simultanée du nombre de phases et d'autres ressources comme le nombre de transmetteurs, la charge des transmetteurs, le maximum de la longueur des chemins, et la somme des maxima des longueurs des chemins utilisés à chaque phase mène à des problèmes de décision NP-complets. Puisque ces problèmes ne sont pas critiques pour le modèle commuté avec fonction de routage, nous n'avons pas essayé de donner des solutions approximatives.

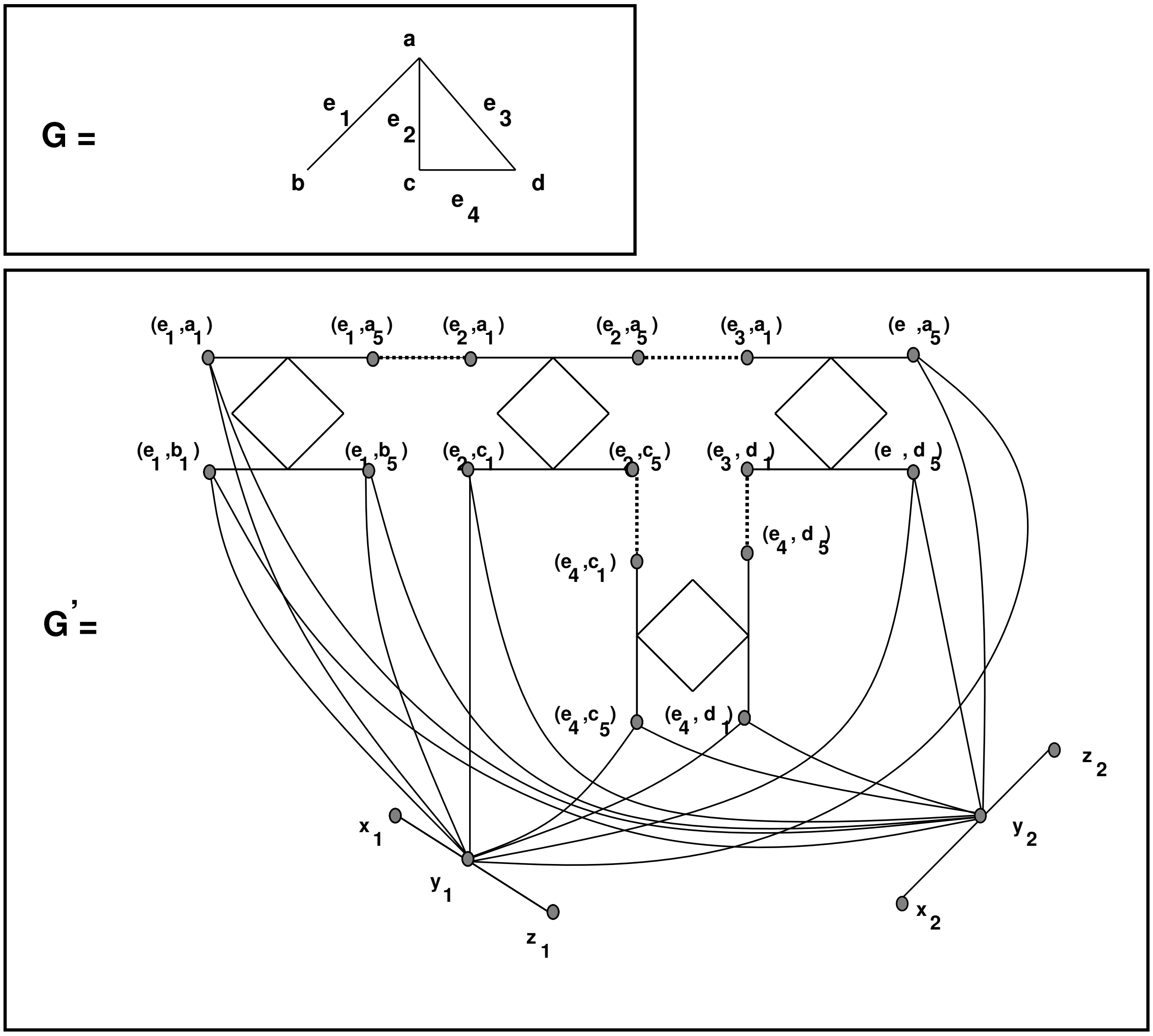


FIG. 2.6: *Un exemple d'application de la transformation décrite dans la preuve du théorème 2.9 avec* $b = 1$*. Les losanges dessinés représentent les boîtes noires (voir figure 2.4).*

CHAPITRE

3 Échange total 1-port dans les anneaux à cordes

Les travaux présentés dans ce chapitre ont été partiellement réalisés en collaboration avec E. Barrière et M. Midjana [5].

Précédemment, nous nous sommes intéressés à la diffusion dans le mode commuté et nous avons vu qu'un protocole de diffusion optimal en nombres de phases peut se calculer temps polynomial. Par contre, à notre connaissance, la complexité du problème de l'échange total reste inconnue. Klasing [45] a donné une borne inférieure du temps d'échange total en fonction de l'arête-bissection. Le nombre de phases des protocoles d'échange total connus pour certaines topologies [40, 38] est égal à cette borne à un facteur additif $O(\log \log k)$ près où k est l'arête-bissection. L'objectif de ce chapitre est de vérifier l'acuité de cette borne pour des graphes plus complexes que ceux préalablement étudiés. Nous avons choisi les "anneaux à cordes" afin de tester la borne de Klasing.

Définition 3.1 [Coxeter[17]] *Soit N un entier pair et soit c un entier impair compris entre 1 et $N/2$. L'*anneau à cordes *de N sommets et de corde c, noté $\mathbf{C(N,c)}$ est le graphe dont tous les sommets pairs i ont pour voisins les sommets $i-1$, $i+1$ et $i+c$, tous les calculs étant effectués modulo N.*

La figure 3.1 donne un exemple d'anneau à cordes.

3.1 Propriétés des anneaux à cordes

Les anneaux à cordes forment une famille de réseaux à boucle généralisés [8]. La structure de ces graphes a été étudiée de façon intensive [1, 4, 48, 63]. Suite aux travaux de Klasing, notre étude nécessite de déterminer la valeur de l'arête-bissection.

3.1.1 Majoration de l'arête-bissection

On peut facilement majorer l'arête-bissection d'un anneau à cordes par sa corde.

Lemme 3.1 *Soit $\mathbf{C(N,c)}$ l'anneau à cordes d'ordre N et de corde c. Soit k l'arête-bissection de $\mathbf{C(N,c)}$. On a $k \leq c+2$.*

Preuve. Partageons le graphe en deux sous-ensembles de sommets A et B où A est composé des sommets entre 0 à $N/2-1$, et B des sommets entre $N/2$ et $N-1$ (voir figure 3.1).

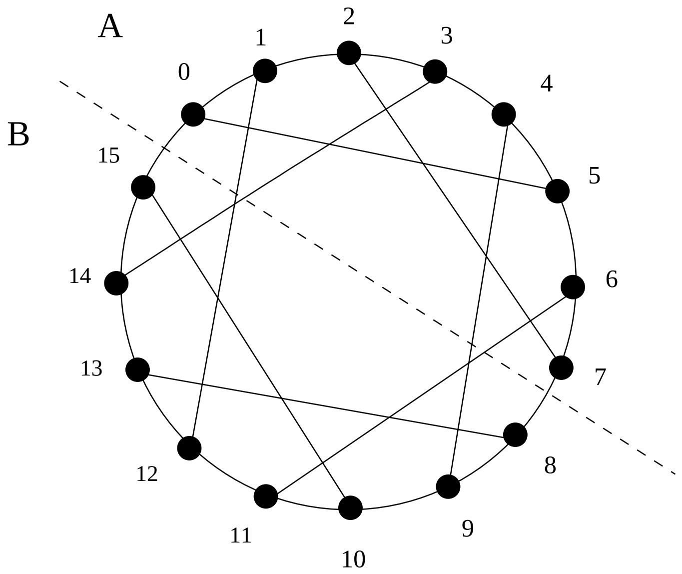


FIG. 3.1: *Un anneau à cordes de* 16 *sommets et de corde* 5

Comptons le nombre d'arêtes connectant A à B. Notons D l'ensemble de ces arêtes. Par définition, $D = \{\{i, j\}$ arête de $\mathbf{C(N, c)}$, $i \in \{0, N/2-1\}$, $j \in \{N/2, N-1\}\}$.

Considérons le cas où $N/2$ est pair. Les arêtes suivantes sont dans D :

– celles connectant les sommets pairs de B aux sommets impairs de A : $\{N-c+1, 1\}$, $\{N-c+3, 3\}$, ..., $\{N-2, c-2\}$;

– celles connectant les sommets pairs de A aux sommets impairs de B :
$\{N/2-c+1, N/2+1\}$, $\{N/2-c+3, N/2+3\}, \ldots, \{N/2-2, N/2+c-2\}$;

– les arêtes $\{N-1, 0\}$ et $\{N/2-1, N/2\}$.

Ainsi, nous obtenons que $|D| = (c-1)/2 + (c-1)/2 + 2 = c+1 \geq k$. Pour le cas où $N/2$ est impair, nous appliquons les mêmes arguments que précédemment, et nous obtenons $|D| = c+2 \geq k$. □

En appliquant le lemme 3.1 et le théorème 1.3, nous pouvons déduire une borne inférieure du nombre de phases nécessaires pour réaliser l'échange total dans les anneaux à cordes $\mathbf{C(N, c)}$.

Lemme 3.2 *Soit $C(N, c)$ un anneau à cordes de N nœuds et de corde c. On a :*

$$g_1(C(N, c)) \geq 2\lceil \log_2 N \rceil - \lceil \log_2 (c+2) \rceil - \log_2 \log_2 (c+2) - 2$$

3.1.2 Décomposition des sommets de l'anneau à cordes

Nous introduisons ici une décomposition des sommets de l'anneau à cordes $\mathbf{C(N, c)}$ qui sera utilisée lors de notre construction du notre protocole d'échange total. Le graphe $\mathbf{C(N, c)}$

possède comme sous-graphes, les cycles $C_0, \ldots, C_{\lfloor \frac{N}{c+1} \rfloor - 1}$ tel que chaque cycle C_i est définie de la fonction suivante :

$$C_i = \{i(c+1), i(c+1)+1, \ldots, i(c+1)+c\}.$$

Si $N = a(c+1)+b$ avec $0 \leq b < c+1$, alors l'anneau à cordes $\mathbf{C(N,c)}$ est composé de a cycles arête-disjoints de longueur $c+1$, numérotés de 0 à $a-1$, d'un chemin de b sommets, et des arêtes joignant les sous-graphes. Notons que, nécessairement, b est pair.

Étant donné un cycle C_i, pour tout $j \in \{0, \ldots, c\}$, le sommet $i(c+1)+j$ est appelé le $j$ème sommet du cycle C_i. Nous pouvons remarquer que le sommet 0 de C_i est connecté aux sommets 1 et c du cycle C_i. En outre, pour tout i, $0 \leq i < \lfloor \frac{N}{c+1} \rfloor - 1$, les cycles C_i et C_{i+1} sont reliés par $(c+1)/2$ arêtes. Parmi ces arêtes, $(c-1)/2$ sont des cordes (des arêtes du type $\{x, x+c\}$), et une est du type $\{x, x+1\}$. En d'autres termes, pour toute valeur paire de j, le $j$ème sommet de C_i est adjacent au $(j-1)$ème sommet de C_{i+1} par une corde. La figure 3.2 illustre cette décomposition pour l'anneau à cordes $\mathbf{C(64,7)}$.

3.2 Protocole d'échange total

La méthode en trois étapes présentée dans la section 1.1 est utilisée pour obtenir un protocole d'échange total. Les composantes d'accumulation sont composées ici d'un ou plusieurs cycles "voisins". Comme les composantes sont connexes, les protocoles de diffusion et d'accumulation à partir de chaque représentant dans sa composante peuvent s'effectuer en parallèle optimalement [24]. Le point délicat est de choisir de façon pertinente les composantes et leur taille afin que l'échange total puisse se réaliser en nombre de phases le plus petit possible. Nous adaptons ici le protocole d'échange total dans un graphe complet en mode téléphone, 1-port (voir les algorithmes 3.1 et 3.2)[46]. Un appel entre les sommets i et j de K_N sera remplacé par un appel entre le représentant de la $i$ème composante et celui de la $j$ème composante.

Algorithme 3.1 Échange total dans le graphe complet K_N, avec N pair.

pour j:=1 **à** $\lceil \log_2 N \rceil$ **faire**
  pour chaque sommet pair i **faire** en parallèle
    le nœud i appelle $i + 2^j - 1 \pmod N$.

Algorithme 3.2 Échange total dans le graphe complet K_N, avec N impair.

m:= $\lfloor N/2 \rfloor$;
pour chaque sommet $0 \leq i < N/2$ **faire** en parallèle
  le nœud i appelle $i + m \pmod N$.
si m est impair **alors** $n' = m+1$ **sinon** $n' = m+2$;
Faire un échange total dans un graphe complet entre les sommets $\{0, \ldots, n'\}$;
pour chaque sommet $i < N/2$, **faire** en parallèle
  le nœud i appelle $i + m \pmod N$.

Dans la suite, nous décrivons un algorithme polynomial pour déterminer un protocole d'échange total dans tout anneau à cordes $\mathbf{C(N,c)}$. Nous distinguons deux cas : $N = a(c+1)$ et $N = a(c+1)+b$ où $2 \leq b \leq c-1$. Dans les deux cas, nous partagerons le graphe en un certain nombre de composantes, disons δ composantes, telles que le nombre de sommets de chaque composante soit au plus égal à $\lceil N/\delta \rceil$. Ensuite, nous expliquerons comment choisir les représentants dans chaque composante. Finalement, nous fixerons les chemins correspondant aux appels de façon à ce que l'étape d'échange total entre les représentants s'effectue optimalement. Par convention, les entiers r et s représentent respectivement, dans la suite, le nombre de composantes et la taille maximale d'une composante.

3.2.1 Anneaux à cordes particuliers

Nous étudions ici le cas $N = a(c+1)$. Puisque le graphe contient a cycles de $c+1$ sommets (voir la section 3.1.2), les composantes sont définies comme une union de cycles consécutifs (c'est-à-dire le sous-graphe ayant uniquement les sommets d'une composante est connexe). En fait, deux types de décompositions se présentent en fonction du paramètre a :

- Si $a \leq c-1$, alors le graphe se décompose en a composantes ($r = a$) où chaque composante est un cycle de $c+1$ sommets ($s = c+1$).

- Si $a > c-1$, alors il y a $c-1$ composantes ($r = c-1$). En supposant que $a = \alpha(c-1)+\beta$, alors β de ces composantes sont définies comme une union de $\alpha+1$ cycles consécutifs de $c+1$ sommets, et $c-1-\beta$ de ces composantes sont définies comme une union de α cycles de $c+1$ sommets ($s = (c+1)(\alpha+1)$).

Nous étiquetons les composantes entre 0 et $r-1$. Dans la $k$ème composante, les cycles sont étiquetés entre 1 et Γ_k, où Γ_k est le nombre de cycles dans la composante k. Ainsi, le sommet j du cycle i dans la $k$ème composante est noté par $[k,i,j]$. Le sommet $[k,1,c-1]$ est défini comme le représentant de la composante k.

Puisque nous savons comment effectuer une diffusion ou une accumulation optimalement dans un graphe connexe dans le modèle commuté, focalisons-nous sur l'étape d'échange total entre les représentants. Soit $\mathcal{P}_{i \to i+\ell \pmod r}$ le chemin correspondant à l'appel entre le représentant de la composante i et celui de la composante $i+\ell \pmod r$, $i = 0,\ldots,r-1$ et $\ell = 1,\ldots,r/2$. $\mathcal{P}_{i \to i+\ell}$ est défini comme une union de chemins notés $P(i,0), P(i,1),\ldots, P(i,\ell)$ où $P(i,k)$ est défini comme suit (dans la suite, par souci de simplification, nous posons $R = c-1$) :

1. Si $k = 0$, alors nous considérons deux cas :

   - Si la composante i est composée d'un seul cycle de $c+1$ sommets, alors $P(i,k) = \{[i,1,R],[i+1,1,R-1]\}$
   - si la composante i est composée de Γ_i cycles de $c+1$ sommets alors $P(i,k) = \big\{[i,1,R],[i,j,R-1],[i,j,R],\ j = 2\ldots,\Gamma_i\big\} \cup \{[i+1,1,R-1]\}$.

2. Si $0 < k \leq \ell - 1$, alors nous considérons deux cas :
   - Si la composante $i + k$ est composée d'un seul cycle de $c + 1$ sommets, alors $P(i, k) = \{[i + k, 1, R - 2k + 1], [i + k, 1, R - 2k], [i + k + 1, 1, R - 2k - 1]\}$.
   - si la composante $i + k$ est composée de Γ_{i+k} cycles de $c + 1$ sommets alors
   $$\begin{aligned} P(i,k) = \ & \{[i + k, 1, R - 2k + 1], [i + k, 1, R - 2k]\} \\ & \cup \{[i + k, j, R - 2k - 1], [i + k + 1, j, R - 2k],\ j = 2, \ldots, \Gamma_{k+i}\} \\ & \cup \{[i + k + 1, 1, R - 2k - 1]\} \end{aligned}$$
3. Si $k = \ell$, alors le chemin $P(i, \ell)$ est un chemin dans la composante $i + \ell$, allant du sommet $[i+\ell, 1, R-2\ell+1]$ au sommet $[i+\ell, 1, R]$ en passant par le sommet $[i+\ell, 1, 0]$.

Observons qu'à toute phase de l'algorithme 3.1 décrivant l'échange total dans un graphe complet, chaque appel s'effectue entre un nœud pair et un nœud impair. Dans l'anneau à cordes, les appels se réalisent entre les représentants d'une composante paire et ceux d'une composante impaire. Le résultat suivant est capital pour la suite :

Lemme 3.3 *Soit $\epsilon \in \{0,\ 1\}$. Pour toute valeur impaire de $\ell < R/2$, et pour tout i, $i = 0, \ldots, r/2$, tous les chemins $\mathcal{P}_{2i+\epsilon \to 2i+\epsilon+\ell}$ sont deux-à-deux arête-disjoints.*

Preuve. Supposons sans perte de généralité que $\epsilon = 0$. Considérons une composante quelconque k. Soit Γ_k le nombre de cycles de $c + 1$ sommets dans cette composante. Nous nous focalisons sur les appels qui traversent la composante k. Supposons k impair. L'appel $\mathcal{P}_{k-1\to k-1+\ell}$ traverse la composante k par définition (voir la définition de $\mathcal{P}_{k-1\to k-1+\ell}$, cas 2). En outre, $\mathcal{P}_{k-1\to k-1+\ell}$ contient tous les sommets de

$$\{[k, 1, R - 1], [k, 1, R - 2]\} \cup \{[k, j, R - 2], [k, j, R - 3],\ j = 2, \ldots, \Gamma_k\}.$$

L'appel $\mathcal{P}_{k-3\to k-3+\ell}$ traverse aussi la composante k, et $\mathcal{P}_{k-3\to k-3+\ell}$ contient tous les sommets de

$$\{[k, 1, R - 5], [k, 1, R - 6]\} \cup \{[k, j, R - 5], [k, j, R - 7],\ j = 2, \ldots, \Gamma_k\}.$$

Il est facile de prouver par récurrence que, pour tout entier $h < R/2$, $0 \leq h \leq \ell-1$, h impair, $\mathcal{P}_{k-h\to k-h+\ell}$ traverse la composante k en utilisant tous les sommets de

$$\{[k, 1, R - 2h + 1], [k, 1, 2h]\} \cup \{[k, j, R - 2h], [k, j, R - 2h - 1],\ j = 2, \ldots, \Gamma_k\}.$$

Finalement, le chemin $\mathcal{P}_{i\to k}$ contient aussi tous les sommets de $\{[k, 1, j],\ j = 0, \ldots, R-2\ell+1\}$[1] et tous les sommets de $\{[k, 1, j],\ j = c, \ldots, R\}$ (voir la définition de $\mathcal{P}_{k-1\to k-1+\ell}$, cas 3). Nous pouvons appliquer le même raisonnement pour le cas où k est pair. Ainsi, tous les appels traversant la composante k sont sommet-disjoints et, par conséquent, arête-disjoints.

Nous pouvons appliquer les mêmes arguments pour k pair. Ce qui prouve le lemme. □

Distinguons maintenant deux cas selon la parité du nombre de composantes.

1. pour $R - 2\ell + 1 \geq 0$, c'est-à-dire $R/2 > \ell$.

a) Le nombre de composantes est pair ($r = 2r'$). Appliquons le lemme 3.3, pour déterminer le nombre de phases de l'étape d'échange total :

- à chaque phase $t = 1, \ldots, \lceil \log_2 r \rceil - 2$, les appels s'effectuent entre le représentant de la composante i et celui de la composante $i + 2^t - 1$, pour tout i pair entre 0 et $r/2$. Pour tout $t = 1, \ldots, \lceil \log_2 r \rceil - 2$, nous avons $2^t - 1 \leq (c-1)/2 \leq R/2$, donc d'après le lemme 3.3, les appels sont deux-à-deux arête-disjoints.

- à la phase $t = \lceil \log_2 r \rceil - 1$, nous avons $2^t - 1 \geq (c-1)/2 \geq R/2$. Les appels s'effectuent entre le représentant de la composante i et celui de la composante $i + 2^t - 1$ pour tout i pair entre 0 et $r/2$. Contrairement aux phases précédentes, ces appels ne traversent pas les composantes $i+1$, $i+2$, …, $i+2^t-1$, mais les composantes $i+2^t$, $i+2^t+1$,…, $i-1$. Ces appels sont représentés par $\mathcal{P}_{j \to j+\ell}$ pour tout j impair et $\ell = r - 2^t - 1$. Comme $\ell \leq R/2$, les appels de cette phase sont deux-à-deux arête-disjoints.

- à la phase $t = \lceil \log_2 r \rceil$, nous avons $2^t - 1 \leq (c-1)/2 \pmod r$. Dans ce cas-ci, on peut se ramener au cas des phases $t = 1, \ldots \lceil \log_2 r \rceil - 2$.

Nous concluons ainsi que la décomposition en cycles effectuée dans la section 3.1.2 permet un échange total entre les représentants en $\lceil \log_2 r \rceil$ phases dans le modèle commuté. La figure 3.2 est un exemple de chemins $\mathcal{P}_{i \to i+3}$ correspondant à la phase $t = 2$ de l'échange total entre les représentants d'un anneau à cordes $\mathbf{C(64, 7)}$. Dans cet exemple, chaque composante possède seulement un cycle, le sommet j dans le cycle i est étiqueté par $[i, 1, j]$.

b) Le nombre de composantes est impair ($r = 2r' + 1$). La première phase et la dernière phase de l'échange total entre les représentants dans l'algorithme 3.2 sont identiques (voir les instructions 2 et 6). Pendant chacune de ces phases, tous les appels relient les représentants des composantes i et $i + r'$. Comme $r' < r/2 < R/2$, d'après le lemme 3.3, ces appels sont deux-à-deux arête-disjoints.

Après la phase 1, seulement les représentants des composantes 0 à n' participent aux appels avec $n' = r'$ si r' est impair, et $n' = r'+1$ sinon (voir l'instruction 5 de l'algorithme 3.2). Afin que les appels soient arête-disjoints, nous fusionnons les composantes $n', \ldots, r-1$ en une unique composante. Après cette fusion, le nombre de composantes est pair et nous pouvons appliquer le même algorithme que dans le cas 1. Le lemme 3.3 reste également valide et, à chaque phase de l'échange total, les appels sont deux-à-deux arête-disjoints.

Conclusion. Comme les composantes sont connexes, toutes les diffusions et toutes les accumulations à l'intérieur de chaque composante peuvent se réaliser indépendamment et optimalement en nombre de phases. Nous avons montré aussi qu'il en est de même pour l'échange total entre les représentants. Le protocole de l'échange total s'effectue donc en

- $2\lceil \log_2 N \rceil - \lceil \log_2 c \rceil + O(1)$ phases si $a > (c-1)$ et,

- $2\lceil \log_2 N \rceil - \lceil \log_2 a \rceil + O(1)$ phases sinon.

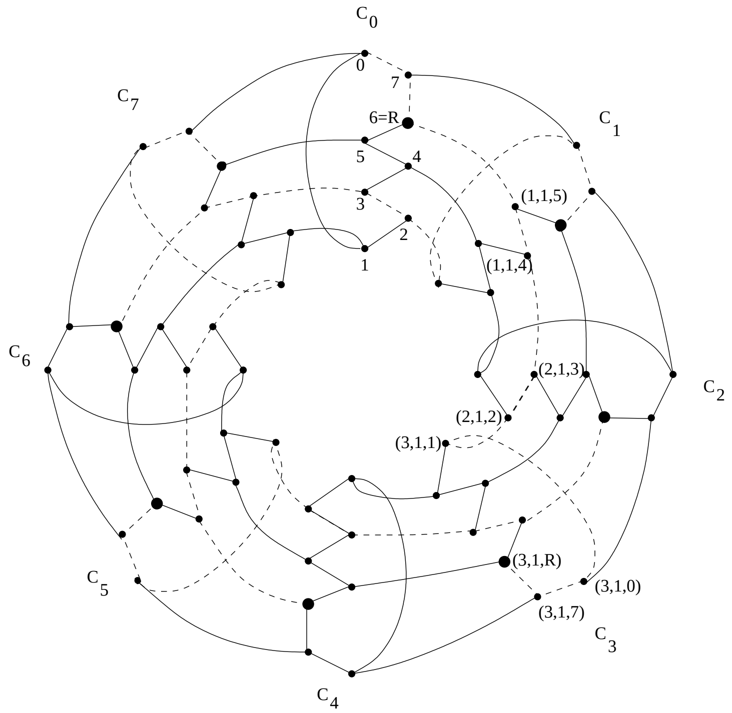


FIG. 3.2: *L'anneau à cordes* $\mathbf{C(64,7)}$. *Les arêtes pointillées correspondent aux appels d'une phase de l'échange total entre les représentants. Le représentant de la composante i (paire) échange l'information avec celui de la composante* $i+3$ *(impaire).*

Constatons aussi que quand $N = a(c+1)$, l'arête-bissection est majorée par la valeur $2a$. Il suffit en effet de partager les sommets en deux ensembles A et B où A est composé des sommets $1,\ldots,(c-1)/2$ dans les a cycles de $c+1$ sommets et B du reste. On obtient donc que $g_1(\mathbf{C(N,c)}) = 2\lceil \log_2 N \rceil - \lceil \log_2 k \rceil + O(\log_2 \log_2 k)$ où k désigne l'arête-bissection.

3.2.2 Cas général

Supposons maintenant que $N = a(c+1) + b$ avec $0 < b < c$. Notons que b est nécessairement pair puisque N et $(c+1)$ sont pairs. Nous considérons deux cas selon les valeurs relatives de a et $b/2$.

Cas où $a < b/2$. Puisque $b < c+1$, on a $a < (c+1)/2$. Nous considérons donc la décomposition suivante de $\mathbf{C(N,c)}$. Le graphe est décomposé en a cycles de $c+1$ cycles plus un chemin de b sommets. En utilisant cette partition, nous découpons le graphe en $r = \lfloor a/2 \rfloor + 1$ composantes (voir figure 3.3). Les composantes $1,\ldots,\lfloor a/2 \rfloor$ contiennent deux cycles voisins de $c+1$ sommets. La composante 0 est un chemin de b sommets si a est pair, et c'est une union d'un chemin de b sommets et d'un cycle de $c+1$ sommets sinon. Le sommet j du chemin de b sommets dans la composante 0 a pour étiquette $[0,1,j]$, et les sommets dans les autres composantes sont étiquetés comme dans la section 3.2.1. Nous choisissons le sommet $[0, 1, b-2]$ comme représentant de la composante 0, et le sommet $[k, 1, c-1]$ comme représentant de la composante $k > 0$. En constatant que $b/2+1$ arêtes connectent la composante $r-1$ à la composante 0, nous déduisons que, comme dans la section 3.2.1, le lemme 3.3 reste valable. Durant la phase $t \in \{1, \ldots, r\}$ de l'échange total entre les représentants, les appels connectant les représentants des composantes i et $i+2^t-1$ sont donc deux-à-deux arête-disjoints. Cette décomposition permet donc à l'échange total de se réaliser optimalement.

Cas où $a \geq b/2$. Définissons un graphe de type $\mathcal{A}$ comme un sous-graphe de $\mathbf{C(N, c)}$ qui contient $c+3$ sommets numérotés consécutivement. Un sous-graphe de type $\mathcal{A}$ contient deux cordes $\{x, x+c\}$ et $c+2$ arêtes $\{x, x+1\}$. Soit i le plus petit numéro des nœuds d'un sous-graphe H de type $\mathcal{A}$. Le sommet de numéro $i+j$ est appelé le $j$ème sommet de H (le sommet 0 de H est incident aux sommets 1 et c dans H).

Nous partageons $\mathbf{C(N, c)}$ en $a-b/2$ cycles de $c+1$ sommets plus $b/2$ graphes de type $\mathcal{A}$. Nous notons $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_i,\ i = 0, \ldots, a-1\}$ l'ensemble des sous-graphes qui constitue cette décomposition. Deux cas se présentent en fonction du paramètre a :

- Si $a \leq c-1$, alors $\mathbf{C(N, c)}$ est décomposé en a composantes, qui contiennent un seul élément de $\mathcal{S}$.
- Si $a > c-1$, alors $\mathbf{C(N, c)}$ est décomposé en $c-1$ composantes. En supposant que $a = \alpha(c-1)+\beta$, β de ces composantes sont une union de $\alpha+1$ éléments consécutifs de $\mathcal{S}$, et les $c-1-\beta$ autres composantes sont une union de α éléments de $\mathcal{S}$.

Chaque composante contient au plus un sous-graphe de type $\mathcal{A}$ (voir figure 3.4). Chaque composante peut par contre contenir de nombreux cycles comme définis dans la section 3.1.2. Le sous-graphe de type $\mathcal{A}$ d'une composante a pour numéro 1, et les cycles restant sont numérotés $2, 3, \ldots, \Gamma$ où Γ représente le nombre d'éléments de $\mathcal{S}$ dans cette composante. En posant $R = c-1$, le sommet $[k, 1, R]$ est le représentant de la composante k si cette composante ne contient aucun élément du type $\mathcal{A}$. Sinon, le représentant est le sommet $[k, 1, R+2]$.

La phase d'accumulation et la phase de diffusion peuvent s'effectuer en utilisant l'algorithme de [24] puisque chaque composante est connexe. Focalisons-nous donc sur la phase d'échange total entre les représentants. Pour ceci nous nous intéressons aux appels $\mathcal{P}'_{i \to i+\ell}$ entre les représentants de la composante i et de la composante $i+\ell$. De nouveau, nous considérons deux cas selon la parité du nombre de composantes.

Le chemin $\mathcal{P}'_{i \to i+\ell}$ est une union de chemins notés $P'(i,0), P'(i,2), \ldots, P'(i,\ell)$ où $P'(i,k)$, $k = 0 \leq k \leq \ell$ est défini comme suit :

1. si la composante $i+k$ est composée uniquement de cycles de $c+1$ sommets, alors $P'(i,k) = P(i,k)$ où $P(i,k)$ est défini dans la section 3.2.1.
2. si la composante $i+k$ contient un graphe de type $\mathcal{A}$, alors nous considérons trois sous cas :
   - Cas $k = 0$: Si la composante i est composée seulement d'un sous-graphe de type

$\mathcal{A}$, alors $P'(i,0) = \{[i,1,R{+}2],[i{+}1,1,R{-}1],[i,j,R]\}$. Si la composante i contient Γ_i cycles, alors
$P'(i,0) = \{[i,1,R+2],[i,j,R-1],[i,j,R],\ j=2,\dots\Gamma_i\} \cup \{[i+1,1,R-1]\}$

- Cas $0 < k < \ell$:
$$\begin{aligned} P'(i,k) = \ & \{[i+k,1,R-2k+1],[i+k,1,R-2k+2]\} \\ & \cup \{[i+k,j,R-2k-1],[i+k,j,R-2k] \\ & \cup \{[i+k+1,1,R-2k-1]\} \end{aligned}$$
- Cas $k = \ell$:
$$\begin{aligned} P'(i,\ell) = \ & \{[i+\ell,1,j],\ j=0,\dots,R-2\ell+1\} \\ & \cup \{[i+\ell,1,0],[i+\ell,1,c],[i+\ell,1,c+1]\} \end{aligned}$$

Prouvons que les appels effectués simultanément à la même phase sont deux-à-deux arête-disjoints.

Lemme 3.4 *Soit Soit $\epsilon \in \{0,\ 1\}$. Pour toute valeur impaire de $\ell < (c-1)/2$, pour tout i, $i = 0,\dots,r/2$ entre 0 et $r-1$, tous les appels entre les représentants de la composante $2i+\epsilon$ et de la composante $2i+\epsilon+\ell$, sont deux-à-deux arête-disjointes.*

Preuve. Supposons sans perte de généralité que $\epsilon = 0$. Considérons une composante arbitraire k. Soit Γ_k le nombre de cycles de $c+1$ sommets dans la composante k. Si cette composante ne contient pas de graphe de type $\mathcal{A}$, alors, par des arguments similaires à la preuve du lemme 3.3, on peut montrer que les appels traversant la composante k sont arête-disjoints. Supposons donc que la composante k contient un sous-graphe de type $\mathcal{A}$.

Supposons k impair. Il existe un entier pair i tel que $k = i + \ell \pmod r$, et tel que $0 \le i \le r$. En appliquant le même argument que dans la preuve du lemme 3.3, nous avons que, pour tout entier impair h, $1 \le h \le \ell - 1$, l'appel $\mathcal{P}'_{i+h \to i+h+\ell}$ traverse la $k$ème composante en utilisant tous les sommets de

$$\{[k,1,R-2h+1],[k,1,R-2h+2]\} \cup \{[k,j,R-2h],[k,j,R-2h-1],\ j=2,\dots,\Gamma_k\}.$$

L'appel $\mathcal{P}'_{i\to k}$ contient tous les sommets de $\{[i+\ell,1,j],\ j=0,\dots,R-2\ell+1\} \cup \{[i+\ell,1,0],$ $[i+\ell,1,c],\ [i+\ell,1,c+1]\}$. Nous pouvons appliquer le même raisonnement pour le cas où k est pair. Ainsi, tous les appels traversant la composante k sont sommet-disjoints et, par conséquent, arête-disjoints. □

a) Le nombre de composantes est pair ($r = 2r'$)**.** En appliquant le lemme 3.4, nous pouvons voir que, durant les phases $t = 1,\dots,\lceil \log_2 r \rceil$ de l'échange total entre les représentants, les appels sont arête-disjoints. Il faut toutefois noter que durant l'avant dernière phase de l'échange total, les appels traversent les composantes $i+\ell$, $i+\ell+1$, $\dots$, i en sachant que i est pair tandis que, durant les autres phases, ces appels traversent les composantes i, $i+1$, $\dots$, $i+\ell$ (voir le cas similaire de la section 3.2.1)

b) Le nombre de composantes est impair ($r = 2r'+1$)**.** Ce cas peut être traité de façon similaire au cas correspondant de la section 3.2.1.

Conclusion. Puisque le protocole d'échange total s'effectue en $2\lceil\log_2 s\rceil + \lceil\log_2 r\rceil$ phases, son efficacité dépend du rapport entre les paramètres a et b définissant r et s. En posant $a = \alpha(c+1) + \beta$, nous obtenons :

- Si $a > c+1$, alors nous sommes dans le cas où $a \geq b/2$, et nous avons $r = c-1$ et $s = (\alpha+1)(c+3)$. D'où $g_1(\mathbf{C}(N,c)) \leq 2\lceil\log_2 N\rceil - \lceil\log_2 c\rceil + O(1)$.
- Si $a \leq c+1$, alors on a

  si $a \geq b/2$, alors $r = a$ et $s = c+3$.

  si $a < b/2$, alors $r = \lceil a/2\rceil + 1$ et $s = 2(c+1)$.

  Dans ces deux cas, nous obtenons $g_1(\mathbf{C}(N,c)) \leq 2\lceil\log_2 N\rceil - \lceil\log_2 a\rceil + O(1)$.

3.3 Conclusion

Nous avons pu déterminer un protocole d'échange total dans les anneaux à cordes en utilisant la méthode des trois étapes. Nous avons montré que :

Théorème 3.5 *Soit* $\mathbf{C}(N,c)$ *un anneau à cordes ayant* $N = a(c+1)+b$ *sommets de corde* c*, nous avons,*

- *Si* $a > c+1$*, ou si* $N = a(c+1)$*,* $g_1(\mathbf{C}(N,c)) = 2\lceil\log_2 N\rceil - \lceil\log_2 k\rceil + O(\log\log k)$;
- *Sinon,* $2\lceil\log_2 N\rceil - \lceil\log_2 c\rceil + O(1) \leq g_1(\mathbf{C}(N,c)) \leq 2\lceil\log_2 N\rceil - \lceil\log_2 a\rceil + O(1)$.

avec k *l'arête-bissection de* $\mathbf{C}(N,c)$.

Comme les paramètres c et a n'ont pas le même ordre de grandeur, nous ne pouvons pas juger si le protocole construit est proche de la borne inférieure. En fait, nous espérons qu'une meilleure approximation de l'arête-bissection pourrait permettre de prouver l'optimalité de notre protocole. En tout cas, nous n'avons pas pu infirmer ou confirmer l'optimalité de la borne inférieure de Klasing. Pour nous, ce problème est central dans l'étude de l'échange total dans le modèle commuté.

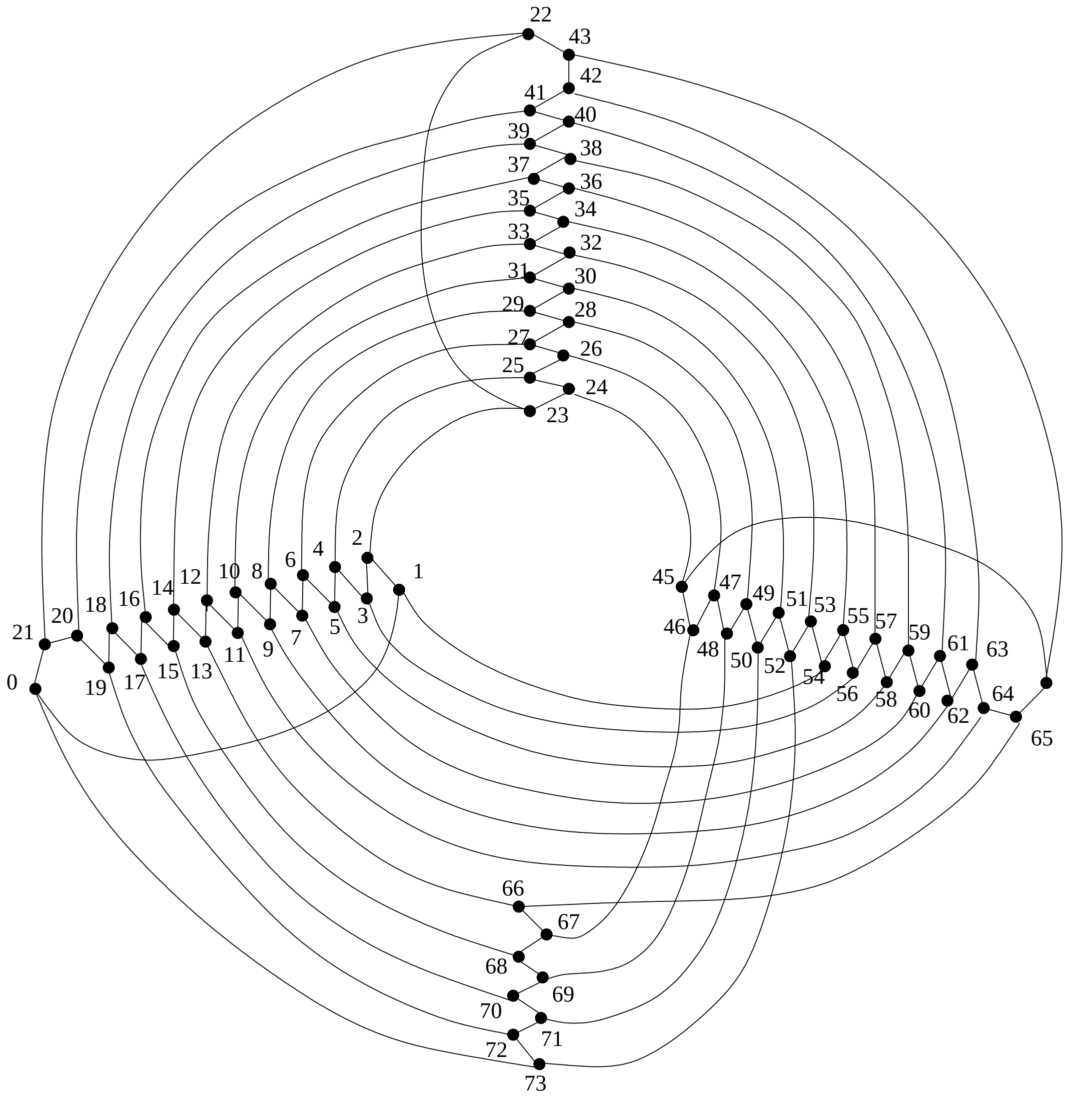


FIG. 3.3: *Décomposition de l'anneau à cordes* $\mathbf{C}(74, 21)$ *en trois cycles de 22 sommets et un chemin de 8 sommets.*

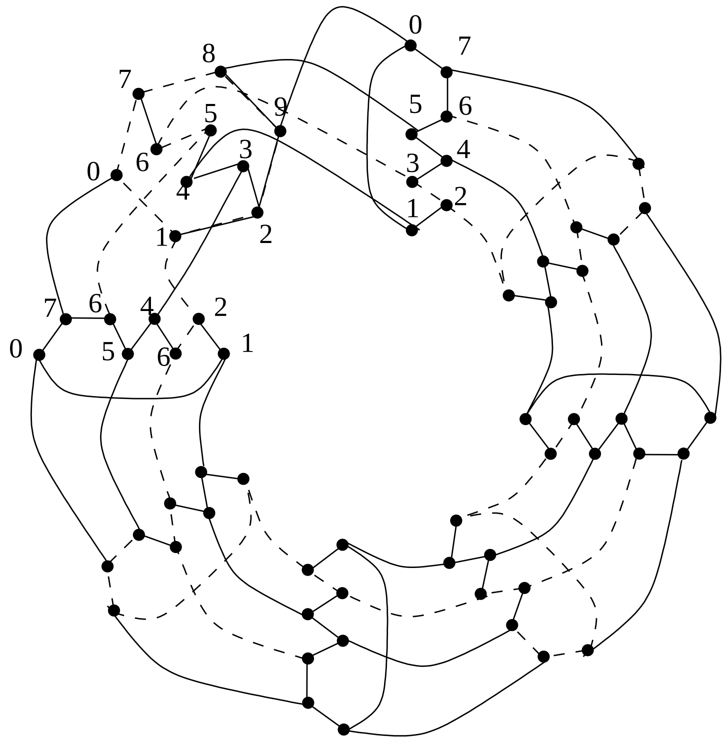


Fig. 3.4: *L'anneau à cordes* $\mathbf{C(66, 7)}$. *Les arêtes pointillées correspondent aux appels d'une phase de l'échange total entre les représentants. Le représentant de la composante i (paire) échange l'information avec celui de la composante i + 3 (impaire).*

CHAPITRE 4

Diffusion partielle 1-port dans les réseaux orientés

Les travaux présentés dans ce chapitre ont été partiellement réalisés en collaboration avec P. Fraigniaud et M. Midjana [16].

Dans le chapitre 2, nous nous sommes intéressés aux réseaux non-orientés, c'est-à-dire pour lesquels, lorsqu'il existait un lien de communication reliant le nœud x au nœud y, nous supposions implicitement qu'il en existait un de y vers x. Nous ne faisons pas une telle hypothèse dans ce chapitre. Nous étudions donc la diffusion partielle dans les réseaux orientés. Dans un premier temps, nous proposons des algorithmes polynomiaux retournant des protocoles de diffusions partielles optimaux (en nombre de phases) pour certaines classes particulières de graphes comme les graphes Eulériens. Nous prouvons ensuite qu'il n'est pas possible (sauf si $P = NP$) de produire de tels algorithmes pour les graphes quelconques. Nous décrirons cependant des algorithmes polynomiaux retournant des protocoles de diffusions partielles optimaux lorsque nous nous restreignons à un type particulier d'arbres (les étoiles généralisées). C'est un premier pas vers la définition d'algorithmes généraux pour tous les types d'arbres. Nous allons voir en effet que le problème de la diffusion dans les arbres orientés est un problème plus complexe que dans le cas non orienté.

4.1 Diffusion dans le graphe quelconque

Avant d'étudier le problème général, nous nous concentrons tout d'abord sur les topologies simples, comme les chemins et les graphes Eulériens.

4.1.1 Diffusion partielle dans un chemin

Nous considérons un chemin P_n de n nœuds ayant ses arcs orientés dans la même direction. Plus précisément, P_n est un graphe possédant les sommets $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ et les arcs (u_i, u_{i+1}) pour tout entier i, $0 \leq i \leq n-1$. Constatons que seul le nœud u_0 peut être l'initiateur d'une diffusion. Ainsi, par la suite, nous supposerons toujours que u est le nœud u_0.

La diffusion à partir du nœud u dans P_n peut se réaliser optimalement en nombre de phases (en $\lceil \log_2 n \rceil$ phases). C'est un fait bien connu mais il est important de rappeler le protocole de diffusion optimal $\mathcal{B}(P_n)$.

Cas où n est une puissance de 2. À la première phase, u envoie son information au nœud correspondant à la moitié du chemin, c'est-à-dire au nœud $u_{n/2}$. Le chemin est alors partagé en deux chemins de longueur $n/2$. À la deuxième phase, chacune des extrémités de

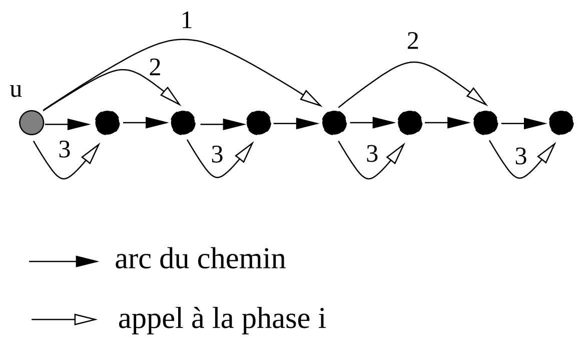


FIG. 4.1: *Un exemple de protocole $\mathcal{B}(P_n)$ lorsque n est une puissance de 2 (ici, $n = 8$).*

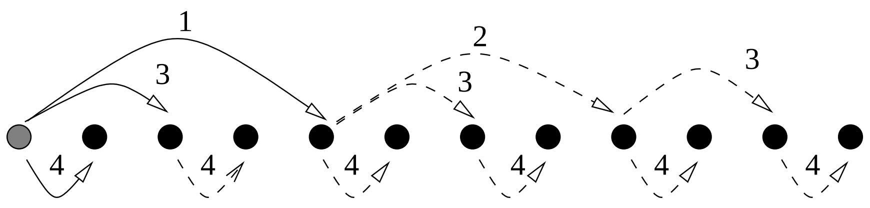


FIG. 4.2: *Un exemple de protocole $\mathcal{B}(P_n)$ lorsque n n'est pas une puissance de 2 (ici, $n = 12$).*

ces deux chemins connaissant l'information peut la communiquer au nœud se trouvant à la moitié de son chemin. Les chemins sont à nouveau divisés par 2 et ce processus continue ainsi de suite aux phases 3, 4, ... , $\lceil \log_2 n \rceil$, jusqu'à ce que tous nœuds soient informés. Ceci donne un protocole de diffusion $\mathcal{B}(P_n)$ optimal en $\lceil \log_2 n \rceil$ phases.

Cas général. Nous considérons la représentation binaire de l'entier $n-1$. Généralement, un entier x est représenté en binaire par le mot binaire $[x_{\lceil \log_2 x \rceil -1}, x_{\lceil \log_2 x \rceil -2}, \ldots, x_1, x_0]$ tel que $x = \sum_{i=0}^{\lceil \log_2 x \rceil -1} x_i 2^i$ où, pour tout $i = 0, \ldots, \lceil \log_2 x \rceil - 1$, $x_i \in \{0,1\}$. Afin de simplifier la présentation, nous modifions ici la numérotation des bits. Nous représenterons un entier x par $[x_1, x_2, \ldots, x_{\lceil \log_2 x \rceil -1}, x_{\lceil \log_2 x \rceil}]$ tel que $x = \sum_{i=1}^{\lceil \log_2 x \rceil} x_i 2^{\lceil \log_2 x \rceil - i}$.

En considérant la représentation binaire $[x_1, x_2, \ldots, x_{\lceil \log_2 x \rceil -1}, x_{\lceil \log_2 n \rceil}]$ de $n-1$, l' algorithme $\mathcal{B}(P_n)$ est défini de la façon suivante : le nœud u communique durant la phase j, $j \in \{1, \ldots, \lceil \log_2 n \rceil\}$, si et seulement si $x_j = 1$. Lorsque c'est le cas, le récepteur v_j de l'appel est alors le nœud étiqueté $n - \sum_{i=1}^{j} x_i 2^{d-i}$ en posant $d = \lceil \log_2 n \rceil$. Chaque nœud v_j, après réception du message à la phase j, initie une diffusion dans le sous-chemin composé des 2^{d-j} nœuds entre les nœuds v_j et u_k avec $k = n - 1 - \sum_{i=1}^{j-1} x_i 2^{d-i}$ en utilisant le protocole $\mathcal{B}(P_{2^{d-j}})$ car le nombre de nœuds est une puissance de 2.

Constatons qu'il est facile de déduire de ce qui précède qu'il existe un protocole optimal de diffusion à partir de n'importe quel initiateur dans tous les graphes Hamiltoniens. En effet, il “suffit” de trouver un circuit Hamiltonien et d'appliquer le protocole précédemment décrit à ce chemin. Le problème consiste bien sûr en la difficulté d'exhiber un circuit Hamiltonien. En fait, nous allons voir que cette idée peut s'étendre aux graphes Eulériens, ce qui est plus facile à mettre en évidence.

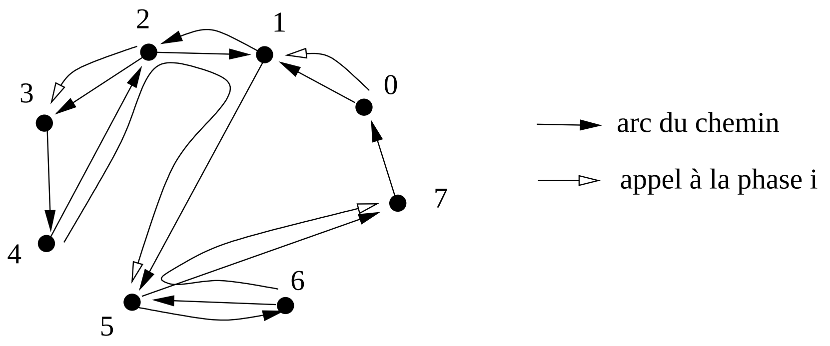


FIG. 4.3: *La phase 3 de la diffusion à partir du sommet* 0*, en utilisant le cycle Eulérien* $\{0, 1, 2, 3, 4, 2, 1, 5, 6, 5, 7, 0\}$*. Les appels sont représentés par les flèches blanches.*

4.1.2 Diffusion partielle dans les graphes Eulériens

Rappelons qu'un graphe G est dit Eulérien s'il existe un circuit traversant une et une seule fois tous les arcs du graphe. Nous allons décrire un protocole de diffusion en $\lceil \log_2 n \rceil$ phases sur de tels graphes. Ce protocole est obtenu en adaptant le protocole de diffusion sur un chemin décrit dans la section précédente. L'idée est d'imposer que les appels suivent le cycle Eulérien.

Soit C un cycle Eulérien du graphe G. Écrivons $C = \{c_0, \ldots, c_{m-1}, c_0\}$ où m est le nombre d'arêtes de G et où c_i est un sommet de G pour tout $i = 1, \ldots, m$. Sans perte de généralité, nous supposerons que $c_0 = u$. Maintenant nous allons étiqueter les sommets. Nous étiquetons le sommet u par 0 et nous donnons l'étiquette k à un sommet $v = c_j$ si et seulement si v satisfait la condition suivante : j est le plus petit entier i tel que $c_i = v$ et le chemin $\{c_0, c_1, \ldots, c_j\}$ possède $k + 1$ sommets distincts de G.

Cette numérotation divise le cycle Eulérien en n chemins arête-disjoints. Chaque origine de ces chemins est la première occurrence d'un sommet dans C. Plus formellement, on a $C = \cup_{i=0}^{n-1} P_i$ où P_i est le chemin reliant le sommet d'étiquette i à celui d'étiquette $i + 1$. P_i s'écrit $\{c_j, c_2, \ldots, c_k\}$ où j est le plus petit entier tel que c_j est le nœud d'étiquette i et k est le plus petit entier tel que c_k est le nœud d'étiquette $i + 1$. Le protocole de diffusion $\mathcal{B}(G_n)$ pour les graphes Eulériens à n nœuds est alors obtenu en modifiant le protocole de diffusion $\mathcal{B}(P_n)$ sur les chemins à n nœuds décrit dans la section 4.1.1. Chaque appel de $\mathcal{B}(P_n)$ entre un nœud de numéro i et un nœud de numéro j est remplacé par un appel entre un nœud d'étiquette i et un nœud d'étiquette j via le chemin composé de la juxtaposition des chemins $P_i,\ P_{i+2}, \ldots, P_{j-1}$. Il est facile de vérifier que, pour chaque phase, les appels de $\mathcal{B}(G_n)$ ainsi construits sont bien d'une part deux-à-deux arête-disjoints et d'autre part, réalisent une diffusion optimale en nombre de phases. Nous pouvons donc en déduire le théorème suivant :

Théorème 4.1 *Il existe un algorithme polynomial qui, pour tout graphe Eulérien* G*, retourne un protocole de diffusion à partir de* u *dans* G *s'effectuant en* $\lceil \log_2 n \rceil$ *phases.*

La figure 4.3 présente un exemple d'une phase du protocole ainsi construit. Comme la construction de ce protocole se base en fait sur un chemin quelconque passant par tous les

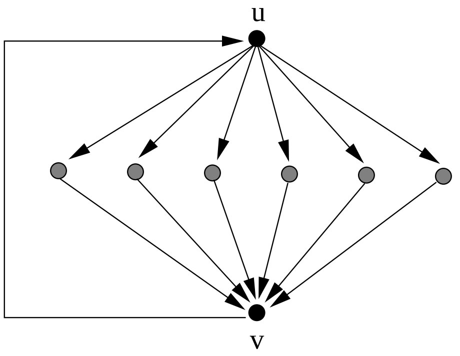


FIG. 4.4: *Dans ce graphe de n sommets, diffuser une information à partir de u nécessite au moins $n/2$ phases en supposant que n soit pair.*

sommets du graphe, nous en déduisons aussi le résultat suivant :

Corollaire 4.2 *Soit G un graphe, alors pour tout sommet u tel qu'il existe un chemin d'origine u passant par tous les sommets de G et au plus une fois par arc, il existe un protocole de diffusion à partir de u dans G s'effectuant en $\lceil \log_2 n \rceil$ phases.*

Il est important de remarquer la différence entre le théorème 4.1 et le corollaire 4.2. Autant il est facile de déterminer si un graphe orienté possède un circuit Eulérien, autant il semble plus difficile de vérifier si un sommet u d'un graphe G satisfait aux hypothèses du corollaire 4.2. Peut-on pour autant penser que tous les graphes sont capables de réaliser une diffusion optimale en $\lceil \log_2 n \rceil$ phases ? Malheureusement, la réponse est négative (contrairement à ce qui se passe pour les topologies non-orientées). Par exemple, la diffusion à partir de u dans le graphe de la figure 4.4 nécessite $n/2$ phases où n est le nombre de sommets (en supposant n pair). En effet, à la première phase, u informe un sommet quelconque w. Après cette phase, deux sommets sont informés : u et w. Toutes les phases restantes, contiennent au plus deux appels car les appels ayant comme émetteur des nœuds informés différents de la source u doivent passer nécessairement par l'arc (v, u) afin d'atteindre d'autres nœuds et, comme les appels doivent être arête-disjoints, l'arc (v, u) joue le rôle d'un goulot d'étranglement. Comme, à chaque phase, au plus deux nouveaux nœuds sont informés, le protocole ne peut pas se réaliser en moins de $n/2$ phases. Il est ici facile de vérifier qu'on peut effectivement diffuser en $n/2$ phases dans ce graphe.

Il est donc naturel de se poser la question suivante : peut-on trouver un algorithme qui, pour une topologie quelconque, détermine le nombre minimum de phases nécessaire pour réaliser une diffusion à partir de n'importe quel nœud du réseau ? Malheureusement, le théorème 4.3 qui suit indique que cette question est très "difficile".

4.1.3 Complexité du problème

Théorème 4.3 *Le problème suivant est NP-complet :*

DIFFUSION PARTIELLE DANS LES TOPOLOGIES ORIENTÉES (DTO)

Instance: *Un graphe orienté $G = (V, E)$, un sommet u de G, un sous-ensemble $D \subset V$ avec $u \in D$, et un entier k.*

Question: *Existe-t-il un protocole de diffusion partielle dans G à partir de u vers D s'effectuant en moins de k phases dans le modèle commuté ?*

Preuve. DTO est clairement dans NP. Pour prouver qu'il est NP-complet, nous allons le réduire au problème 4-DM :

COUPLAGE À QUATRE DIMENSIONS (4-DM)

Instance: Quatre ensembles distincts X_i, pour $i = 1, 2, 3, 4$ de même cardinalité q, et un sous-ensemble M de $X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_4$.

Question: Existe-t-il un couplage maximum M' de M ? C'est-à-dire existe-t-il un sous-ensemble $M' \subset M$ tel que tout élément de $X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4$ apparaît exactement une fois dans un quadruplet de M' ?

Notation: un élément de M est noté par un quadruplet (x_1, x_2, x_3, x_4) avec $x_j \in X_j$, $j = 1, \ldots, 4$. Soit m le nombre d'éléments de l'ensemble M. Par la suite, nous supposerons que $m + 3q$ est égal à une puissance de 2 : $m + 3q = 2^s$. Si ce n'est pas le cas, il suffit de dupliquer dans M un élément arbitraire autant de fois que nécessaire. Nous décrivons un algorithme polynomial $\mathcal{T}$ qui transforme une instance de 4-DM en une instance de DTO de la façon suivante :

$$\mathcal{T} : M \subseteq X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_4 \rightarrow G = (V, E), k = \lceil \log(|V|) \rceil$$

- Chaque élément x de $\cup_{i=1,\ldots,4} X_i$ est représenté par un chemin orienté de trois sommets $(x[1], x[2], x[3])$ dans G.
- Chaque élément $c = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de M, est représenté par un chemin orienté de quatre sommets ($c[1]$, $c[2]$, $c[3]$, $c[4]$) dans G. De plus, on ajoute un arc de $x_j[3]$ vers $c[j]$ pour tout $j = 1, \ldots, 4$.
- Un chemin orienté P de 2^{s+2} sommets est ajouté à G. Les sommets de P seront notés $\{p_j,\ j = 0, \ldots, 2^{s+2} - 1\}$.
- La source u de la diffusion est définie comme l'origine p_0 du chemin P.
- Pour tout $j = 0, \ldots, 2^s - 1$, et pour tout élément x de $\cup_{i=1,\ldots,4} X_i$, on ajoute un arc entre le sommet p_{4j} et $x[1]$. De plus, pour tout $j = 0, \ldots, 2^s - 1$, et pour tout élément c de M, on définit un arc entre le sommet p_{4j} et $c[1]$.
- Afin que G soit fortement connexe, on ajoute un arc du sommet $c[4]$ vers u pour tout élément c de M et, finalement, un arc reliant $p_{2^{s+2}-1}$ à u.

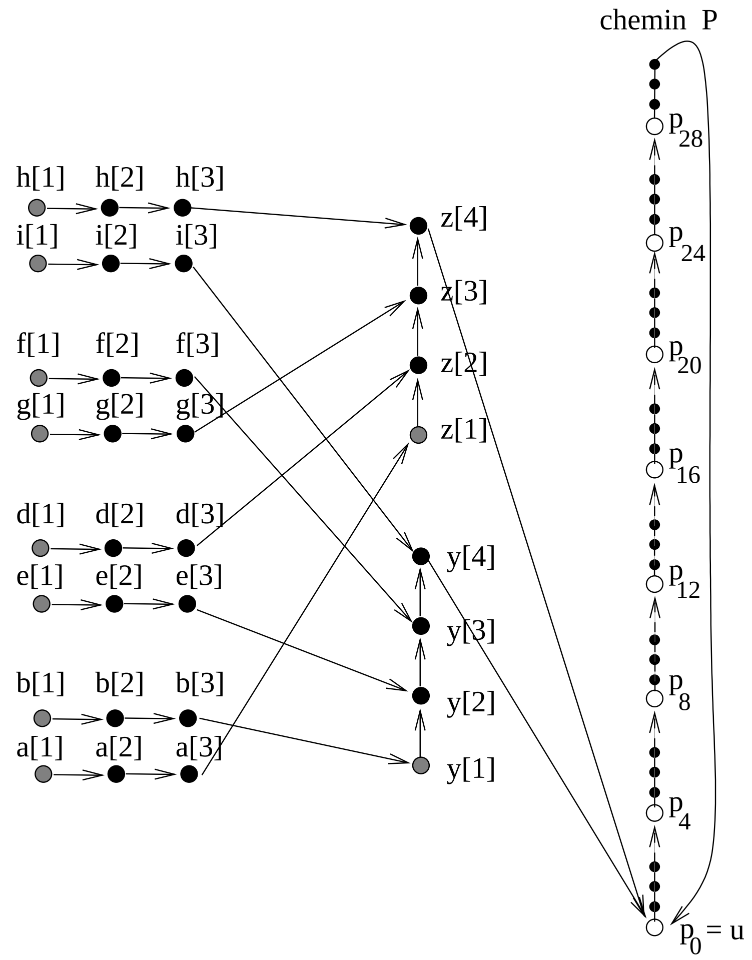


FIG. 4.5: *Un exemple de transformation $\mathcal{T}$ à partir de l'instance de 4-DM où $X_1 = \{a, b\}$, $X_2 = \{d, e\}$, $X_3 = \{f, g\}$, $X_4 = \{h, i\}$ et $M = \{y = (b, e, f, i), z = (a, d, g, h)\}$. Par soucis de clarté, les connexions reliant les sommets grisés du graphe avec les sommets blancs du chemin ne sont pas dessinées*

Le graphe G ainsi construit polynomialement, possède 2^{s+3} sommets et k vaut $s+3$. La figure 4.5 donne un exemple de cette transformation (dans un but de clarté, le graphe biparti complet entre les sommets grisés et les sommets $\{p_{4j},\ j = 0, \ldots, 7\}$ n'est pas représenté).

Supposons que M possède un couplage M' de cardinalité q. Nous allons construire un protocole de diffusion en $\lceil \log_2 n \rceil$ phases :

- Les s premières phases correspondent aux s premières phases du protocole $\mathcal{B}(P_{2^{s+2}})$ défini dans la section 4.1.1 pour un chemin de 2^{s+2} sommets. Après ces s phases, seuls les sommets $\{p_{4j},\ j = 0, \ldots, 2^s - 1\}$ de P sont informés.

- Durant la phase $s+1$, le sommet p_{4j}, $j = 0, \ldots, 4q-1$ de P informe le sommet $x_\ell[1]$ de l'ensemble X_i où $\ell = j - (i-1)q$. Les autres sommets de P informés envoient leur information aux sommets $c[1]$ pour $c \notin M'$.

- Voici le comportement du protocole durant les deux dernières phases :
  - Le protocole $\mathcal{B}(P_{2^{s+2}})$ continue et s'achève sur le chemin P.
  - si $c \notin M'$, alors $c[1]$ informe $c[3]$ à la phase $s+2$. À la dernière phase, $c[1]$ informe $c[2]$, et $c[3]$ informe $c[4]$.
  - Si $x \in X_i$ pour $i \in \{1, \ldots, 4\}$, alors le sommet $x[1]$ informe $x[3]$ à la phase $s+2$. À la dernière phase, $x[1]$ informe $x[2]$, et $x[3]$ informe $c[i]$ pour tout élément c du couplage M' avec x un élément de c.

On peut vérifier que le protocole décrit ci-dessus est bien un protocole de diffusion à partir de u se réalisant en $\lceil \log_2 n \rceil$ phases.

Réciproquement, supposons qu'il existe un protocole de diffusion $\mathcal{B}$ à partir de u dans G s'effectuant en $\lceil \log_2 n \rceil$ phases. Nous allons montrer que M contient un couplage maximum. Tout d'abord, observons les propriétés suivantes du protocole $\mathcal{B}$:

Propriété 4.1 *Si un sommet reçoit l'information à une phase, il doit la renvoyer à toutes les phases ultérieures.*

Ceci est dû au fait que le nombre de sommets de G est une puissance de 2.

Propriété 4.2 *Le nœud u n'est traversé par aucun appel.*

Après la phase $s+1$ du protocole $\mathcal{B}$, 2^{s+1} sommets sont informés. Nous allons maintenant nous intéresser aux types de nœuds informés après cette phase. Du fait de la structure de G et de la propriété 4.2, tous les sommets de P sont informés par un autre sommet de P. À la phase $s+3$, tous les sommets de numéro pair de P informent nécessairement leurs voisins. Ainsi, à la phase $s+2$, le sommet p_{4j} où $j \in \{0, \ldots, 2^s - 1\}$ informe nécessairement le sommet p_{4j+2}. Ainsi, après la phase $s+1$ (et avant la phase $s+2$), les sommets de $\{p_{4j},\ j = 0, \ldots, 2^s - 1\}$ connaissent l'information. Nous pouvons donc déduire la propriété suivante :

Propriété 4.3 *Durant les deux dernières phases, les sommets de P communiquent entre-eux.*

Maintenant, nous allons déterminer les autres nœuds connaissant l'information à cette phase. Soit c une clause de M. On peut remarquer que le sommet $c[4]$ ne peut pas être informé à la phase $s+1$ car il ne peut informer des sommets de G qu'en traversant le nœud u et ceci contredit les propriétés 4.1 et 4.2. La même remarque peut se faire pour les sommets $c[2]$ et $c[3]$. Donc, seul le sommet $c[1]$ peut être informé à la phase $s+1$.

Soit x un élément de $\cup_{i=1,\ldots,4} X_i$. Par construction de G, seuls les sommets de P peuvent informer $x[1]$ sans que l'appel traverse u. Comme les sommets de P communiquent entre-eux durant les deux dernières phases, $x[1]$ doit connaître l'information avant ces phases, c'est-à-dire avant la phase $s+2$. Pour les mêmes raisons, on peut déterminer que $m-q$ sommets connaissent l'information parmi l'ensemble $\{m[1],\ m \in M\}$ avant la phase $s+2$. Donc, les sommets informés par $\mathcal{B}$ après la phase $s+1$ sont les suivants :

- tous les sommets de l'ensemble $\{p_{4j},\ j = 0, \ldots, 2^s - 1\}$,

– tous les sommets de l'ensemble $\{x[1],\ x \in \cup_{i=1,\dots,4} X_i\}$,

– $m - q$ sommets parmi l'ensemble $\{m[1],\ m \in M\}$.

On construit maintenant l'ensemble M' de la façon suivante : $c \in M'$ si et seulement si le sommet $c[1]$ n'est pas informé à la phase $s + 1$. Nous allons démontrer que M' est un couplage de M.

Soit c un élément de M n'appartenant pas à M'. Par définition du graphe G, $c[1]$ est informé à la phase $s + 1$. Quel nœud $c[1]$ peut-il informer ? En fait, il peut simplement informer les nœuds $c[2]$, $c[3]$ et $c[4]$. À partir de cette constatation, il est facile de voir que $c[1]$ informe $c[3]$ puis $c[2]$. Et, de son coté, $c[3]$ informe $c[4]$.

Déterminons maintenant combien de fois un élément x de $\cup_{i=1,\dots,4} X_i$ apparaît dans M. Sans perte de généralité, supposons que x soit un élément de X_1. $x[1]$ connaît l'information à la phase $s + 1$. Par construction, on peut en déduire que $x[1]$ informe $x[2]$ à la dernière phase et $x[3]$ à la phase $s+2$. Avec quel sommet $x[3]$ peut-il alors communiquer ? Il faut que l'appel passe par un de ses voisins $\{f[1],\ f \in M \text{ et } f \text{ contient } x\}$. Durant la dernière phase, l'appel ayant $x[3]$ comme émetteur ne peut pas traverser un sommet $f[1]$ où $f \notin M'$, car $f[1]$ ne possède qu'un unique arc sortant déjà utilisé par l'appel allant de $f[1]$ vers $f[2]$. Donc cet appel peut uniquement aller vers un sommet de $\{f[1],\ f \in M' \text{ et } f \text{ contient } x\}$. Comme les sommets de ce dernier ensemble ne connaissent pas l'information (d'après la propriété 4.3), il faut qu'ils connaissent l'information à la dernière phase. Comme un seul appel peut les atteindre, ceci signifie que la cardinalité de $\{f[1],\ f \in M' \text{ et } f \text{ contient } x\}$ est au plus 1. Cet ensemble ne peut pas être l'ensemble vide car $x[3]$ doit impérativement informer un sommet (propriété 4.1). Donc on obtient que M' est bien un couplage de M. Ceci achève la preuve du théorème. □

4.2 Diffusion partielle dans les arbres

Comme nous avons déjà eu l'occasion de le signaler, de nombreuses architectures dédiées aux communications structurées sont des arbres orientés. Par exemple, dans le protocole *CBT* [2], une diffusion est réalisée de la façon suivante : dans un premier temps, l'initiateur de la diffusion informe la racine de l'arbre qui, dans un second temps, diffuse l'information dans l'arbre. Les messages transitant de haut en bas correspondent à un schéma de diffusion tandis que ceux allant de bas en haut correspondent à une initialisation de la diffusion.

Il apparaît aussi important d'étudier les algorithmes de diffusion sur les arbres. Nos tentatives sur les arbres quelconques ne s'étant pas avérées fructueuses, nous avons focalisé notre attention sur une classe particulière d'arbres : les étoiles généralisées. Nous allons voir que le problème est déjà complexe pour ces structures.

Tout d'abord, nous allons introduire quelques notions. Ces notions permettent à chaque nœud de voir un protocole de diffusion comme une matrice.

4.2.1 Définitions

Un protocole de diffusion se décompose naturellement en un ensemble de listes d'appels correspondant à chacune des phases. Les appels peuvent aussi être classés d'une autre façon : chaque arc de l'arbre peut avoir un "journal de bord" qui est un vecteur dans lequel sont notifiées les phases auxquelles cet arc est traversé par un appel. Plus formellement, nous appellerons *empreinte* du protocole $\mathcal{B}$ sur l'arc e le vecteur de r éléments $[x_1, \ldots, x_r]$ défini de la façon suivante :

- r est le nombre de phases de $\mathcal{B}$.
- x_j vaut 1 si et seulement si un appel traverse l'arc e à la phase j du protocole $\mathcal{B}$, sinon x_j vaut 0.

La *restriction* de $\mathcal{B}$ sur le sommet v ayant d arcs incidents $e_1, \ldots, e_d$ est la matrice booléenne composée de d lignes et de r colonnes où r est le nombre de phases de $\mathcal{B}$ et où chaque ligne i est l'empreinte de $\mathcal{B}$ sur l'arc e_i. L'élément $[i, j]$ de cette matrice vaut donc 1 si et seulement si un appel traverse l'arc e_i à la phase j du protocole $\mathcal{B}$. Il est à noter que si le sommet v est l'initiateur de la diffusion dans un arbre, alors tous les arcs sont des arcs sortants de v. Sinon, tous les arcs sont sortants à l'exception d'un seul que l'on supposera correspondre à la première ligne de la matrice restriction de v.

On notera par $\mathrm{shad}(\mathcal{B}, e)$ l'empreinte de $\mathcal{B}$ sur l'arc e. $\mathrm{shad}(\mathcal{B}, e)_i$ désignera alors la $i$ème composante du vecteur $\mathrm{shad}(\mathcal{B}, e)$. Comme une empreinte est un vecteur contenant uniquement des éléments 0 ou 1, une empreinte peut être considérée comme la représentation binaire d'un entier. Un ordre est ainsi introduit sur les vecteurs binaires :

Définition 4.1 *Soit $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ deux vecteurs binaires, on notera $\mathcal{L} \leq \mathcal{L}'$ si et seulement si l'entier représenté par le vecteur $\mathcal{L}$ est inférieur ou égal à celui représenté par le vecteur $\mathcal{L}'$.*

Appliquons cet ordre sur les protocoles de diffusion dans les arbres.

Définition 4.2 *Soit $T = (V, E)$ un arbre orienté et soit $\mathcal{B}$ un protocole de diffusion dans T à partir de la racine de T. Soit $e \in E$ un arc. $\mathcal{B}$ est dit* minimum en l'arc e *si et seulement si* $\mathrm{shad}(\mathcal{B}, e) \leq \mathrm{shad}(\mathcal{B}', e)$ *pour tout protocole $\mathcal{B}$' de diffusion dans T.*

Appliquons ces définitions sur un cas simple, le cas du chemin $P = (u, u_1, \ldots, u_n)$ de n sommets. Le protocole décrit dans la section 4.1.1 impose que la source u communique durant toutes les phases j, $j = 1, \ldots, \lceil \log_2 n \rceil$, si et seulement si $x_j = 1$ où $n - 1 = \sum_{i=1}^{\lceil \log_2 n \rceil} x_i 2^{\lceil \log_2 n \rceil - i}$, et $x_i \in \{0, 1\}$. Ces appels utilisent tous l'arc $e = (u, u_1)$. Par conséquent, l'empreinte de $\mathcal{B}$ sur l'arc $e = (u, u_1)$ est le vecteur $[x_1, x_2, \ldots, x_{\lceil \log_2 n \rceil}]$. Comme le sommet u ne possède que l'arc sortant (u, u_1), la restriction de $\mathcal{B}$ sur le sommet u est égale à l'empreinte de $\mathcal{B}$ sur l'arc $e = (u, u_1)$. En considérant les empreintes comme des entiers, on obtient le lemme suivant :

Lemme 4.4 *Dans un chemin, le protocole de diffusion $\mathcal{B}$ décrit dans la section 4.1.1 est minimum en l'arc (u, u_1).*

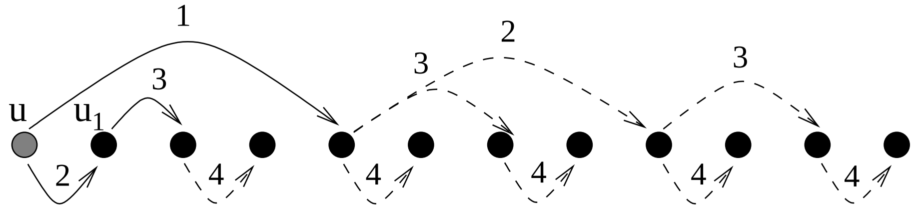


FIG. 4.6: *Protocole de diffusion dans un chemin de 12 sommets. Ce protocole a comme empreinte* [1100] *en l'arc* (u, u_1)

Preuve. Remarquons que, pour le protocole $\mathcal{B}$ décrit de la section 4.1.1, shad$(\mathcal{B}, e)$ est la représentation binaire de l'entier $n-1$ lorsque e est l'arc (u, u_1). Soit $\mathcal{B}$' un protocole de diffusion en r phases à partir de u. Quand un nœud du chemin reçoit l'information à la phase j, pour $j = 1, \ldots, r$, il peut au plus informer $2^{r-j} - 1$ autres nœuds pendant les $r - j$ phases restantes. Ainsi, nous avons $\sum_{i=1}^{d} \text{shad}(\mathcal{B}', e)_i \, 2^{d-i} \geq n - 1$. Comme, par construction, nous avons $\sum_{i=1}^{d} \text{shad}(\mathcal{B}, e)_i \, 2^{d-i} = n - 1$, nous obtenons shad$(\mathcal{B}, e) \leq$ shad$(\mathcal{B}', e)$, ce qui prouve le lemme. □

De plus, on peut faire la remarque suivante :

Lemme 4.5 *Soit P un chemin orienté de n sommets $(u, u_1, \ldots, u_{n-1})$. Pour tout entier $\ell \geq n-1$, il existe un protocole $\mathcal{B}$' de diffusion à partir de u dans P tel que son empreinte en (u, u_1) soit la représentation binaire de ℓ.*

Preuve. Soit $\ell \geq n - 1$. On considère le vecteur $[\ell_1, \ldots, \ell_{\lceil \log_2 \ell \rceil}]$ (resp.$[x_1, \ldots, x_{\lceil \log_2 x \rceil}]$) égal à la représentation binaire de l'entier ℓ (resp. $n - 1$). Le protocole $\mathcal{B}'$ est une copie du protocole $\mathcal{B}$ décrit dans la section 4.1.1 avec quelques modifications :

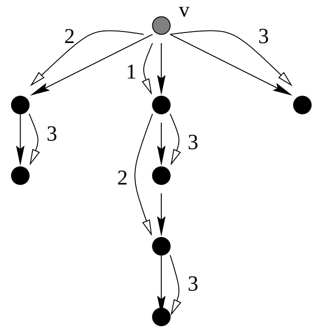
- Si $\lceil \log_2 \ell \rceil = \lceil \log_2 n \rceil$, alors considérons le plus petit entier i tel que, $\ell_i \neq x_i$ et tel que, pour tout $k = 1, \ldots, i-1$, on ait $\ell_k = x_k$. Alors, à la phase i, u appelle u_1. Pour toutes les phases k restantes telles que $\ell_k = 0$ et telles que $x_k = 1$, l'appel de $\mathcal{B}$ de u vers v est remplacé par un appel de u_1 vers v.

- Si $\lceil \log_2 \ell \rceil > \lceil \log_2 n \rceil$, alors nous effectuons les mêmes modifications en considérant la représentation binaire de l'entier $n-1$ sur $\lceil \log_2 \ell \rceil$ bits. Ainsi le protocole $\mathcal{B}$ commence à la phase $\lceil \log_2 \ell \rceil - \lceil \log_2 n \rceil$.

□

4.2.2 Diffusion dans une étoile généralisée

Soit T une étoile de p branches enracinées en u, et soit n_i le nombre de nœuds de la $i$ème branche, $i = 1, \ldots, p$. T possède au total $n = \sum_{i=1}^{p} n_i + 1$ sommets. Nous supposerons que $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_p$, et nous appellerons v_i le voisin de la $i$ème branche de u, et e_i l'arc (u, v_i), pour tout $i = 1, \ldots, p$. Soit $q = \log(n_1 + 1)$. Nous déduisons de la section 4.1.1 que la



$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

FIG. 4.7: *Correspondance entre un protocole et la restriction du protocole en v.*

diffusion à partir de u dans une telle étoile se réalise en au moins q phases car ceci correspond au nombre de phases nécessaires pour diffuser l'information de u dans la première branche.

Pour tout $i = 1, \ldots, p$, soit $\mathcal{B}_i$ le protocole de diffusion à partir de u décrit dans la section 4.1.1 et appliquée à la $i$ème branche. Nous construisons une matrice $p \times q$ notée M telle que chaque ligne i représente $\mathrm{shad}(\mathcal{B}_i, e_i)$. Cette matrice représente l'union des empreintes.

Par exemple, l'étoile représentée dans la figure 4.7 est composée de trois branches ayant respectivement 2, 4 et 1 nœuds. La matrice M est l'union des empreintes des protocoles de diffusion sur des chemins de trois sommets pour la première ligne, de 5 sommets pour la seconde ligne, et de 2 sommets pour la dernière ligne. Il est à noter que l'union des ces protocoles forme un protocole respectant bien la contrainte du mode 1-port. Ainsi, la matrice M est la restriction du protocole représenté dans la figure 4.7.

Malheureusement, la matrice M ainsi construite, peut ne pas être reconnue comme une diffusion en mode 1-port car plusieurs 1 peuvent apparaître sur une même colonne. Par exemple, si on considère une étoile à deux branches composées chacune d'un unique sommet alors $\mathrm{shad}(\mathcal{B}_1, e_1) = \mathrm{shad}(\mathcal{B}_2, e_2) = [1]$, et $M = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ n'est pas une restriction en u d'un protocole de diffusion car u ne peut pas envoyer simultanément un message à deux nœuds sans violer la contrainte 1-port. Cependant, M peut être transformée en

$$M^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

qui est une restriction en u d'un protocole de diffusion à partir de u dans T s'exécutant de la façon suivante : u informe le nœud de la première branche à la première phase et celui de la deuxième branche à la deuxième phase.

Ainsi, la notion d'empreinte est étendue aux sommets. L'*empreinte* du protocole $\mathcal{B}$ sur le sommet u est un vecteur de r éléments $(x_1, \ldots, x_r)$ tel que x_j vaut le nombre de 1 se trouvant dans la colonne j de la restriction de $\mathcal{B}$ sur le sommet u. $\mathcal{B}$ est dit *minimum au sommet v* si et seulement si son empreinte est la plus petite possible parmi tous les protocoles. Nous déduisons le lemme suivant du lemme 4.5 :

Lemme 4.6 *Soit P un chemin orienté de n sommets $(u, u_1, \ldots, u_{n-1})$. Pour tout entier $\ell \geq n-1$, il existe un protocole de diffusion $\mathcal{B}$' à partir de u dans P tel que son empreinte en u soit la représentation binaire de ℓ.*

4.2.3 Le problème de matrice sans conflit minimum

Soit une matrice M ayant p lignes et q colonnes où chaque élément peut être un 0 ou un 1. La $i$ème ligne de M est notée par $\mathcal{L}_M(i)$. L'*empreinte* de la matrice M est définie comme le vecteur x de q éléments $[x_1, x_2, \ldots, x_q]$ tel que x_i est égal au nombre d'éléments à 1 contenus par la colonne i de M.

Définition 4.3 *Une matrice M^* de dimension $p \times q^*$ est une matrice sans conflit d'une matrice M de dimension $p \times q$ (avec $q^* \geq q$) si et seulement si elle satisfait les deux propriétés suivantes :*

1. *M^* a au plus un élément à 1 par colonne (en d'autres termes, son empreinte est un vecteur binaire).*
2. *En considérant que chaque ligne représente un entier, chaque ligne ℓ de M^* est plus grande que la ligne ℓ de M (en d'autres termes, $\mathcal{L}_M(\ell) \leq \mathcal{L}_{M^*}(\ell)$).*

Comme la matrice M possède plusieurs matrices sans conflit, ces matrices peuvent être triées en fonction de leurs empreintes. Ainsi, on peut introduire le problème de la matrice sans conflit *minimum*. Cela consiste à chercher une matrice sans conflit telle que son empreinte soit la plus petite possible. Considérons par exemple la matrice suivante.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

Comme M contient plusieurs 1 dans la colonne 2, M ne peut pas être sa propre matrice sans conflit. De plus, il est facile de voir qu'une matrice sans conflit minimum de M est

$$M^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.2}$$

On obtient ainsi que l'empreinte de M^* est égale à $[1110] = 14$. Voyons maintenant le lien entre ce problème matriciel et le problème de la diffusion.

Proposition 4.7 *Soit T une étoile généralisée de p branches enracinée en u. Pour tout protocole de diffusion $\mathcal{B}$ à partir de u dans T, la restriction de $\mathcal{B}$ en u est sa propre matrice sans conflit.*

Preuve. Soit $\mathcal{B}$ un protocole de diffusion à partir de u dans T. Sa restriction M en u est telle que $M[\ell, j] = 1$ si et seulement si u appelle un sommet de la ℓème branche durant la phase j. La contrainte 1-port implique que cette matrice contient au plus un élément 1 par colonne. □

Réciproquement, on a :

Proposition 4.8 *Soit T une étoile généralisée de p branches enracinée en u et de longueurs maximales 2^{q-1}. Pour $i = 1, \dots, p$, soit $\mathcal{B}_i$ un protocole de diffusion à partir de u dans la $i$ème branche de l'étoile. Soit M la matrice de dimension $p \times q$ dont les p lignes représentent les empreintes* $\mathrm{shad}(\mathcal{B}_i, e_i)$. *Toute matrice sans conflit M^* de M détermine un protocole de diffusion à partir de u dans T.*

Preuve. Soit M^* une matrice sans conflit de M. Pour montrer que M^* est une restriction d'un protocole de diffusion $\mathcal{B}$ en u, nous donnons un protocole de diffusion à partir de u en fonction de la structure de M^*. La $i$ème colonne de M correspondra à la $i$ème phase de $\mathcal{B}$. Pour chaque ℓ, $1 \leq \ell \leq p$, la ℓème ligne de la matrice M^* est plus grande que la ℓème ligne de M. Cette ligne peut être considérée comme une représentation binaire d'un entier. Comme on a vu dans le lemme 4.5, on peut trouver un protocole de diffusion à partir de u dans la ℓème branche de l'étoile dont la ligne représente l'empreinte. En outre, si $M^*[\ell, j] = 1$, alors on a un appel de u vers un sommet de la branche ℓ de l'étoile durant la phase j. Comme M^* a un seul 1 par colonne, $\mathcal{B}$ satisfait les contraintes du modèle 1-port. □

Par la suite, nous utiliserons à plusieurs reprises le résultat suivant :

Lemme 4.9 *Soit deux matrices R et S de p lignes et telles que, pour tout entier $i \in \{1 \dots, j\}$, $\mathcal{L}_R[i] \leq \mathcal{L}_S[i]$. Alors l'empreinte d'une matrice sans conflit minimum de R est plus petite que l'empreinte d'une matrice sans conflit minimum de S.*

Preuve. Pour prouver ce corollaire, il suffit simplement de démontrer qu'une matrice sans conflit de S est aussi une matrice sans conflit de R. Soit S' une matrice sans conflit de S. Par définition de S', on a :

1. S' a au plus un 1 par colonne.
2. Pour toute ligne ℓ de S', $\mathcal{L}_S[\ell] \leq \mathcal{L}_{S'}[\ell]$. Ceci implique aussi que $\mathcal{L}_R[\ell] \leq \mathcal{L}_S[\ell]$, et $\mathcal{L}_R[\ell] \leq \mathcal{L}_S[\ell] \leq \mathcal{L}_{S'}[\ell]$

Donc S' est aussi une matrice sans conflit de R. □

En combinant les deux propositions 4.8 et 4.7 et le lemme précédent, on obtient :

Corollaire 4.10 *Soit T une étoile généralisée de p branches. Soit $\mathcal{B}_i$ le protocole de diffusion à partir de u dans la $i$ème branche de l'étoile. Soit M une matrice de dimension $p \times q$ dont les p lignes représentent les empreintes* $\mathrm{shad}(\mathcal{B}_i, e_i)$. *Supposons que tous les $\mathcal{B}_i$ soient minimum en u. Une matrice sans conflit M^* de M est minimum si et seulement si le protocole $\mathcal{B}$, dont la restriction en u est M^*, est aussi minimum en u.*

D'après le corollaire 4.10, trouver un protocole de diffusion optimal dans une étoile est équivalent à trouver la matrice sans conflit minimum. Dans la prochaine section, nous résolvons ce problème.

4.2.4 Algorithme calculant une matrice sans conflit minimum

Soit M une matrice booléenne de dimension $p \times q$. Nous cherchons à calculer une matrice sans conflit M^* de M. Pour ceci, notre algorithme effectue une suite d'opérations élémentaires dont l'objectif est de supprimer les conflits de la matrice M sans faire décroître la valeur de chacune des lignes de la matrice. Afin de résoudre un conflit impliquant k éléments à 1 dans une même colonne j, il faut faire "disparaître" ou "déplacer" au moins $k-1$ de ces éléments. Nous ne voulons pas "déplacer" un 1 vers la droite sur une ligne donnée car cela ferait décroître la valeur de la ligne. Les "déplacements" de 1 se feront donc tous vers la gauche. Il reste à déterminer vers quelles colonnes les 1 seront "déplacés". Considérons un exemple :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On doit supprimer le conflit sur la dernière colonne. La première idée est de déplacer les 1 en conflit sur la colonne nulle. Dans notre exemple, nous obtenons la matrice M' suivante en déplaçant le 1 de la deuxième ligne :

$$M' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mais le conflit persiste toujours. Le déplacement du 1 était en fait trop brutal. Un meilleur moyen de résorber le conflit est d'ajouter ou de faire apparaître assez de colonnes nulles pour absorber tous les 1 de la dernière colonne. Pour cela, une idée consiste à permuter la deuxième et la troisième colonne de la matrice M, ce qui nous autorise à mettre à 0 les éléments de la première ligne dans les colonnes 3, 4 et 5 sans faire décroître la valeur de la ligne 1. On obtient alors la matrice M'' ci-dessous :

$$M'' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ceci fait apparaître deux colonnes nulles qui permettent de résorber le conflit en déplaçant les 1 des deuxième et troisième lignes dans les colonnes nulles. Nous venons ici de résoudre le problème par une permutation d'une colonne nulle avec une colonne contenant exactement un élément à 1 et en appliquant la règle suivante.

Règle 1. Lorsque l'on permute la colonne nulle t de la matrice M avec la colonne $t+1$ contenant exactement un 1 alors, pour la ligne i tel que $M[i,t+1] = 1$, les éléments $M[i,j]$ pour $j > t$ sont mis à 0 et l'élément $M[i,j]$ vaut 1.

Algorithme 4.1 Calcul de la matrice sans conflit minimum de M

pour i:=1 **à** q **faire**
  / Traitement sur chaque colonne */*
  $\mathcal{C}_i$:= la colonne courante;
  / Dans ce qui suit, Z représente l'ensemble des colonnes nulles à gauche de la colonne courante et W représente l'ensemble des colonnes nulles consécutives immédiatement à gauche de la colonne courante. */*
  si $\mathcal{C}_i$ contient plus de deux 1 **alors**
    nb_1 := nombre de 1 dans $\mathcal{C}_i$;
    tant que $nb_1 - 1 > |W|$ **faire**
    / Tant que W n'a pas suffisamment de colonnes nulles pour absorber le conflit. */*
      $Z' := Z \setminus W$;
      c := colonne nulle la plus à droite de Z';
      / Déplacer les colonnes nulles vers la droite. */*
      Permuter c avec la voisine colonne à sa droite en appliquant la règle 1;
      Mettre à jour Z et W;
      nb_1 := nombre d'éléments à 1 dans $\mathcal{C}_i$;
      si $nb_1 - 1 > |W|$ **et** $W = Z$ **alors**
      / Insertion d'une colonne */*
        Insérer une colonne nulle à la position 0;
        Mettre à jour Z et W;
      fin si
    fin tant que
    / Le nombre de colonnes nulles immédiatement à droite de $\mathcal{C}_i$ est maintenant suffisant pour résoudre le conflit. Les 1 sont répartis parmi les colonnes de W */*
    Définir ℓ de la façon suivante
      - Tronquer chaque ligne ayant un 1 dans la colonne $\mathcal{C}_i$ afin de conserver uniquement les éléments à droite de $\mathcal{C}_i$;
      - ℓ := indice de la ligne tronquée la plus petite dans l'ordre "$\leq$" ;
    W' := les $nb_1 - 1$ colonnes les plus à droite de W;
    Répartir les 1 de $\mathcal{C}_i$ sur W' en imposant que l'élément de la ligne ℓ reste à sa place.
  fin si
fin pour

Il est facile de remarquer que, pour certaines matrices M, la matrice sans conflit minimum de M possède nécessairement plus de colonnes que M. Par conséquent, dans certains cas, il faut insérer de nouvelles colonnes. Notre algorithme insérera ces nouvelles colonnes toujours à la position 0, c'est-à-dire qu'il insérera des colonnes nulles à gauche de la première colonne de la matrice.

Nous sommes maintenant prêts à décrire formellement notre algorithme : cet algorithme calcule la matrice sans conflit minimum M^* d'une matrice M par une suite d'opérations d'insertions de colonnes nulles à la position 0, et de permutations de colonnes nulles avec des colonnes contenant exactement un élément à 1 en appliquant la règle 1. L'algorithme 4.1 décrit plus formellement ces opérations de permutations et d'insertions de colonnes. Un exemple est développé dans la figure 4.8.

Observons le comportement de l'algorithme 4.1 sur l'exemple de la matrice définie dans la figure 4.8(a). Comme les trois premières colonnes possèdent un unique élément à 1, l'algorithme ne modifie pas la matrice. Par contre, lors du traitement de la colonne 4, il détecte un conflit de deux éléments à 1. Comme la matrice ne contient aucune colonne nulle entre la colonne 1 et la colonne 4, l'algorithme est obligé d'insérer une colonne nulle à la position 0 (création d'une nouvelle colonne : voir la figure 4.8(b)). L'algorithme permute alors la colonne nulle avec sa voisine de droite. Maintenant, la colonne nulle se trouve à la deuxième colonne de la matrice courante. Cette première permutation provoque, par application de la règle 1, l'apparition d'une colonne nulle correspondant à la colonne 2 de la matrice originale. Ceci permet la résolution du conflit (voir la figure 4.8(c)) et achève le traitement de la colonne 4 de la matrice originale. De nouveau, il existe un conflit à la colonne 5. En permutant la deuxième colonne nulle de la matrice originale avec la troisième colonne, le nombre de colonnes nulles se situant immédiatement à gauche de la colonne 5 permet d'absorber le conflit. L'algorithme choisit l'élément à 1 non-encerclé et le déplace vers la gauche. En effet, il est facile de voir que la ligne 5 tronquée à partir de la colonne 5 est inférieure à la ligne 4 tronqué de la même façon. L'algorithme donne finalement une matrice ayant comme empreinte le vecteur [1011111]. Si, au moment de résoudre le dernier conflit, on avait choisi l'élément non-cerclé de la colonne 5, alors on aurait obtenu une matrice d'empreinte [1111011].

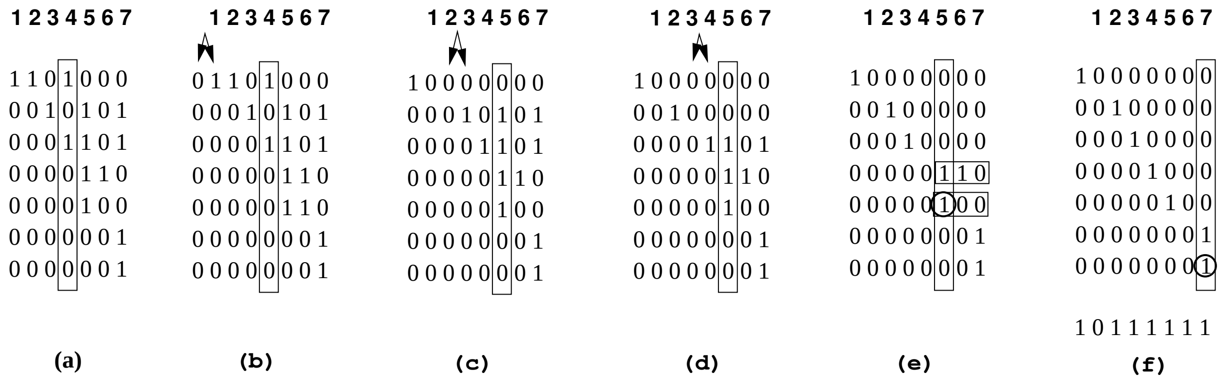


Fig. 4.8: *un exemple de déroulement de l'algorithme 4.1.*

Théorème 4.11 *L'algorithme 4.1 calcule la matrice sans conflit minimum de n'importe quelle matrice booléenne de dimension $p \times q$ en temps $O(q(p+q))$.*

Tout d'abord, nous allons prouver la complexité de cet algorithme.

Lemme 4.12 *La complexité de l'algorithme 4.1 appliqué une matrice de dimension $p \times q$ est $O(q(p+q))$.*

Preuve. Les instructions à l'intérieur de la boucle *pour* sont exécutées q fois, où q est le nombre initial de colonnes de la matrice. Plus précisément, l'algorithme rentre dans le bloc *si* (instruction 3) à chaque fois qu'il rencontre un conflit. Ainsi, pour déterminer le nombre de fois que les instructions de ce bloc sont réalisées, il faut trouver un majorant sur le nombre de conflits à traiter. Résoudre un conflit entre plusieurs 1 induit, à partir de la position courante, au moins une ligne nulle qui ne sera plus en conflit avec d'autres lignes par la suite du déroulement de l'algorithme. On peut donc déduire que le nombre d'éléments à 1 en conflits gérés par l'algorithme est au plus $2(p-1)$.

Chaque instruction de la boucle *tant que* nécessite au plus $O(p+q)$ étapes puisqu'une permutation peut se réaliser en moins de q étapes (règle 1). Cette boucle est exécutée au plus $2pq$ fois parce que chaque exécution de la boucle correspond à une permutation d'une colonne nulle avec sa voisine de droite. L'algorithme écrit de cette façon effectue donc au pire $O(pq(p+q))$ opérations. En fait, on peut modifier légèrement l'algorithme de façon à ce qu'il n'effectue au total qu'au plus q permutations. La modification de l'algorithme se base sur le fait suivant :

Fait 4.1 *Soit j une colonne de la matrice courante. Si la colonne j possède déjà un élément à 1 déplacé, alors la permutation de la colonne nulle $j-1$ avec la colonne j ne crée pas de nouvelle colonne nulle.*

Ceci est dû à la règle 1 appliquée à la ligne où se trouve l'élément à 1 de la colonne j. Ainsi, on peut modifier la manière de permuter les colonnes afin qu'une colonne contenant un 1 ne soit permuté qu'une seule fois. Une colonne nulle à la position r peut être permutée directement avec une colonne s telle que toutes les colonnes entre ces deux colonnes aient été déjà permutées. Comme la règle 1 ne peut s'appliquer qu'une fois par colonne, le nombre de permutations est maintenant en $O(q)$. □

Le reste de cette section est consacré à la preuve du théorème 4.11.

Notation. Soit A et B deux matrices ayant le même nombre de lignes p et ayant le nombre de colonnes respectivement égal à q et q'. AB est la matrice $p \times (q+q')$ obtenue par concaténation des deux matrices A et B. Nous noterons un matrice sans conflit minimum par $A*$. Rappelons que shad(M) est l'empreinte de la matrice M.

Lemme 4.13 $\mathrm{shad}((AB)^*) \leq \mathrm{shad}(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^*)$.

Preuve. Soit

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & Z \end{pmatrix}.$$

Pour chaque ligne i, $i \in \{1,\dots p\}$, nous avons $\mathcal{L}_X(i) \geq \mathcal{L}_A(i)$. Pour chaque ligne j, $j \in \{1,\dots p\}$, nous avons $\mathcal{L}_Y(j)\mathcal{L}_Z(j) \geq \mathcal{L}_B(j)$. La matrice $X' = X+Y$ a au plus un 1 par colonne et, par conséquent, $X'Z$ a au plus un 1 par colonne. Ainsi, $X'Z$ satisfait que pour chaque ligne i, $i \in \{1,\dots p\}$, $\mathcal{L}_{(X'Z)}(i) \geq \mathcal{L}_{(AB)}(i)$. Comme $\mathrm{shad}(X'Z) = \mathrm{shad}(\begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & Z \end{pmatrix})$, le lemme est prouvé. □

Constatons que l'inégalité du lemme 4.13 peut être stricte. Par exemple :

$$\text{shad}(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^*) = 101 \text{ tandis que } \text{shad}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^*) = 111.$$

Il y a cependant des matrices pour lesquelles nous avons égalité.

Lemme 4.14 *Si $(AB)^* = AB'$ où B' a le même nombre de colonnes que B, alors*

$$\text{shad}((AB)^*) = \text{shad}(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^*).$$

Preuve. D'après le lemme 4.13, il nous reste à montrer que $\text{shad}((AB)^*) \geq \text{shad}(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^*)$. Soit

$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ et } C' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}.$$

Nous avons que, pour toute ligne i, $i \in \{1, \dots p\}$, $\mathcal{L}_{C'}(i) \geq \mathcal{L}_C(i)$. Comme $\text{shad}(C') = \text{shad}((AB)^*)$, le lemme est prouvé. □

Lemme 4.15 *Soient X, X', Y, Y' des vecteurs binaires. Soit A et A' des matrices. En posant*

$$M = \begin{pmatrix} X' & 0 & 1 & X \\ Y' & 0 & 1 & Y \\ A' & 0 & 0 & A \end{pmatrix}, \quad M_X = \begin{pmatrix} X' & 0 & 1 & X \\ Y' & 1 & 0 & 0 \\ A' & 0 & 0 & A \end{pmatrix} \text{ et } M_Y = \begin{pmatrix} X' & 1 & 0 & 0 \\ Y' & 0 & 1 & Y \\ A' & 0 & 0 & A \end{pmatrix}$$

où la matrice $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ A' \end{pmatrix}$ *a au plus un 1 par colonne, on obtient : Alors*

$$\text{shad}(M^*) = \min(\text{shad}(M_X^*), \text{shad}(M_Y^*)).$$

Preuve. D'après le lemme 4.9, $\text{shad}(M^*) \leq \min(\text{shad}(M_X^*), \text{shad}(M_Y^*))$. Nous avons l'égalité car au moins un 1 de la dernière colonne du bloc $\begin{pmatrix} X' & 0 & 1 \\ Y' & 0 & 1 \end{pmatrix}$ doit être déplacé à gauche. □

Le lemme suivant montre que l'algorithme 4.1 choisit les bons éléments à 1 à déplacer vers la gauche.

Lemme 4.16 *En utilisant les mêmes notations que dans le lemme 4.15, si $Y \leq X$ alors* $\text{shad}(M_Y^*) \leq \text{shad}(M_X^*)$.

Preuve. Nous allons prouver ceci par contradiction. Supposons que $\mathrm{shad}(M_Y^*) > \mathrm{shad}(M_X^*) = \mathrm{shad}(M^*)$. Nous obtenons :

$$M_X^* = \begin{pmatrix} X' & 0 & 1 & X'' \\ Z & z & 0 & 0 \\ B' & b' & 0 & B \end{pmatrix}$$

avec $Zx \geq Y'1$, $X'' \geq X$ et $\mathcal{L}_{B'b'0B}(i) \geq \mathcal{L}_{A'00A}(i)$ pour toute ligne i des ces matrices. La première ligne de M_X^* doit être nécessairement de la forme $X'01X''$ parce que si cette ligne était à $\geq X'100$, alors $\mathrm{shad}(M_Y^*) \leq \mathrm{shad}(M_X^*)$.

D'après le lemme 4.14, nous obtenons :

$$\mathrm{shad}(M_X^*) = \mathrm{shad}(\begin{pmatrix} X' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & X' \\ Y' & 1 & 0 & 0 \\ A' & 0 & 0 & A \end{pmatrix}^*) \tag{4.3}$$

De plus, d'après le lemme 4.13, $\mathrm{shad}(M_Y^*) > \mathrm{shad}(M_X^*)$ implique que

$$\mathrm{shad}(M_X^*) < \mathrm{shad}(\begin{pmatrix} X' & 1 & 0 & 0 \\ Y' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & Y \\ A' & 0 & 0 & A \end{pmatrix}^*)$$

C'est-à-dire, en utilisant le lemme 4.9,

$$\mathrm{shad}(M_X^*) < \mathrm{shad}(\begin{pmatrix} X' & 1 & 0 & 0 \\ Y' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & X \\ A' & 0 & 0 & A \end{pmatrix}^*) \tag{4.4}$$

Les équations 4.3 et 4.4 donnent

$$\mathrm{shad}(\begin{pmatrix} X' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & X' \\ Y' & 1 & 0 & 0 \\ A' & 0 & 0 & A \end{pmatrix}^*) = \mathrm{shad}(\begin{pmatrix} X' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & X'' \\ Z & z & 0 & 0 \\ B' & b' & 0 & B \end{pmatrix}) < \mathrm{shad}(\begin{pmatrix} X' & 1 & 0 & 0 \\ Y' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & X \\ A' & 0 & 0 & A \end{pmatrix}^*)$$

En supposant que $b' = 0$ et $z = 0$, nous nous trouvons dans la situation où $Z > Y'$ et il existe une ligne i telle que $\mathcal{L}_{B'}(i) > \mathcal{L}_{A'}(i)$. Considérons une ligne i tel que $\mathcal{L}_{B'}(i) > \mathcal{L}_{A'}(i)$ et tel que la position du dernier 1 (le plus à droite de la ligne $\mathcal{L}_{B'}(i)$) soit la plus petite. Soient k et k' les positions du 1 le plus à droite dans $\mathcal{L}_Z(i)$ et dans $\mathcal{L}_{B'}(i)$ respectivement. Si $k > k'$, alors nous remplaçons la ligne i de la matrice $(B'000)$ par la ligne i de la matrice $(A'100)$. Cette nouvelle matrice a une empreinte plus petite. Si $k < k'$ alors le fait de remplacer $Z000$ par $Y'100$ implique que la matrice obtenue a une empreinte plus petite que la matrice originale. Ceci implique que $z \neq 0$. Il est à noter que si $z = 1$ alors la matrice

$$\begin{pmatrix} X' & 1 & 0 & 0 \\ Z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & X'' \\ B' & 0 & 0 & B \end{pmatrix}$$

est une matrice sans conflit de

$$\begin{pmatrix} X' & 1 & 0 & 0 \\ Y' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & X \\ A' & 0 & 0 & A \end{pmatrix}$$

Ce qui conduit à une contradiction. Si $b = 1$, alors en appliquant les mêmes arguments que ceux apportés pour le cas où $z = 1$, nous trouvons de nouveau une contradiction. Nous avons que $\text{shad}(M^*_Y) \leq \text{shad}(M^*_X)$. □

Nous allons maintenant justifier nos permutations de colonnes nulles avec des colonnes ayant un seul 1.

Lemme 4.17 *Soit $M = AxByC$ une matrice où A est une matrice ayant au plus un 1 par colonne, x est une colonne nulle, B est une matrice ayant un 1 par colonne, y est une colonne ayant plusieurs 1 et C est une matrice booléenne quelconque. Soit M' une matrice obtenue à partir de M après la permutation de la colonne x et avec la première colonne de B. Nous avons* $\text{shad}(M^*) = \text{shad}(M'^*)$.

Preuve. D'après le lemme 4.9, nous avons $\text{shad}(M^*) \leq \text{shad}(M'^*)$. L'autre sens de cette inégalité est prouvé par récurrence sur le nombre q de colonnes de B. Tout d'abord, supposons que $q = 1$. La matrice M est sous la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 1 & 0 & C_1 \\ A_2 & 0 & 0 & 1 & C_2 \\ A_3 & 0 & 0 & 1 & C_3 \\ A_4 & 0 & 0 & x & C_4 \end{pmatrix}.$$

Soit M^* une matrice sans conflit de M :

$$M^* = \begin{pmatrix} A'_1 & a_1 & a_2 & a_3 & C'_1 \\ A'_2 & b_1 & b_2 & b_3 & C'_2 \\ A'_3 & c_1 & c_2 & c_3 & C'_3 \\ A'_4 & d_1 & d_2 & d_3 & C'_4 \end{pmatrix}$$

Par définition, nous avons $A'_1a_1a_2a_3 \geq A_1010$, $A'_2b_1b_2b_3 \geq A_2001$, et $A'_3c_1c_2c_3 \geq A_3001$. Si $a_1a_2a_3 \geq 100$, alors, d'après le lemme 4.9, $\text{shad}(M^*) = \text{shad}(M'^*)$. Si $010 \leq a_1a_2a_3 < 100$, alors nous pouvons supposer sans perte de généralité que $b_1b_2b_3 \geq 100$. En résumé, nous nous trouvons dans la situation suivante :

$$M^* = \begin{pmatrix} A'_1 & 0 & 1 & 0 & C'_1 \\ A'_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ A'_3 & 0 & 0 & 1 & C'_3 \\ A'_4 & d_1 & d_2 & d_3 & C'_4 \end{pmatrix}.$$

Soit alors

$$M'' = \begin{pmatrix} A'_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ A'_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ A'_3 & 0 & 0 & 1 & C'_3 \\ A'_4 & d_1 & d_2 & d_3 & C'_4 \end{pmatrix}.$$

Nous avons $\text{shad}(M''^*) \leq \text{shad}(M^*)$. Soit d'autre part

$$M' = \begin{pmatrix} A'_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ A'_2 & 0 & 0 & 1 & C'_2 \\ A'_3 & 0 & 0 & 1 & C'_3 \\ A'_4 & d_1 & d_2 & d_3 & C'_4 \end{pmatrix},$$

Par définition nous avons $\text{shad}(M'^*) \leq \text{shad}(M''^*) \leq \text{shad}(M^*)$, et le lemme est vrai pour $q = 1$.

Maintenant nous supposons que, pour tout $q \in \{1, \ldots, q_0\}$, le lemme est vrai. Nous allons montrer qu'il est vrai pour le cas où B possède q_0 colonnes. Comme il existe un conflit sur la colonne y, un élément de la matrice $AxBy$ doit être déplacé vers la gauche. Si un 1 de la ligne i dans A est déplacé, alors nous pouvons construire une matrice K presque identique à la matrice M où seule la ligne i est modifiée : les lignes i de K et M sont identiques jusqu'à la colonne x, où un 1 est mis dans la colonne x et où tous les autres éléments de la ligne K sont mis à 0. La matrice sans conflit minimum de K a la même empreinte que celle de M. C'est pourquoi nous pouvons nous concentrer sur les déplacements de 1 de By dans xB. Supposons que le 1 de la ligne i dans By soit déplacé dans xB à la colonne j. Nous pouvons construire alors une matrice K identique à la matrice M mais où la ligne i est modifiée comme précédemment.

- Supposons que j n'est pas la colonne x. La ligne i de K est identique à celle de M jusqu'à l'élément $K[i, j]$ qui vaut 1. Pour tout $k > j$, on a $K[i, k] = 0$. D'après le lemme 4.9, comme $\mathcal{L}_K(i) > \mathcal{L}_M(i)$, une matrice sans conflit minimum de K est une matrice sans conflit minimum de M. En appliquant, l'hypothèse de récurrence, on peut permuter la première colonne de B avec x de K. La matrice K' obtenue possède une matrice sans conflit minimum qui l'est aussi pour M. À partir de la matrice K', nous pouvons la modifier de nouveau en remplaçant sa ligne i par la ligne i de la matrice M. De nouveau, la matrice ainsi obtenue est une matrice sans conflit minimum qui l'est également pour la matrice M.

- Supposons que j est la colonne x. Si la ligne i a un élément à 1 sur la première colonne de B, alors le lemme est prouvé pour q_0. Sinon, la ligne i de K est identique à celle de M jusqu'à l'élément $K[i, j-1]$ qui vaut 1. Pour tout $k > j$, on a $K[i, k] = 0$. En appliquant le lemme 4.16, nous obtenons que le lemme est vrai pour q_0.

Ainsi, le lemme est vrai pour q_0. □

Pour prouver le théorème 4.11, il reste à montrer le corollaire suivant.

Corollaire 4.18 *L'algorithme 4.1 calcule la matrice sans conflit minimum de M.*

Preuve. L'algorithme 4.1 construit une suite de matrices $M_0 = M, M_1, \ldots, M_k$, tel que M_i est obtenu à partir de M_{i-1} soit en déplaçant une colonne nulle vers la droite (permutation d'une colonne nulle avec une colonne ayant un 1), soit en répartissant les 1 en conflit sur des colonnes nulles se trouvant juste à gauche du conflit. Les lemmes 4.16 et 4.17 (généralisés à un nombre arbitraire de 1 en conflit) certifient que $\text{shad}(M_i^*) = \text{shad}(M_{i-1}^*)$, et que donc $\text{shad}(M^*) = \text{shad}(M_k^*)$. Comme M_k est une matrice sans conflit de M, nous obtenons que $\text{shad}(M^*) = \text{shad}(M_k)$. □

4.3 Conclusion

En résumé, nous avons résolu le problème de base pour la diffusion en mode 1-port dans les étoiles généralisées orientées, c'est-à-dire le problème de la matrice minimum sans conflit. Comme nous l'avons vu, il existe une relation directe entre ce problème matriciel et le problème de la diffusion dans une étoile. Plus précisément, ce problème matriciel permet de trouver un protocole de diffusion minimum en la racine. Il est à remarquer que plusieurs protocoles de diffusion peuvent avoir le même nombre de phases que celui extrait à partir du problème matriciel. Si seul le nombre de phases importe, il n'est pas nécessaire de chercher la matrice sans conflit minimum de M mais une matrice sans conflit ayant un nombre minimum de colonnes. Ce travail fut en fait motivé par la recherche de la construction d'un protocole optimal de diffusion dans les arbres orientés quelconques. Notre objectif est de construire un protocole de diffusion de bas en haut, c'est-à-dire de commencer tout d'abord par les feuilles de l'arbre puis de terminer par la racine. À chaque niveau, nous souhaitons trouver la restriction d'un protocole en un sommet. Si, à chaque niveau de l'arbre, notre méthode ne trouve pas *la restriction minimum* en un sommet alors, pour les nœuds du niveau supérieur, il sera presque impossible de trouver sa matrice restriction *minimum*. Par effet boule de neige, le protocole obtenu à la fin ne sera pas optimal en nombre de phases. C'est dans ce but que nous voulons chercher la matrice minimum et pas seulement celle ayant un nombre minimum de colonnes. La prochaine étape dans cette voie consiste à trouver un algorithme de diffusion dans les arbres appelés *fourches*, c'est-à-dire dans les arbres dont la racine u est liée au centre d'une étoile généralisée.

CHAPITRE 5

Diffusion et échange total en mode Δ-port

Ce chapitre a partiellement fait l'objet d'une publication dans [14].

Ce chapitre se situe dans le cadre du modèle commuté Δ-port. Comme nous l'avons déjà dit, les nombreux travaux effectués dans ce modèle se sont restreints aux réseaux à topologie fixée [31, 35, 21, 55]. Afin de généraliser ces études, la première partie de ce chapitre porte sur les problèmes de diffusion et d'échange total sur des topologies arbitraires. Dans la deuxième partie, ces deux problèmes sont étudiés sur les arbres. Cette approche est motivée par le fait que les réseaux arborescents sont des outils de base pour la gestion des applications multipoints, à la fois dans les systèmes parallèles et dans les réseaux d'ordinateurs. Nous proposons des algorithmes polynomiaux retournant de protocoles optimaux de diffusion, de diffusion partielle et d'échange total dans les arbres.

5.1 Complexité des problèmes

Cette section a pour objet l'étude de la diffusion et de l'échange total pour toute topologie. Dans le modèle commuté, un protocole de diffusion en mode 1-port respecte évidemment les contraintes de communication du mode Δ-port. Ainsi, un sommet quelconque peut diffuser son information en au plus $\lceil \log_2 n \rceil$ phases. D'autre part, comme le nombre de sommets informés ne peut qu'être au plus multiplié par Δ où Δ est le degré maximum du graphe, on obtient :

Théorème 5.1 *Pour tout réseau non-orienté G de n nœuds et de degré maximum Δ, pour tout nœud u, on a*

$$\lceil \log_{\Delta+1} n \rceil \leq b_\Delta(G,u) \leq \lceil \log_2 n \rceil.$$

Calculer $b_\Delta(G,u)$ pour tout G revient à chercher un résultat semblable à celui de Farley dans le modèle 1-port non-orienté. En d'autres termes, ceci revient à répondre à la question suivante : peut-on trouver un algorithme polynomial permettant de calculer un protocole optimal de diffusion dans n'importe quel réseau ? Malheureusement, le théorème 5.2 montre que ce problème est NP-complet. Plus précisément :

Théorème 5.2 *Le problème suivant est NP-complet :*

Diffusion partielle (BT)

Instance: *Un graphe $G=(V,E)$, un sommet u et un entier k.*

Question: *Existe-t-il un protocole de diffusion à partir du sommet u dans G qui s'effectue en moins de k phases dans le modèle commuté Δ-port?*

Preuve. BT est dans NP puisque nous pouvons vérifier en temps polynomial si un protocole de diffusion s'effectue en au plus k phases. Pour prouver que le problème BT est NP-difficile, nous effectuons une réduction au problème de la recherche du transversal maximum [32] déjà introduit dans la preuve du théorème 2.9.

Étant donné une instance I de CS (un graphe G et un entier b), nous construisons en temps polynomial une instance I' de BT composée d'un graphe $G' = (V', E')$, d'un sommet u et d'un entier k'. Soient n et m respectivement le nombre de sommets et le nombre d'arêtes du graphe G. Nous supposons que les sommets sont étiquetés de 1 à n. Nous affectons la valeur 2 à k'. On construit polynomialement le graphe G' en fonction du graphe G de la façon suivante (voir la figure 5.1) :

- G est un sous-graphe de G' : $V \subset V'$ et $E \subset E'$.
- Le sommet u dans G' n'appartient pas au graphe G.
- Pour chaque sommet v appartenant à V, on définit un sommet z_v dans V' tel que $\{u, z_v\}$, $\{z_v, v\}$ sont des arêtes de G'.
- Pour chaque arête $e = \{x, y\}$ dans G, on définit l'ensemble de sommets $\mathcal{E}_e = \{e^{(i)}, i = 1, \ldots, m+1\}$. Ces sommets sont connectés aux nœuds x et y dans G'.
- On définit $n-b$ étoiles de $3n+1$ sommets comme des sous-graphes de G'. Nous appelons c_i le centre de l'étoile S_i, $i = 1, \ldots, n-b$.
- On définit un graphe biparti complet entre l'ensemble V et l'ensemble des centres des étoiles $\{c_i, i = 1, \ldots, n-b\}$. Nous remplaçons cependant chacune des arêtes $\{c_i, v\}$ par un chemin de longueur 2 ayant c_i, $p_{(i,v)}$ et v comme sommets.

Afin de montrer que BT est NP-complet, il faut montrer que G a un transversal de taille au plus b si et seulement si le temps de diffusion à partir du sommet u dans G' est égal à 2.

Tout d'abord, supposons que le graphe G a un transversal de taille au plus b, noté $\mathcal{T}$. Supposons sans perte de généralité que $|\mathcal{T}| = b$. (Pour obtenir un transversal de taille b, il suffit simplement de lui ajouter arbitrairement des sommets). Nous construisons alors un protocole de diffusion $\mathcal{B}$ à partir de u dans G' composé de 2 phases :

- Durant la première phase, pour chaque nœud w de V, faire :
  - si $w \in \mathcal{T}$, alors u envoie l'information à w ;
  - si $w \notin \mathcal{T}$, alors u envoie l'information à un des c_i par un appel utilisant le chemin $\{u, z_w, w, p_{(i,w)}, c_i\}$.

  Après la première phase, tous les nœuds de $\mathcal{T}$ et tous les centres des $n-b$ étoiles connaissent l'information.

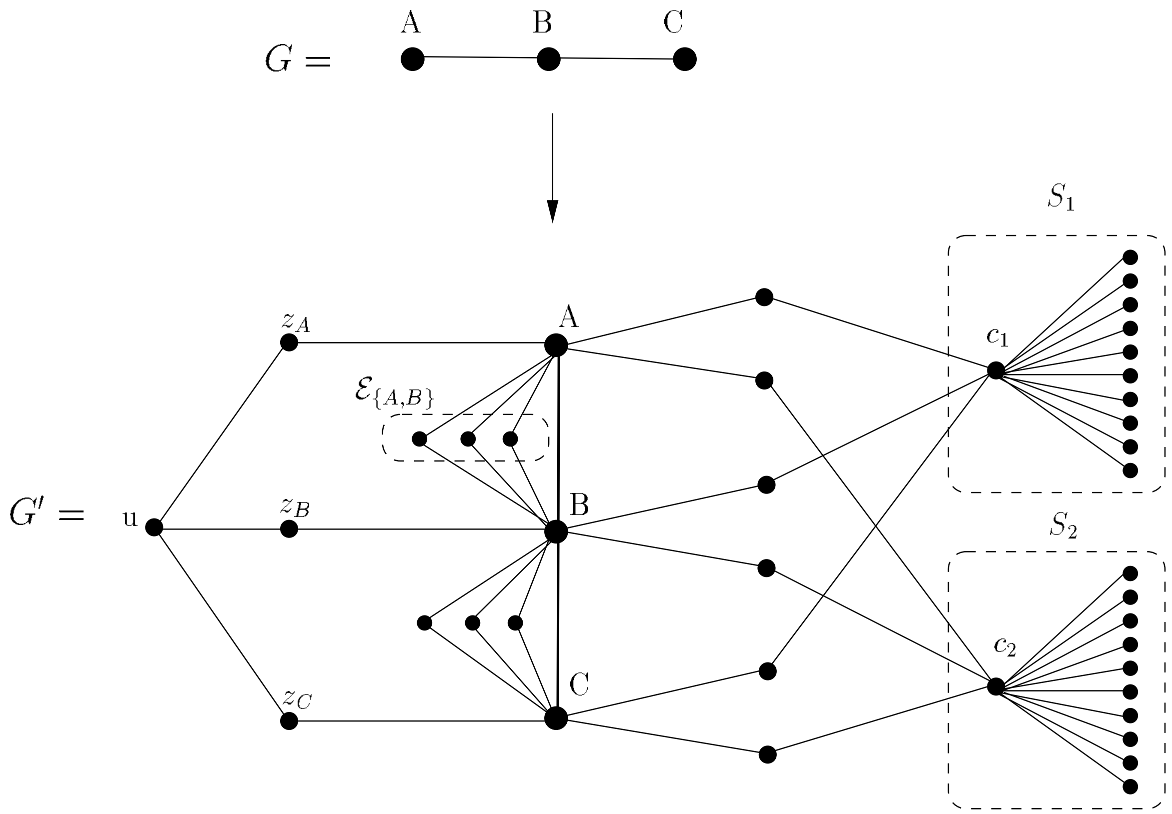


FIG. 5.1: *Un exemple de la transformation décrite dans la preuve du théorème 5.2 : à partir du graphe G et de l'entier $b = 1$, le graphe G' est construit et k vaut 2. Le graphe G a un transversal de taille 1 si et seulement si le temps de diffusion à partir du sommet u dans G' est égal à 2.*

– Durant la deuxième phase, tous les nœuds connaissant l'information (c'est-à-dire le sommet u, les centres des étoiles et les sommets de $\mathcal{T}$) l'envoient à tous leurs nœuds voisins.

Il est facile de vérifier que tous les nœuds de G' sont informés après la deuxième phase. Réciproquement, supposons qu'il existe un protocole de diffusion $\mathcal{B}$ à partir du sommet u dans G composé de 2 phases. Soit $\mathcal{T}$ le sous-ensemble de sommets de V composé des sommets informés à la première phase de $\mathcal{B}$. Prouvons que $\mathcal{T}$ est un transversal de G de taille au plus b. En fait, le protocole de diffusion $\mathcal{B}$ vérifie nécessairement les propriétés suivantes :

Propriété 5.1 *La première phase est composée d'au plus n appels.*

Ceci est dû au fait que le degré de u est n et que les appels doivent être arête-disjoints.

Propriété 5.2 *Après la première phase, tous les centres des étoiles sont nécessairement informés.*

Nous prouvons ceci par contradiction. Supposons qu'il existe une étoile $\mathcal{S}$ telle que son centre ne soit pas informé après la première phase. Si α nœuds sont informés dans $\mathcal{S}$ après la première phase, alors au plus α appels entre deux nœuds de $\mathcal{S}$ font partie de la seconde phase. D'autre part, par construction, n arêtes connectent l'étoile $\mathcal{S}$ au reste du graphe G'. Par conséquent, puisque les appels doivent être arête-disjoints, au plus $n+\alpha$ appels de la deuxième phase ont un récepteur dans l'étoile $\mathcal{S}$. Comme $3n+1-\alpha$ nœuds doivent recevoir l'information après la deuxième phase, nous avons $3n+1-\alpha \leq n+\alpha$, c'est-à-dire $n < \alpha$. Ceci est en contradiction avec la propriété 5.1.

Propriété 5.3 *La taille de l'ensemble $\mathcal{T}$ est au plus b.*

Cette propriété se déduit des propriétés 5.1 et 5.2 en observant que G' possède $n-b$ étoiles. En outre pour simplifier le reste de cette preuve, nous considérerons seulement des protocoles de diffusion qui satisfont les propriétés suivantes :

Propriété 5.4 *À la première phase, u appelle b sommets de V et les $n-b$ centres des étoiles.*

En effet, tout protocole de diffusion $\mathcal{B}$ peut être transformé en un protocole $\mathcal{B}$' satisfaisant la propriété 5.4. Si, pendant la première phase, il y a un appel entre u et z_v, alors, lors de la deuxième phase, z_v ne peut participer qu'à deux appels : le premier appel $\{z_v \to w\}$ passe par le nœud v et le deuxième appel $\{z_v \to w'\}$ passe par le nœud u. Ainsi, nous pouvons modifier le protocole $\mathcal{B}$ de la façon suivante : lors la première phase, u envoie l'information à v. Durant la deuxième phase, les deux appels $\{z_v \to w\}$ et $\{z_v \to w'\}$ sont remplacés respectivement par $\{v \to w\}$ et $\{u \to w'\}$. Par des procédés identiques, si, durant la première phase, u informe un sommet dans $\mathcal{E} \cup \{z_v\}_{v \in V}$ ou un sommet voisin du centre d'une étoile, où $\mathcal{E} = \cup_{e \in E} \mathcal{E}_e$, alors le protocole de diffusion $\mathcal{B}$ peut être modifié afin que le protocole résultant respecte la propriété 5.4.

Propriété 5.5 *Durant la deuxième phase, il n'existe pas d'appel traversant le chemin $\{c, p_{(c,v)}, v\}$ où $v \in V$ et où le sommet c est le centre d'une étoile.*

Ceci découle de la propriété 5.4, car le sommet $p_{(c,v)}$ n'est pas informé à la première phase, mais doit l'être après la seconde. Soit maintenant F un ensemble d'arêtes de G tel que toutes les arêtes de F aient leurs deux extrémités dans $\mathcal{T}$.

Propriété 5.6 *Si l'arête $e = \{x, y\} \in F$, alors, durant la deuxième phase, tout appel utilisant une des arêtes de la forme $\{x, w\}$ ou de la forme $\{y, w\}$ où $w \in \mathcal{E}_e$, a le nœud w comme récepteur.*

Ceci découle de la propriété 5.4 car nous savons que w n'avait pas reçu l'information à la première phase. De la même façon, nous avons la propriété suivante :

Propriété 5.7 *Durant la deuxième phase, u informe uniquement ses nœuds voisins.*

Maintenant, prouvons que $\mathcal{T}$ est un transversal de G. Regardons comment les sommets de $\mathcal{Y} = V \backslash \mathcal{T} \cup \mathcal{E} \backslash \cup_{e \in F} \mathcal{E}_e$ sont informés durant la deuxième phase. D'après les propriétés 5.6 et 5.7, on peut en déduire que seuls les sommets de $\mathcal{T}$ informe les sommets de $\mathcal{Y}$. Ainsi, le nombre d'appels qui informent un nœud dans $\mathcal{Y}$ est au plus $(m+2)\sum_{v \in \mathcal{T}} d_v$, où d_v est le nombre d'arêtes non dans F et incidentes à v dans le graphe G. Soit $\mathcal{D} = \sum_{v \in \mathcal{T}} d_v$. Comme le protocole de diffusion s'effectue en deux phases, nous avons nécessairement $(m+2)\mathcal{D} \geq |\mathcal{Y}|$. Puisque $|\mathcal{Y}| = n - |\mathcal{T}| + (m+1)(m - |F|)$, nous avons donc

$$\begin{array}{rll} & (m+2)\mathcal{D} & \geq n - |\mathcal{T}| + (m+1)(m - |F|) \\ \Leftrightarrow & \mathcal{D} - n + |\mathcal{T}| & \geq (m+1)(m - |F| - \mathcal{D}). \end{array}$$

Comme $n > |\mathcal{T}|$, nous avons $\mathcal{D} - n + |\mathcal{T}| < \mathcal{D} \leq m - |F|$, et donc

$$m + 1 > \mathcal{D} > (m+1)(m - |F| - \mathcal{D}). \tag{5.1}$$

Ainsi l'inégalité 5.1 est satisfaite si et seulement si $\mathcal{D} \geq (m - |F|)$. Comme $E - F$ contient $m - |F|$ arêtes distinctes, ceci implique que chaque arête dans $E - F$ est incidente à un sommet dans $\mathcal{T}$. Ainsi $\mathcal{T}$ est un transversal de G. Ceci termine la preuve du théorème. □

D'après le théorème 5.2, il paraît très difficile de trouver un algorithme de diffusion minimisant le nombre de phases dans le modèle Δ-port. Qu'en est-il pour l'échange total ? Malheureusement, la même remarque s'applique pour le problème d'échange total.

Théorème 5.3 *Le problème suivant est NP-complet :*

TEMPS D'ÉCHANGE TOTAL (GT)

Instance: *Un graphe $G = (V, E)$ et un entier k*

Question: *Existe-t-il un protocole d'échange total dans G qui s'effectue en moins de k phases dans le modèle commuté Δ-port ?*

Preuve. Il est facile de voir que GT est dans NP puisque vérifier si un protocole d'échange total s'effectue en k phases peut se faire en temps polynomial. Nous prouvons que GT est NP-difficile par transformation d'un sous-problème NP-complet de BT: étant donnée une instance de BT en posant $k = 2$, un graphe G et un sommet u, nous construisons une instance de GT, c'est-à-dire un graphe G' et un entier k' en fait fixé à 4. Soit n le nombre de sommets de G. Soit T l'arbre défini par :

– T a une profondeur 2 et a u comme racine ;

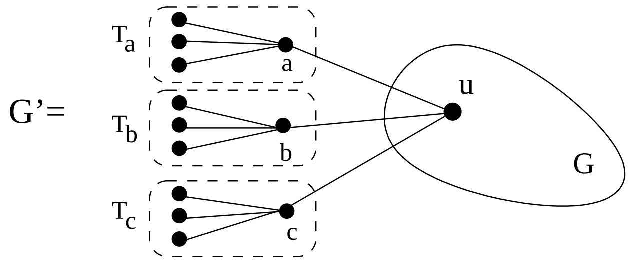


FIG. 5.2: *Un exemple de la transformation décrite dans la preuve du théorème 5.3 en supposant que G contient trois sommets.*

- le degré du sommet u dans T est n ;
- tous les voisins de u ont pour degré $n+1$.

Définissons alors G' comme l'union des deux graphes T et G. La figure 5.2 donne un exemple de cette construction. Montrons que le nombre de phases nécessaires à la réalisation d'un échange total dans G' est 4 si et seulement si le nombre de phases pour réaliser une diffusion à partir de u dans G est 2.

Comme remarque préliminaire, notons que le nœud u diffuse une information dans T en au plus 2 phases, tandis que tous les autres nœuds de T diffusent une information dans T en 3 phases.

Prouvons que si le temps de diffusion à partir de u dans G est au plus 2, alors le graphe G' a un temps d'échange total d'au plus 4. Le protocole d'échange total s'effectue comme suit : toutes les informations de T et de G sont accumulées en parallèle dans le sommet u. Ces deux accumulations sont effectuées en 2 phases. Après ceci, u diffuse toutes les informations simultanément dans T et dans G.

Réciproquement, supposons que le nombre de phases pour réaliser un échange total dans le graphe G' est d'au plus 4. Nous nous focalisons sur les informations contenues initialement dans T. En particulier, il est facile de voir que :

- Après la première phase, pour chaque sous-arbre T_v de T enraciné en un voisin v de u dans T, au moins une information originaire de T_v (connue initialement par une feuille) n'est pas connue à l'extérieur de T_v.
- Pendant la deuxième phase, en raison du degré de u dans T, au plus $n-1$ appels de T peuvent informer des sommets (distincts de u) de G car le degré du sommet u dans le graphe G est majoré par $n-1$.

Ces deux points impliquent qu'après les deux premières phases, il existe un nœud v de T qui contient une information θ de T telle qu'aucun nœud (à l'exception du nœud u) de G ne la connaisse. Pour effectuer l'échange total en 4 phases, l'information θ doit être diffusée à partir du nœud v en au plus 2 phases. Comme les appels de v vers tous les nœuds dans le graphe G doivent passer par le nœud u, nous déduisons que diffuser l'information θ depuis u dans G peut être effectué en au plus 2 phases. □

Les deux résultats précédents montrent que le problème de la diffusion et de l'échange total sont NP-complets pour les réseaux quelconques. À l'inverse du mode 1-port dans une topologie non-orientée, il est donc difficile d'extraire un algorithme permettant de construire un protocole de diffusion ou d'échange total dans un réseau quelconque non-orienté (il est à noter que ces deux problèmes sont aussi NP-complets pour les topologies orientées, les preuves sont presque semblables). Néanmoins, pour certaines topologies classiques, ce problème reste polynomial. Dans la suite du chapitre, nous montrons que c'est le cas pour les arbres. Nous construirons tout d'abord un protocole de diffusion dans les arbres en s'inspirant de la méthode matricielle expliquée dans le chapitre précédent. Un protocole d'échange total sera ensuite construit en se basant sur celui de la diffusion.

5.2 Diffusion partielle dans les arbres

Notre construction d'un protocole de diffusion à partir de u dans un arbre T se base sur la notion de restriction d'un protocole sur un sommet décrite dans le chapitre précédent. Cette construction est récursive. En considérant la source u comme la racine de l'arbre, nous allons bâtir les restrictions d'un protocole aux feuilles (niveau 0), puis aux sommets de niveau 1 et ainsi de suite jusqu'à la racine u. Le niveau d'un nœud dans un arbre est défini ici comme 1 plus le maximum des niveaux de ses fils dans l'arbre T.

Les arbres peuvent être orientés ou non. La notion d'empreinte d'arcs peut être étendue à la notion d'empreinte d'arêtes dans une topologie non-orientée. En fait, on considère une orientation des arêtes. L'empreinte de $\mathcal{B}$ sur *l'arc* $e = (u, v)$ dans une topologie non-orientée, indique le sens dans lequel les appels traversent e. Plus formellement, l'empreinte de $\mathcal{B}$ sur l'arc $e = (u, v)$ est un vecteur de r éléments $(x_1, \ldots, x_r)$, défini de la façon suivante :

- x_j vaut 0 si et seulement si aucun appel traverse l'arc (u, v) à la phase j.
- x_j vaut 1 si et seulement si un appel traverse e dans le sens u vers v à la phase j.
- x_j vaut -1 si et seulement si un appel le traverse e dans le sens v vers u à la phase j.

Remarquons que l'empreinte de $\mathcal{B}$ sur l'arc $e = (u, v)$ est différente de celle de $\mathcal{B}$ sur l'arc (v, u). Dans ce chapitre, les arêtes sont orientées de la racine vers les feuilles. Nous noterons T_v le sous-arbre de T enraciné en v et $\overline{T_v}$ le sous-arbre de T complémentaire à T_v.

Dans la figure 5.3(a), l'arbre T_f possède le sommet h, et $\overline{T_f}$ le sommet g. La matrice M de l'équation 5.2 représente la restriction au sommet a du protocole dessiné dans la figure 5.3(a). Les première, deuxième et troisième lignes représentent respectivement l'empreinte des arcs (u, a), (a, b), et (a, c).

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{5.2}$$

Maintenant, concentrons-nous sur le nœud f. La restriction en f du protocole dessiné en 5.3(a) est égale à $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Ce protocole réalise donc la diffusion dans T_f à partir d'un

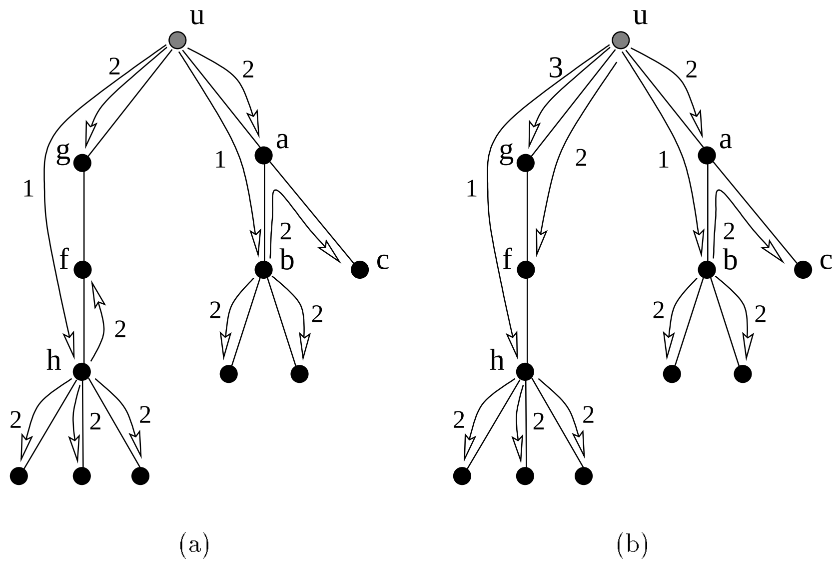


FIG. 5.3: *Exemples de protocoles de diffusions à partir du sommet u dans un arbre.*

nœud extérieur à T_f en deux phases. Nous nous trouvons dans la même situation, pour le protocole dessiné en 5.3(b). Sa restriction sur le sommet f est cependant différente : $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Pour chacune de ces deux matrices, la première (resp. deuxième) ligne représente l'empreinte sur l'arc (g, f) (resp. sur (f, h)). Observons le déroulement de ces deux algorithmes au niveau du nœud g. Le protocole dessiné en 5.3(b) nécessite une phase de plus que celui dessiné en 5.3(a) pour diffuser à partir de u dans l'arbre T_g. La figure 5.3 illustre ainsi le fait qu'il ne suffise pas, pour chaque nœud v, de minimiser le nombre de phases du protocole de diffusion dans l'arbre T_v (ou, en termes de matrices, de minimiser le nombre de colonnes). Il est donc nécessaire de classer autrement les protocoles de diffusion : ils seront ordonnés en fonction de leurs empreintes sur les arcs. À partir de cette constatation, un ordre sur les vecteurs contenant uniquement des -1, 0 et 1 est défini de la manière suivante :

Définition 5.1 *Soit $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ deux vecteurs de composantes $\{-1,\ 0,\ 1\}$. On notera $\mathcal{L} \preceq \mathcal{L}'$ si et seulement si une de ces trois conditions est satisfaite :*

- *$\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont identiques ;*
- *le nombre d'éléments de $\mathcal{L}$ est strictement plus petit que celui de $\mathcal{L}'$;*
- *le nombre d'éléments de $\mathcal{L}$ est égal à celui de $\mathcal{L}'$, et il existe un entier k tel que $\mathcal{L}[k] < \mathcal{L}'[k]$ et tel que $\mathcal{L}[i] = \mathcal{L}'[i]$ pour tout i, $1 \leq i < k$.*

Durant le reste de ce chapitre, par souci de simplicité, nous considérons uniquement des protocoles de diffusion satisfaisant la propriété suivante :

Propriété 5.8 *Pour tout v, le sommet v n'est pas informé simultanément par un appel provenant d'un sommet de $\overline{T_v}$ et par un (ou plusieurs) appel provenant de T_v.*

Afin de satisfaire la propriété 5.8, tout protocole $\mathcal{B}$ peut être modifié en supprimant certains appels. Constatons la propriété de la matrice sur un sommet d'un protocole de diffusion satisfaisant la propriété 5.8 :

Propriété 5.9 *Soit $\mathcal{B}$ un protocole de diffusion à partir de u dans T. Soit v un sommet ayant d voisins, $v_1, \ldots, v_d$, tels que v_1 est dans $\overline{T_v}$. Soit R la restriction de $\mathcal{B}$ en v telle que*

- *R possède d lignes et q colonnes ;*
- *la ligne 1 de R représente l'empreinte de $\mathcal{B}$ sur l'arc (v_1, v) ;*
- *chaque ligne $\ell \neq 1$ représente l'empreinte de $\mathcal{B}$ sur l'arc (v, v_ℓ).*

R satisfait la propriété suivante : il existe un entier $k \leq q$ tel que $\sum_{i=1}^{d} R[i,k] \leq 1$ et tel que parmi les k premières colonnes de R, la colonne k est l'unique colonne qui ne satisfait pas la condition $\sum_{i=2}^{d} R[i,k] = R[1,k]$.

Preuve. La colonne j de R correspond à la phase j du protocole $\mathcal{B}$. Les appels utilisent au plus deux arcs incidents à v. Si un appel utilise un seul arc incident à v, alors v est le récepteur ou l'émetteur de cet appel. Soit k la phase où v reçoit l'information. Les appels des phases $j = 1, \ldots, k-1$, utilisent deux arcs incidents à v et peuvent se classer en deux catégories :

1. des appels reliant deux sommets de l'arbre T_v et passant par le sommet v. (Ces appels traversent deux arcs incidents à v : l'un est utilisé dans le sens feuille-racine et l'autre dans le sens contraire. Un appel de ce type est représenté par deux éléments non-nuls dans la même colonne dans la matrice : un élément à -1 et un élément à 1.)
2. des appels entre un sommet de T_v et un sommet extérieur de T_v. (Constatons qu'il existe au plus un appel de ce type par phase. Ceci est dû à la contrainte que les appels sont arête-disjoints. Si cet appel utilise les arêtes $\{v, v_x\}$ et $\{v_1, v\}$ à la phase j, alors ces arêtes sont traversées dans le même sens. Donc, on a $R[1,j] = R[x,j]$.)

Ainsi, durant les phases $j = 1, \ldots, k-1$, on a $\sum_{i=2}^{d} R[i,j] = R[1,j]$. Concentrons-nous maintenant sur la phase k, c'est-à-dire la phase où v est informé. Intéressons nous plus exactement aux appels utilisant une seule arête incidente à v. D'après la propriété 5.8, deux situations peuvent se présenter :

- Un seul appel informe v et utilise l'arête $\{v_1, v\}$. On a $\sum_{i=2}^{d} R[i,j] = 0$ car tous les autres appels se situent dans la catégorie 1 ci-dessus.
- Plusieurs appels informent v et utilisent les arêtes du type $\{v, v_\ell\}$ avec $\ell \neq 1$. On a $\sum_{i=2}^{d} R[i,j] \leq -1$.

Durant la phase k, on a donc $\sum_{i=1}^{d} R[i,k] \leq 1$ et $\sum_{i=2}^{d} R[i,k] \neq R[1,k]$. Ceci termine la preuve. □

Le problème de diffusion va donc être traité comme un problème de matrices, comme nous l'avons fait dans le chapitre 4.

5.2.1 Le problème de la Δ-restriction minimum

Soit une matrice M de p lignes et q colonnes, et où chaque élément appartient à $\{-1, 0, 1\}$.

Définition 5.2 *Une* Δ-restriction *de M est une matrice R de p lignes et q' colonnes satisfaisant les deux propriétés suivantes :*

1. *Il existe un entier $k \leq q'$ tel que $\sum_{i=1}^{p} R[i,k] \leq 1$ et tel que, parmi les k premières colonnes de R, la colonne k est la seule colonne qui ne satisfait pas la condition $\sum_{i=2}^{p} R[i,k] = R[1,k]$.*
2. *Chaque ligne ℓ de R est plus grande que la ligne ℓ de M selon l'ordre $\preceq$ de la définition 5.1.*

Le problème de la Δ-restriction minimum d'une matrice M consiste à trouver une Δ-restriction telle que sa première ligne soit plus petite que toutes les premières lignes de toutes les Δ-restrictions de M selon l'ordre $\preceq$ (en d'autres termes, si M^* une Δ-restriction minimum de M, alors $\mathcal{L}_{M^*}(1) \preceq \mathcal{L}_R(1)$ pour toute Δ-restriction R de M).

Déterminons la relation entre ce problème matriciel et celui de la diffusion en mode Δ-port. Expliquons-la tout d'abord sur l'exemple 5.4. Nous voulons trouver une restriction d'un protocole de diffusion en a tout en connaissant les protocoles de diffusion à partir d'un sommet extérieur à T_a dans les sous-arbres T_b, T_c, et T_f (notés respectivement $\mathcal{B}_b$, $\mathcal{B}_c$ et $\mathcal{B}_f$). Les empreintes des arcs (a,b), (a,c) et (a,f) sont supposées connues, contrairement à celle de l'arc (g,a). Considérons un protocole $\mathcal{A}$ qui fusionne ces trois protocoles de diffusion. On décide que tout sommet émetteur extérieur à T_b, T_c et T_f dans $\mathcal{B}_b$, $\mathcal{B}_c$, et $\mathcal{B}_f$ respectivement est aussi extérieur à T_a dans $\mathcal{A}$. On obtient la matrice de restriction suivante en a.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{ empreinte de l'arc } \{g,a\} \\ \leftarrow \text{ empreinte de l'arc } \{a,b\} \\ \leftarrow \text{ empreinte de l'arc } \{a,c\} \\ \leftarrow \text{ empreinte de l'arc } \{a,f\} \end{array} \tag{5.3}$$

Cette matrice ne respecte pas la contrainte que les appels doivent être arête-disjoints. De plus, le protocole $\mathcal{A}$ correspondant n'est pas un protocole de diffusion dans T_a à partir d'un sommet extérieur à T_a car le sommet a n'est pas informé. Considérons la matrice M comportant 4 lignes où la première ligne est le vecteur [0 1] et où les suivantes sont les empreintes des arcs (a,b), (a,c) et (a,f). On impose donc que le sommet a soit informé à la dernière phase par une communication de l'extérieur. En fait, on construit la matrice M de l'équation 5.4. Les première, deuxième, troisième et quatrième lignes représentent respectivement l'empreinte des arcs (g,a), (a,b), (a,c) et (a,f).

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

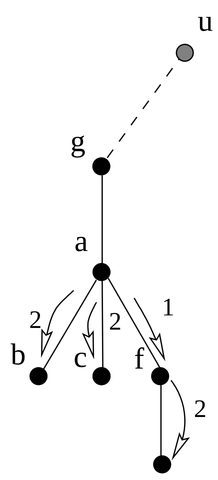


FIG. 5.4: *protocoles de diffusion dans* T_b*,* T_c *et* T_f

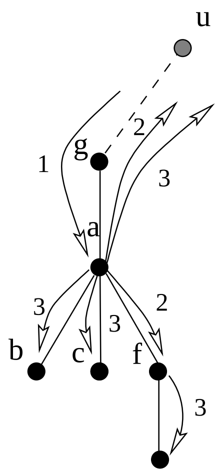


FIG. 5.5: *Exemple de la construction d'un protocole de diffusion en* Δ*-port dans un arbre.*

En fait, intuitivement, la première ligne indique simplement que le sommet a doit être informé. Si l'on décide de construire un protocole dans T_a à partir des trois protocoles précédents, alors une Δ-restriction minimum de M représente la restriction de ce protocole en T_a.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.5}$$

De cet exemple, on peut en déduire le corollaire suivant :

Corollaire 5.4 *Soit* v *un sommet de* T*. Supposons que* v *ait* d *voisins dans* T*,* $v_i, 1 \leq i \leq d$*, avec* v_1 *dans* $\overline{T_v}$*. Soit* $\mathcal{B}$ *un protocole de diffusion dans* T *à partir d'un sommet extérieur de* T_v*. Sa matrice de restriction en* v *est aussi une* Δ*-restriction d'une matrice* M *de la forme suivante :*

- *la ligne* 1 *est le vecteur* $[0, \ldots, 0, 1]$ *;*
- *pour tout* $i \in \{2, \ldots, d\}$*, la ligne* i *correspond à l'empreinte de* $\mathcal{B}$ *sur l'arc* (v, v_i)*.*

Preuve. Pour $i \geq 2$, la ligne i de la restriction R de $\mathcal{B}$ sur le sommet v représente l'empreinte de $\mathcal{B}$ en l'arc (v, v_i). Concentrons nous maintenant sur la ligne 1. Comme il faut informer un sommet de T_v, il faut qu'il existe au moins un 1 sur la ligne 1. Par conséquent, on a $\mathcal{L}_M(1) \preceq \mathcal{L}_R(1)$. De plus, on peut déduire de la propriété 5.9, qu'il existe un k qui satisfasse la condition 1 de la définition 5.2. $\square$

Avant de montrer la réciproque, nous allons prouver qu'il existe aussi un ordre sur les protocoles de diffusion :

Lemme 5.5 *Soit v un sommet de T de degré d, de voisins $v_1, \ldots, v_d$ avec v_1 dans $\overline{T_v}$. Soit $\mathcal{B}$ un protocole de diffusion à partir d'un nœud de $\overline{T_v}$ dans T_v. Notons e l'arc (v_1, v). Pour tout vecteur $\mathcal{L}$ tel que* $\mathrm{shad}(\mathcal{B}, e) \preceq \mathcal{L}$, *il existe un protocole de diffusion $\mathcal{B}'$ tel que* $\mathrm{shad}(\mathcal{B}', e) = \mathcal{L}$.

Preuve. Soit v un sommet satisfaisant les hypothèses de l'énoncé. Nous notons $\{? \to x\}$ ou $\{x \to ?\}$ un appel reliant un nœud extérieur à T_v au sommet x de T_v. Son émetteur sera un nœud extérieur à T_v dans le premier cas, et x dans le deuxième cas. Le caractère "?" symbolise un nœud de $\overline{T_v}$. Nous construisons le protocole $\mathcal{B}'$ en fonction du vecteur $\mathcal{L}$. Nous noterons le ième élément du vecteur $\mathcal{L}$ par $\mathcal{L}[i]$ et le vecteur $\mathcal{L}$ sera représenté par $(\mathcal{L}[i], \ldots \mathcal{L}[p])$ où p désigne le nombre d'élément de $\mathcal{L}$. $\mathcal{B}'$ est une copie $\mathcal{B}$ modifiée de la façon suivante :

- Si $\mathcal{L}$ possède plus d'éléments que $\mathrm{shad}(\mathcal{B}, e)$, alors le nœud v sera informé à la première phase de $\mathcal{B}'$ par un appel extérieur du type $\{? \to v\}$. Le protocole $\mathcal{B}$ commence à la deuxième phase de $\mathcal{B}'$ dans lequel tous les appels du type $\{? \to x\}$ et $\{x \to ?\}$ de $\mathcal{B}$ sont remplacés par $\{v \to x\}$ et $\{x \to v\}$. Si $\mathcal{L}[i] = 1$ (resp. $\mathcal{L}[i] = -1$), alors un appel $\{? \to v\}$ (resp. $\{v \to ?\}$) est inséré à la phase i du protocole $\mathcal{B}'$.

- Si $\mathcal{L}$ possède le même nombre d'éléments que $\mathrm{shad}(\mathcal{B}, e)$, alors nous considérons le plus petit entier j tel que $\mathrm{shad}(\mathcal{B}, e)[j] < \mathcal{L}[j]$ et tel que, pour tout $i = \{1, \ldots, j-1\}$, $\mathrm{shad}(\mathcal{B}, e)[i] < \mathcal{L}[i]$. Le protocole $\mathcal{B}$ commence à la phase 1 de $\mathcal{B}'$. Considérons plus particulièrement la phase j. Si $\mathcal{L}[j] = 1$, alors $\mathrm{shad}(\mathcal{B}, e)[j] \leq 0$, et l'appel $\{? \to v\}$ est inséré à la phase j du protocole $\mathcal{B}'$. Si $\mathcal{L}[j] = 0$, alors $\mathrm{shad}(\mathcal{B}, e)[j] = -1$, et l'appel $\{x \to ?\}$ de $\mathcal{B}$ durant cette phase est transformé en l'appel $\{x \to v\}$ dans $\mathcal{B}'$. Les phases restantes sont modifiées de la même manière que le cas précédent.

□

On peut donc introduire la définition suivante :

Définition 5.3 *Soit T un arbre et soit $\mathcal{B}$ un protocole de diffusion dans T à partir de la racine de T. Soit e un arc de T. $\mathcal{B}$ est dit* minimum *en e si et seulement si pour tout protocole de diffusion $\mathcal{B}'$ dans T, on a* $\mathrm{shad}(\mathcal{B}, e) \preceq \mathrm{shad}(\mathcal{B}', e)$.

On a alors :

Corollaire 5.6 *Soit v un sommet de T. Supposons que v a d voisins v_i dans T, $1 \leq i \leq d$, avec v_1 dans $\overline{T_v}$. Soit $\mathcal{B}_i$ un protocole de diffusion dans T_{v_i} à partir d'un nœud de $\overline{T_{v_i}}$, $2 \leq i \leq d$. Soit M la matrice construite de la façon suivante :*

- *la ligne 1 est le vecteur $[0, \ldots, 0, 1]$;*
- *pour tout $i \in \{2, \ldots, d\}$, la ligne i correspond à l'empreinte de $\mathcal{B}_i$ sur l'arc (v, v_i).*

Alors toutes les Δ-restrictions R de M décrivent un protocole $\mathcal{B}_v$ de diffusion dans T avec pour tout $i \in \{2, \ldots, d\}$, la ligne i de R qui correspond aux empreintes de $\mathcal{B}_v$ sur les arcs (v, v_i), et la ligne 1 de R qui corresponde à l'empreinte de $\mathcal{B}_v$ sur l'arc (v_1, v).

Preuve. Soit R une Δ-restriction de M ayant r colonnes. Un protocole de diffusion $\mathcal{B}_v$ dans T_v à partir d'un sommet de $\overline{T_v}$ est défini comme l'union de tous les protocoles $\mathcal{B}'_i$ dont l'empreinte sur l'arc (v, v_i) est la ligne i de R, $i = 2, \ldots, d$. L'existence de $\mathcal{B}'_i$ est justifiée par le lemme 5.5. Soit $k \leq r$ le plus petit entier tel que parmi les k premières colonnes de R, la colonne k est la seule colonne qui ne satisfasse pas la condition $\sum_{i=2}^{d} R[i,k] = R[1,k]$.

Pour tout $j \in \{1, \ldots, k-1\}$, on a $\sum_{i=2}^{d} R[i,j] = R[1,j]$ par définition de la matrice R et du protocole $\mathcal{B}_v$. Ceci signifie que $-1 \leq \sum_{i=2}^{d} R[i,j] \leq 1$. De plus, comme plusieurs éléments de la colonne j de R peuvent être égaux à 1 ou à -1, on peut coupler deux-à-deux les lignes de telle manière que deux lignes $\ell > 1$ et $\ell' > 1$ soient associées si et seulement si on a $R[\ell, j] = -1$ et $R[\ell', j] = 1$. Par définition des empreintes, deux appels $\{y \rightarrow ?\}$ et $\{? \rightarrow x\}$ s'exécutent à la phase j. Le premier traverse par exemple l'arc (v, v_ℓ) et le second par exemple arc $(v, v_{\ell'})$. Ces deux appels sont regroupés en un seul appel $\{y \rightarrow x\}$ dans le protocole $\mathcal{B}_v$. Si $\sum_{i=2}^{d} R[i,j] \neq 0$, alors on a un appel dont l'émetteur ou le récepteur est inconnu. Par exemple si $\sum_{i=2}^{d} R[i,j] = 1$, alors il existe un appel du type $\{? \rightarrow x\}$ où x est un sommet de T_v (avec $x \neq v$). Cet appel traverse l'arête $\{v_1, v\}$ de v_1 vers v. Par conséquent, $R[1,j] = \sum_{i=2}^{d} R[i,j] = 1$. Il en est de même pour le cas où $R[1,j] = \sum_{i=2}^{d} R[i,j] = -1$.

Nous allons maintenant nous concentrer sur la phase k où k est l'entier qui satisfait la condition 1 de la définition 5.2. De la même manière que précédemment, nous pouvons apparier deux lignes de façon à ce que, sur la colonne k, une ait un élément à 1 et l'autre un élément à -1. Par définition du paramètre k et du fait que $\sum_{i=2}^{d} R[i,k] \neq R[1,k]$, après les opérations de couplages des appels, il y a encore un appel utilisant un arc incident de v et tel qu'une de ses extrémités soit indéterminée. En fait, comme $\sum_{i=1}^{d} R[i,k] \leq 1$, on a $\sum_{i=2}^{d} R[i,k] \leq 0$ et cet appel ne connaît pas son récepteur à ce stade du processus. Il est modifié de façon à ce que v devienne son récepteur.

Pour les colonnes j restantes, $j > k$, si, pour la ligne $i > 1$, on a $R[i,j] = 1$, alors il y a un appel du type $\{? \rightarrow x\}$ où x est un sommet de T_v. Il est remplacé par un appel $\{v \rightarrow x\}$. De plus, on insère des appels $\{v \rightarrow ?\}$ (resp. $\{? \rightarrow v\}$) à la phase j si et seulement si $R[1,j] = -1$ (resp. $R[1,j] = +1$). Ceci termine la preuve de ce théorème. □

Pour déterminer un protocole de diffusion dans T, il suffit donc de déterminer la Δ-restriction minimum de la matrice M en se restreignant aux matrices dont leur première ligne a tous ses éléments nuls sauf le dernier qui vaut 1. L'algorithme 5.1 calcule la Δ-restriction minimum. Informellement, on parcourt la matrice de gauche à droite, de la première colonne à la dernière colonne de la matrice. Pour chaque colonne, on vérifie que la somme des éléments de cette colonne ne dépasse pas 1 puis, parallèlement, on détermine l'entier k qui satisfera plus tard la condition 2 de la définition 5.2.

Complexité en temps de l'algorithme 5.1. Supposons que la matrice M ait d lignes et q colonnes. Dans le pire des cas, la boucle *tant que* est exécutée q fois et les coûts des instructions à l'intérieur de celle-ci sont en $O(d)$. Par conséquent, la complexité de l'algorithme est $O(qd)$.

Lemme 5.7 *La matrice générée par l'algorithme 5.1 est la Δ-restriction minimum de M en fonction de l'ordre $\preceq$.*

Algorithme 5.1 Calcul de la restriction minimale de la matrice M

/* *Phase d'initialisation* */
Soit d le nombre de lignes et q le nombre de colonnes de la matrice de M.
$j :=1;$
$k :=0;$
$non\_fini := true;$
tant que (non_fini) **et** $(q+1>j)$ **faire**
    /* *$\mathcal{C}[j]$ est la somme des éléments de la j ème colonne de M* */
    $\mathcal{C}[j] := \sum_{i=1}^{d} M[i,j]$
    selon que
        • $\mathcal{C}[j] < -1$ **alors**
            $k := j\,;\ M[1,j] := -2;$
            $non\_fini := false;$
        /* *il existe au moins deux éléments à -1* */
        • $\mathcal{C}[j] = -1$ **ou** $\mathcal{C}[j] = 0$ **alors** $k := j\,;\ M[1,j] := \mathcal{C}[j];$
        • $\mathcal{C}[j] = 1$ **alors** $M[1,j] := \mathcal{C}[j];$
        • $\mathcal{C}[j] > +1$ **alors** $non\_fini := false;$
        /* *il existe au moins deux éléments à 1* */
    fin selon
    $j := j+1;$
fin tant que
/* *Réactualisation de la Δ-restriction R* */
si $k=0$ **alors**
    Insertion d'une colonne nulle à la position 0 de M
    Tous les éléments de la ligne 1 de M valent -1
    sauf son premier élément qui vaut 1.
sinon
    $M[1,k] := M[1,k]+1;$
    pour tout entier j compris entre $k+1$ et q **faire** $M[1,j] := -1;$
fin si

Preuve. Soit q le nombre de colonnes dans M. Soit R la matrice retournée par l'algorithme 5.1. Nous allons prouver ce lemme par l'absurde. Supposons qu'il existe une Δ-restriction M' de M telle que $\mathcal{L}_{M'}(1) \prec \mathcal{L}_R(1)$. Notons r le nombre de colonnes de R et r' le nombre de colonnes de M'. Nous considérons deux cas.

Cas 1. $r' \geq q+1$. Dans le pire cas, l'algorithme 5.1 retourne une matrice dont la première ligne est égale au vecteur de $q+1$ éléments $[1,-1,\ldots,-1]$. Par la définition de l'ordre, on a alors $R \preceq M'$ et on obtient une contradiction. Ceci implique que r' est nécessairement égale à q.

Cas 2. $r' = q$. La matrice M' est donc composée de r éléments. Nous nous focalisons sur le plus petit entier k' (resp. k) satisfaisant les deux propriétés suivantes : $\sum_{i=1}^{d} M'[i,k'] \leq 1$ (resp. $\sum_{i=1}^{d} R[i,k] \leq 1$) et, parmi les k' (resp. k) premières colonnes de M' (resp. M), la colonne k' (resp. k) est l'unique colonne qui ne satisfasse pas la condition suivante : $\sum_{i=2}^{d} M'[i,j] = M'[1,j]$ (resp. $\sum_{i=2}^{d} R[i,j] = R[1,j]$). Pour tout entier j, $1 \leq j \leq k'$ nous avons :

$$\sum_{i=1}^{d} M[i,j] \leq 1$$

Cas 2.1 Il existe un entier j, $1 \leq j \leq k'$ tel que $\sum_{i=1}^{d} M[i,j] < -1$. Alors l'algorithme 5.1 impose $k < k'$. Par conséquent, $\mathcal{L}_R(1) \preceq \mathcal{L}_{M'}(1)$ et ceci nous amène à une contradiction.

Cas 2.2 Pour tout j, $1 \leq j \leq k'$, nous avons $\sum_{i=1}^{d} M[i,j] \geq -1$. Alors, en particulier, nous avons $0 \geq \sum_{i=1}^{d} M[i,k'] \geq -1$. L'algorithme 5.1 détecte la possibilité que k puisse prendre pour valeur k'. Si l'algorithme 5.1 n'affecte pas à k la valeur k', alors, $k > k'$ et l'algorithme ne modifie pas la colonne k'. Ceci signifie qu'à la colonne k', on a $\sum_{i=1}^{d} M'[i,k'] > \sum_{i=1}^{d} R[i,k]$. Ainsi, nous avons $\mathcal{L}_R(1) \preceq \mathcal{L}_{M'}(1)$. Ceci nous amène à nouveau à une contradiction.

$\square$

En résumé, à partir de protocoles de diffusions $\mathcal{B}_i$ dans T_{v_i}, nous avons extrait le protocole $\mathcal{B}_v$ qui a la plus petite empreinte sur l'arc (v_1, v). À partir de ce fait, comment peut-on construire globalement un protocole de diffusion dans T à partir de u ? Cette construction est formellement décrite dans la section suivante.

5.2.2 Construction d'un protocole de la diffusion dans T

Algorithme 5.2 Diffusion à partir u dans T

/* *Phase d'initialisation* */
Soit h la hauteur de l'arbre T enraciné en u
pour chaque feuille v de T **faire**
  /* *Construction de la matrice restriction.* */
  l'empreinte de l'arc (v_1, v) est le vecteur $[1]$;
fin pour
pour $\ell :=1$ **à** $h-1$ **faire**
  pour chaque nœud v du niveau ℓ **faire**
  /* *Construction de la matrice M_v* */
  M_v est la matrice où
    - d est le degré de v dans l'arbre T.
    - chaque ligne $i = \in \{2, \ldots, d\}$ est l'empreinte de l'arc (v, v_i)
    - la ligne 1 est le vecteur $[0, \ldots, 0, 1]$
  Trouver la Δ-restriction minimum de M_v.
  L'empreinte de l'arc (v_1, v) correspond à la première ligne de M_v

Théorème 5.8 *Soit v un sommet d'un arbre T. Supposons que v ait d voisins $v_i, 1 \leq i \leq d$, avec v_1 dans $\overline{T_v}$. Soit $\mathcal{B}_i$ un protocole de diffusion dans T_{v_i} à partir d'un nœud extérieur de T_{v_i}, $2 \leq i \leq d$. Supposons que $\mathcal{B}_i$ soit minimum en l'arc (v, v_i). Soit la matrice M suivante :*

- *la ligne 1 est le vecteur $[0, \ldots, 0, 1]$;*
- *pour tout $i \in \{2, \ldots, d\}$, la ligne i correspond à l'empreinte de $\mathcal{B}_i$ sur l'arc (v, v_i).*

Une Δ-restriction R de M est minimum si et seulement si le protocole $\mathcal{B}$, dont la restriction en v est R, est aussi minimum en $\{v_1, v\}$.

La preuve de ce théorème est une compilation de deux corollaires 5.4 et 5.6 et du lemme suivant :

Lemme 5.9 *Soit M et M' deux matrices de p lignes. Si pour tout i, $1 \leq i \leq p-1$, on a $M[i] \preceq M'[i]$, alors les Δ-restrictions minimums R et R' respectivement de M et M' satisfont $\mathcal{L}_R[1] \preceq \mathcal{L}_{R'}[1]$.*

Preuve. Il suffit de montrer qu'une Δ-restriction R' de M' est aussi une Δ-restriction de M. Soit R' une restriction de la matrice M' de q' colonnes. Par définition, nous avons, pour tout $\ell = 1, \ldots, p$, $\mathcal{L}_{M'}(\ell) \preceq \mathcal{L}_{R'}(\ell)$. D'autre part, on a :

1. par transitivité de l'ordre $\preceq$, pour tout $\ell = 1, \ldots, p$, $\mathcal{L}_M(\ell) \preceq \mathcal{L}_{R'}(\ell)$.
2. il existe $k \leq q'$ défini comme le plus petit entier tel que $\sum_{i=1}^{p} R'[i,k] \geq 1$ et tel que, parmi les k premières colonnes de R', la colonne k ne satisfait pas la condition $\sum_{i=2}^{p} R'[i,k] = R'[1,k]$.

Donc R' est aussi une Δ-restriction de la matrice M. □

L'algorithme de diffusion dans un arbre quelconque est décrit par l'algorithme 5.2.

Théorème 5.10 *Le protocole de diffusion généré par l'algorithme 5.2 est optimal en nombre de phases.*

Preuve. Nous allons prouver que, pour chaque arc de l'arbre, le protocole construit par l'algorithme 5.2 est minimum en cet arc. Ceci peut se montrer par récurrence sur le paramètre $\mathcal{N}(v)$ désignant le niveau du nœud v dans l'arbre T enraciné en u.

Considérons le cas où $\mathcal{N}(v) = 0$ (i.e. v est une feuille dans T). Pour diffuser depuis le nœud u dans l'arbre T_v (ici réduit à un seul sommet), il est nécessaire qu'un appel utilise l'arc (v_1, v) afin d'informer v. Cet appel peut se réaliser à n'importe quelle phase du protocole. Notamment, on peut supposer qu'il se fait à la dernière phase. La matrice de restriction en v est alors $[1]$. Ce vecteur correspond aussi à l'empreinte de l'arc (v_1, v). Donc ce protocole est optimal en l'arc (v_1, v). Ainsi, la propriété est vérifiée pour $\mathcal{N}(v) = 0$.

Supposons maintenant que la propriété soit vraie pour tout nœud v tel que $\mathcal{N}(v) < i$. Considérons un sommet v tel que $\mathcal{N}(v) = i$. Soit v_i les voisins de v dans T_v pour $i = 1, \ldots, d$, où d est le degré de v. Par hypothèse de récurrence, comme le protocole $\mathcal{B}_i$ obtenu par l'algorithme est optimal en (v, v_i) pour tout $i \in \{2, \ldots, d\}$, on peut déduire du théorème 5.8 que le protocole de diffusion à partir d'un sommet de $\overline{T_v}$ dans T_v obtenu par l'algorithme est optimal en l'arc (v_1, v). □

Complexité en temps de l'algorithme 5.2. Pour chaque nœud v dans T, le coût de la construction de l'empreinte de l'arc (v_1, v) est de $O(qd)$ où d correspond au degré de v, et q au nombre de colonnes de la matrice M_v. Soit n le nombre de sommets de T. Le nombre d'appels est égal à $n-1$, et la complexité en temps de notre algorithme est donc $O(n^2)$.

5.2.3 Diffusion dans un arbre orienté

L'algorithme 5.2 légèrement modifié peut aussi résoudre d'autres problèmes plus généraux comme la diffusion sans se préoccuper si la topologie est orientée ou non. Nous pouvons en particulier noter que l'algorithme 5.2 peut être étendu au cas où l'arbre T est dirigé de la source vers les feuilles. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 4, l'arbre orienté permet à un nœud v d'appeler uniquement les nœuds de T_v. Les empreintes des protocoles sur les arcs contiennent alors uniquement des 0 et des 1. Dans ce cas, l'ordre $\leq$ est l'ordre $\preceq$. L'algorithme 5.1 peut être simplifié parce que la matrice avec laquelle on doit construire la restriction minimum contient exclusivement des éléments positifs. Par conséquent, les cas où la somme des éléments d'une colonne est négative, peuvent être supprimés. De plus, comme les empreintes ne peuvent pas contenir des entiers négatifs, les -1 peuvent être remplacés par des 0.

5.3 Diffusion partielle

L'algorithme 5.2 et son extension aux arbres orientés construisent un protocole de diffusion à partir un nœud u dans un arbre orienté ou non. Les deux algorithmes peuvent encore être adaptés de façon à obtenir un schéma de diffusion *partielle* à partir d'un nœud u vers un groupe de nœuds D. De plus, localement, les nœuds de l'arbre peuvent ne pas avoir les même fonctionnalités. En fait, deux cas possibles peuvent se poser :

1. les nœuds peuvent transmettre et envoyer les messages ; (nous noterons que ces sommets sont noirs.)

2. les nœuds ne peuvent que transmettre des messages. En d'autres termes, ils ne sont pas capables d'envoyer des messages et donc de servir de relais. Par convention, ils sont de couleur blanche.

Soit D_v le sous-ensemble de D formé par les sommets de $D \cap T_v$. L'algorithme 5.2 se base sur le fait qu'à chacune de ses étapes, il construit un protocole de diffusion dans un arbre dérivé de T qui est minimum en tous ses arcs. Cette idée est reprise pour l'algorithme calculant un protocole de diffusion partielle. Dans cet algorithme, on utilise conjointement deux problèmes matriciels : la Δ-restriction minimum et la matrice sans conflit minimum. Malheureusement, nous ne pouvons pas appliquer le second problème directement dans T sans que T subisse des modifications. L'arbre T est transformé en T' suivant l'algorithme 5.4. Il est facile de voir que T' satisfait alors la propriété suivante :

Propriété 5.10 *Si deux sommets voisins de T' sont blancs (selon la terminologie de l'algorithme 5.4), alors un des deux sommets est une feuille de T'.*

Algorithme 5.3 Diffusion partielle à partir de u dans D dans T

/* *Phase d'initialisation* */
Transformer l'arbre T en un arbre T'.
Soit h la hauteur de T' enraciné en u.
pour chaque feuille v de T' **faire**
  /* *Construction de la matrice restriction.* */
  l'empreinte de l'arc (v_1, v) est [1].
fin pour
pour $\ell := 1$ **à** $h - 1$ **faire**
pour chaque nœud v du niveau ℓ **faire**
  /* *Calculer l'empreinte de l'arc* (v_1, v) */
  Soit d le degré du sommet v ;
  Soit $\mathcal{B}_i$ un protocole de diffusion dans T'_{v_i} à partir d'un nœud de $\overline{T_{v_i}}$ vers D_{v_i} ;
  Regrouper les empreintes minimums de $\mathcal{B}_i$ en (v, v_i) pour $i = \{2, \ldots, d\}$ dans une matrice M_v.
  Appliquer le problème matriciel adapté selon les fonctionnalités du sommet v.
  Extraction de l'empreinte de l'arc (v_1, v) et du protocole $\mathcal{B}$ de diffusion à partir de nœuds $\overline{T_v}$ vers D_v.

À partir des empreintes minimums des arcs (v, v_j) incidents de v, on construit la matrice M_v dont toutes les lignes représentent les empreintes des arcs, à l'exception de la ligne 1 qui est définie selon les fonctionnalités de v.

Cas 1 : Le sommet v peut transmettre et envoyer.

Cas 1.1 : v est dans D. Nous nous trouvons dans la même situation que lors de la diffusion à partir d'un sommet de u dans l'arbre T. C'est pour cette raison que la ligne 1 de M_v est le vecteur $[0, \ldots, 0, 1]$. À partir de cette matrice, on peut calculer sa Δ-restriction minimum telle que sa première ligne soit l'empreinte de l'arc (v_1, v). Le protocole ainsi extrait est minimum en (v_1, v) en raison du théorème 5.8.

Cas 1.2 : v n'est pas dans D. La ligne 1 de M_v est tout d'abord composée d'éléments nuls. Nous effectuons un test. Ce test permet de détecter si le sommet doit servir de relais afin "d'accélérer" la diffusion partielle dans son sous-arbre. Si toutes les colonnes de M_v contiennent uniquement des colonnes avec au plus un 1, alors l'empreinte de l'arc (v_1, v) est l'empreinte de la matrice M_v. Sinon v doit servir de relais et on se ramène au cas précédent en affectant le vecteur $[0, \ldots, 0, 1]$ à la ligne 1 de la matrice M_v. De plus, il est facile de voir que $\mathcal{B}$ est minimum en (v_1, v).

Cas 2 : Le sommet v ne peut que transmettre. Ce cas n'a été résolu que dans le cas orienté. Ceci est dû au fait que le problème de la matrice sans conflit minimum s'adapte très facilement à ce genre de problème. Malheureusement, ce problème matriciel n'a été résolu que pour les matrices booléennes. Pour le cas non-orienté, les matrices peuvent contenir des -1. Nous allons voir la relation entre ce problème et le problème de la matrice sans conflit minimum.

Cas 2.1 : v n'est pas dans D. Constatons que

Algorithme 5.4 Transformation de l'arbre T en un arbre T'.

Élaguer T de telle façon que toutes les feuilles de T soient dans D.
Soit T' le résultat de l'élagage de T.
Soit h la hauteur de T élagué enraciné en u.
/* *phase d'initialisation* */
pour chaque nœud v de T' **faire**
    si v ne peut pas participer comme émetteur dans la diffusion
        alors colorier v en blanc.
        sinon colorier v en noir.
pour $\ell :\, = 1$ **à** $h - 1$ **faire**
    pour chaque nœud v du niveau ℓ **faire**
        si v est de couleur blanche **alors**
        Soit d le degré du sommet v dans T' ;
        Soit v_1 le sommet voisin de v non dans T'_v ;
        pour $i = 2$ **à** d **faire**
            Remplacer l'arc (v, v_i) par l'arc (v_1, v_i) dans T'
        si v n'est pas dans D **alors** supprimer v dans T'

Corollaire 5.11 *Tout protocole de diffusion à partir d'un sommet de* $\overline{T_v}$ *vers* $D_v \subseteq T_v$ *est associé à un protocole de diffusion à partir de* v *dans* T'_v *en mode* 1*-port, et réciproquement.*

Nous n'allons pas démontrer ce corollaire, mais la figure 5.6 l'illustre bien. En posant la ligne 1 de la matrice M_v nulle, nous avons de plus le résultat suivant :

Corollaire 5.12 *Soit* $\mathcal{B}_i$ *le protocole de diffusion dans* T'_v *à partir d'un sommet* v *(ayant* d *voisins* d_i, $i = 1, \ldots, d$, *avec* $v_1 \in \overline{T'_v}$*) vers* D_v *minimum en* (v, v_i). *L'empreinte d'une matrice* R *sans conflit minimum de* M_v *correspond à celle sur l'arc* (v_1, v) *d'un protocole* $\mathcal{B}$ *ayant* R *pour restriction et qui soit minimum en l'arc* (v_1, v). *Et réciproquement.*

Informellement, la preuve du corollaire 5.12 est identique à celle de la proposition 4.8 pour la diffusion dans une étoile généralisée en mode 1-port. Dans notre cas, nous avons aussi à tenir compte du fait que si un sous-arbre T_w de racine w de T'_v reçoit un appel avant qu'il en ait "vraiment besoin" pour diffuser l'information selon un protocole $\mathcal{B}_w$ (c'est-à-dire que l'empreinte de $\mathcal{B}_w$ en l'arc (v, w) à cette phase est égale à zéro), alors cet appel informe la racine w de T_w. Le sommet w effectue ensuite la diffusion partielle dans T_w sans l'aide d'un appel extérieur si w est de couleur noire. En revanche, d'après la propriété 5.10, si w est un nœud blanc, alors w est une feuille de l'arbre T' et, après que w soit informé, il n'est plus nécessaire qu'un autre appel utilise cet arc. Ceci est la traduction de la règle 1 du chapitre 4.

Cas 2.2 : v est dans D. Constatons que :

Corollaire 5.13 *Tout protocole de diffusion partielle dans* $D_v \subseteq T_v$ *à partir d'un sommet de* $\overline{T_v}$, *est associé à un protocole de diffusion dans* $T'_{v_1} \cup (v_1, v)$ *à partir de* v *vers* $D_v \cup v$ *en mode* 1*-port.*

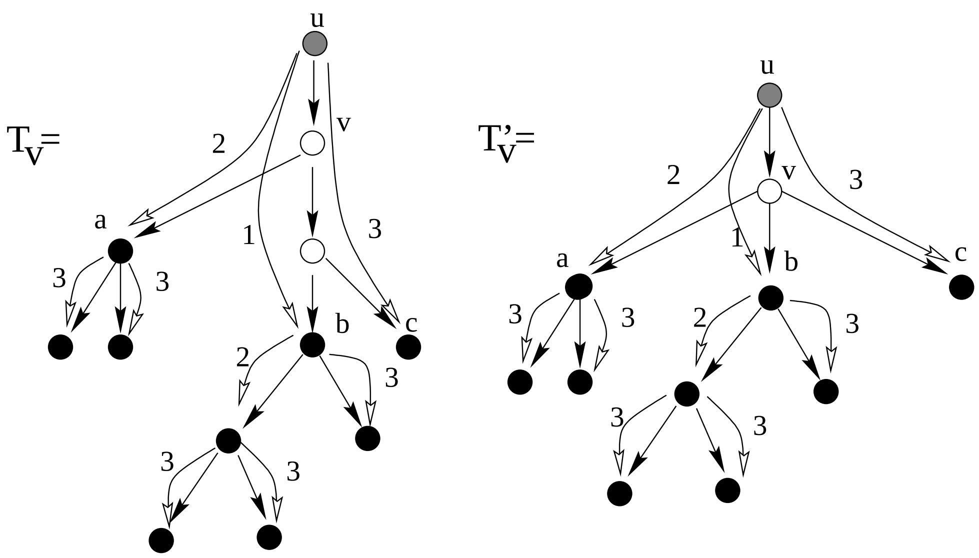


FIG. 5.6: *Équivalence entre deux protocoles de diffusion à partir de u vers les nœuds noirs (voir corollaire 5.11). Les sommets blancs ne sont pas capables d'envoyer les messages.*

Là encore la figure 5.7 illustre bien cette équivalence. En posant la ligne 1 de la matrice M_v égale au vecteur $[0, \ldots, 0, 1]$, nous avons le résultat suivant :

Corollaire 5.14 *Soit $\mathcal{B}_i$ le protocole de diffusion minimum en (v, v_j) dans $T'_{v_1} \cup (v_1, v)$ à partir d'un sommet v vers l'ensemble D_v. L'empreinte d'une matrice sans conflit minimum R de la matrice composée d'empreintes de $\mathcal{B}_i$ correspond à la restriction sur l'arc (v_1, v) d'un protocole $\mathcal{B}$ ayant R pour restriction et qui soit minimum en l'arc (v_1, v).*

Nous n'allons pas démontrer ce corollaire car sa preuve est identique à celle de la proposition 4.8 pour la diffusion dans une étoile généralisée en mode 1-port.

5.4 Échange total dans les arbres

Précisons que l'échange total ne peut bien sûr s'effectuer que dans un arbre non-orienté. Dans la section précédente, nous avons décrit un algorithme polynomial de construction d'un protocole optimal de diffusion dans un arbre quelconque. Cette section explique pourquoi le protocole "accumulation et diffusion" minimise le nombre de phases d'un échange total. La seule difficulté réside à choisir pertinemment le nœud dans lequel l'accumulation est faite. Cette section se divise en deux parties. La première est dédiée à la recherche de la borne inférieure sur le nombre nécessaire de phases pour effectuer un échange total dans tout arbre non-orienté. La deuxième partie décrit un algorithme qui retourne un protocole d'échange total optimal dans un arbre T. Commençons par fixer quelques notations :

- $b_{min}(T) = min_{v \in V(T)} b_\Delta(T, v)$

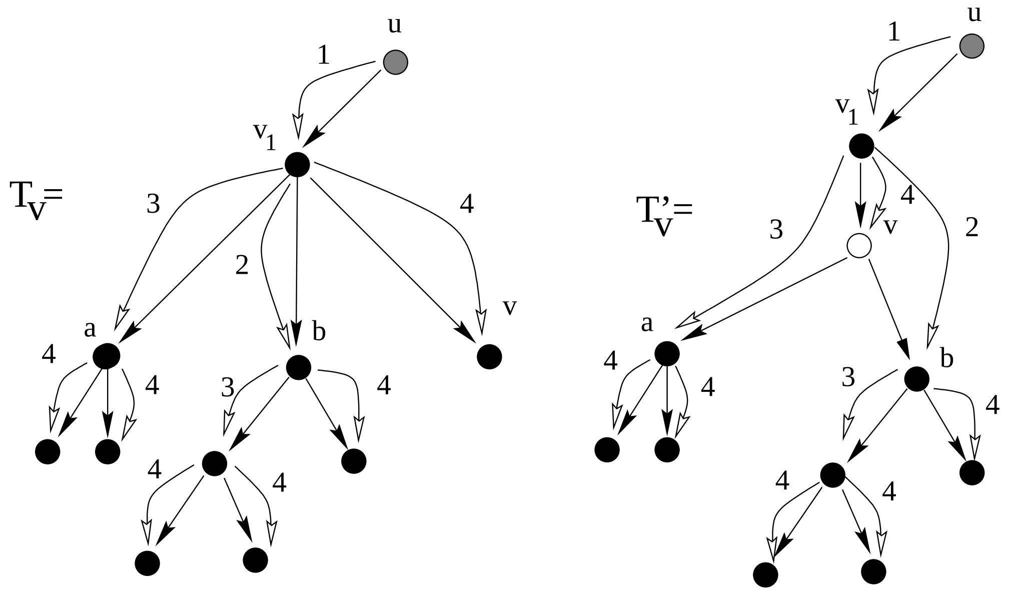


Fig. 5.7: *Équivalence entre deux protocoles de diffusion à partir de u (voir le corollaire 5.13). Le premier ensemble de destination est composé des nœuds noirs et de v.*

– $B_{min}(T) = \{v \in V(T),\ b_\Delta(T, v) = b_{min}(T)\}$.

Si un sommet v possède d voisins dans T, alors, en supprimant le sommet v, nous obtenons d arbres disjoints. En ajoutant le sommet v à chaque arbre, nous obtenons d arbres notés par T_i^v, $i = 1, \ldots, d$. Ces sous-arbres sont ordonnés de la façon suivante : $i < j$ si et seulement si $b_\Delta(T_i^v, v) \geq b_\Delta(T_j^v, v)$. Nous notons par v_i le voisin du sommet v dans T_i^v. Observons que :

Remarque 5.1 *Pour tout sommet u dans T, $b_\Delta(T_1^u, u) = b_\Delta(T, u)$.*

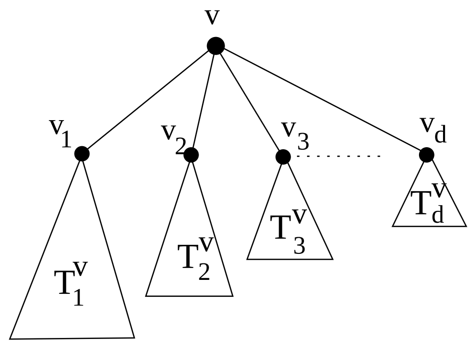


Fig. 5.8: *Décomposition de l'arbre T en d sous-arbres enracinés en v*

Nous avons le lemme suivant :

Lemme 5.15 *Dans tout arbre T d'au moins trois sommets, il existe un sommet x ayant un degré au moins égal à 2 dans $B_{min}(T)$ tel que $b_\Delta(T_2^x, x) \geq b_{min}(T) - 1$.*

Preuve. Raisonnons par l'absurde en supposant que tous les sommets x dans $B_{min}(T)$ satisfont $b_\Delta(T_2^x, x) < b_{min}(T) - 1$. Prouvons par récurrence sur ℓ qu'il existe un chemin P de longueur ℓ tel que :

1. tous les sommets de P soient dans $B_{min}(T)$ et soient distincts deux-à-deux ;
2. si $P = (p^0, \dots, p^\ell)$ alors, pour tout $i < \ell$, $p_1^i = p^{i+1}$ (p_1^i est le voisin de p^i dans $T_1^{p^i}$).

Montrons que la propriété est vraie pour $\ell = 1$. Puisque $B_{min}(T) \neq \emptyset$, il existe un sommet u appartenant à $B_{min}(T)$. Par la remarque 5.1, nous avons $b_\Delta(T_1^u, u) = b_{min}(T)$. Étudions alors les caractéristiques du sommet u_1. Supposons que le sommet u_1 soit une feuille. De la relation $b_\Delta(T_1^u, u) = b_{min}(T)$, on peut déduire que $b_{min}(T) = 1$. Ainsi, il est facile de voir que l'arbre T est une arête et que ceci est en contradiction avec les hypothèses de ce lemme. Par conséquent, le sommet u_1 ne peut pas être une feuille. Prouvons que $u_1 \in B_{min}(T)$. Puisque $u \in B_{min}(T)$, il existe deux protocoles de diffusions $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ tels que :

- $\mathcal{A}_1$ est un protocole de diffusion dans T_1^u à partir du sommet u s'effectuant en $b_{min}(T)$ phases ;
- $\mathcal{A}_2$ est un protocole de diffusion dans $T \setminus T_1^u$ à partir du sommet u s'effectuant en au plus $b_{min}(T) - 2$ phases (parce que tous les sommets x dans $B_{min}(T)$ satisfont $b_\Delta(T_2^x, x) < b_{min}(T) - 1$).

En utilisant $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$, nous pouvons construire un protocole $\mathcal{A}$ de diffusion dans T à partir de u de la façon suivante : $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont exécutés simultanément (bien que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ débutent respectivement à la phase 1 et 2). Soit alors $\{u \to v\}$ un appel dans T_u^1 à la première phase de $\mathcal{A}$. Comme u_1 est un sommet dans un chemin reliant u à v dans T, nous pouvons transformer le protocole $\mathcal{A}$ en un autre protocole $\mathcal{A}$' de la façon suivante : à la première phase, l'appel $\{u \to v\}$ est remplacé par l'appel $\{u \to u_1\}$ et un appel $\{u_1 \to v\}$ est inséré. On peut vérifier que le protocole $\mathcal{A}$' réalise la diffusion à partir du sommet u_1 dans T en $b_{min}(T)$ phases. Donc u_1 est un sommet de $B_{min}(T)$. Ainsi, il existe un chemin de longueur $\ell = 1$ qui satisfasse les deux propriétés de l'hypothèse de récurrence.

Supposons qu'il existe un chemin P de longueur $\ell - 1$ satisfaisant l'hypothèse de récurrence. Soit $P = (p^o, \dots, p^{\ell-1})$ et $u = p^{\ell-1}$. Par définition, le sommet u est dans $B_{min}(T)$. En appliquant le même raisonnement que pour le cas $\ell = 1$, on déduit que $u_1 \in B_{min}(T)$. Par conséquent, le chemin $P' = (p^0, \dots, u, u_1)$ est un chemin de longueur ℓ qui contient seulement des nœuds de $B_{min}(T)$. Pour prouver que tous les sommets de P' sont distincts, nous allons montrer que le sommet u_1 n'est pas $p^{\ell-2}$. Par définition du chemin P, nous avons $u = p_1^{\ell-2}$. Ainsi, par propriété sur les sommets appartenant à $B_{min}(T)$, nous avons $b_\Delta(T', p^{\ell-2}) < b_{min}(T) - 1$ où T' est le sous-arbre de T obtenu par suppression de l'arête $\{p^{\ell-2}, u\}$, et contenant le sommet $p^{\ell-2}$. Ainsi $b_\Delta(T' \cup \{p^{\ell-2}, u\}, u) \leq b_{min}(T) - 1$.

Grâce à la remarque 5.1, nous obtenons que u_1 n'est pas $p^{\ell-2}$. Donc, pour toute valeur de ℓ, il existe un chemin P de longueur ℓ tel que tous les sommets de P soient distincts. Ceci est en contradiction avec le fait que T ait un nombre fini de nœuds. Ainsi, il existe un sommet x dans $B_{min}(T)$ tel que $b_\Delta(T_2^x, x) \geq b_{min}(T) - 1$.

□

Introduisons de nouveau quelques notations :

- $K(x)$ est le nombre d'arbres de la forme T_i^x tels que $b_\Delta(T_i^x, x) = b_{min}(T)$, pour i appartenant à $\{1, \ldots, d\}$ où d est le degré du sommet x dans T.
- $k_{min}(T) = \min\{K(x),\ \ x \in B_{min}(T)\ \text{ et } b_\Delta(T_2^x, x) \geq b_{min}(T) - 1\}$
- $K_{min}(T) = \{v,\ b_\Delta(T_2^v, v) \geq b_{min}(T) - 1 \text{ et } K(v) = k_{min}(T)\}$. On peut remarquer que $K_{min}(T)$ est un sous-ensemble de $B_{min}(T)$.

Nous allons donner une borne inférieure du nombre de phases nécessaires à la réalisation d'un échange total.

Lemme 5.16 *Soit T un arbre. Si $k_{min}(T) > 1$ alors $g_\Delta(T) \geq 2b_{min}(T)$.*

Preuve. D'après le lemme 5.15, il existe un sommet x de $B_{min}(T)$ tel que $b_\Delta(T_2^x, x) \geq b_{min}(T) - 1$. Ceci implique que $K_{min}(T)$ contient au moins un élément. Soit u un nœud de $K_{min}(T)$.

Nous allons d'abord considérer le cas où $k_{min}(T) \geq 3$. Par définition, $b_\Delta(T_1^u, u) = b_{min}(T)$ et $b_\Delta(T_2^u, u) = b_{min}(T)$. Calculons le temps de diffusion dans T à partir de u_1 (rappelons que u_1 est le voisin de u dans l'arbre T_1^u). Soit T' le sous-arbre de T tel que l'unique arête en commun avec T_1^u soit l'arête $\{u, u_1\}$. Si $b_\Delta(T', u_1) = b_{min}(T)$, alors il faut qu'à la première phase un appel informe un nœud dans T_2^u, et qu'un autre appel informe un nœud dans T_3^u. En effet, par définition du paramètre $k_{min}(T)$, on a $b_\Delta(T_2^u, u) = b_{min}(T)$ et $b_\Delta(T_3^u, u) = b_{min}(T)$. Or, seul le nœud u_1 connaît l'information au départ, il faut ainsi que deux appels traversent en même temps l'arête (u_1, u), ce qui est en contradiction avec le modèle de communication. En conclusion, on a $b_\Delta(T', u_1) > b_{min}(T)$. Donc, à la phase $b_{min}(T) - 1$, pour tout protocole d'échange total, au moins une information d'un sommet dans T_1^u n'est pas connue par un sommet n'appartenant pas à T_1^u. Or, comme le nombre de phases pour diffuser cette information dans T à partir d'un nœud dans T_1^u est au moins le nombre de phases pour diffuser dans T' à partir de u_1, l'échange total dans T nécessite au moins $b_\Delta(T_1^u, u) - 1 + b_\Delta(T', u_1) \geq b_{min}(T) - 1 + b_{min}(T) + 1$ phases. D'où le lemme pour le cas où $k_{min}(T) \geq 3$.

Maintenant, considérons le cas où $k_{min}(T) = 2$. Selon la valeur $b_\Delta(T, u_1)$, deux cas peuvent se présenter : $b_\Delta(T, u_1) > b_{min}(T)$ ou $b_\Delta(T, u_1) = b_{min}(T)$. Démontrons par l'absurde qu'il existe un sommet u dans $K_{min}(T)$ tel que $b_\Delta(T, u_1) > b_{min}(T)$, c'est-à-dire qu'on supposera que pour tout sommet x dans $K_{min}(T)$, on ait $b_\Delta(T, x_1) = b_{min}(T)$. En utilisant la même technique que celle utilisée dans la preuve du lemme 5.15, nous pouvons démontrer que, pour tout entier ℓ, il existe un chemin P de longueur ℓ tel que :

1. tous les sommets de P sont dans $B_{min}(T)$;

2. si $P = (p^1, \dots, p^\ell)$ alors, pour tout $i < \ell$, $p^i_1 = p^{i+1}$ (p^i_1 est le voisin de p^i dans $T_1^{p^i}$) ;
3. tous les sommets de P sont distincts.

Donc, pour toute valeur de ℓ, il existe un chemin P de longueur ℓ tel que tous les sommets de P soient distincts. Ceci est en contradiction avec le fait que T ait un nombre fini de nœuds. Ainsi, il existe un sommet x dans $K_{min}(T)$ tel que $b_\Delta(T, x_1) > b_{min}(T)$. Enfin, si on considère un sommet de $K_{min}(T)$ tel que $b_\Delta(T, x_1) > b_{min}(T)$, alors le raisonnement appliqué au cas $k_{min}(T) \geq 3$ peut être encore appliqué, ce qui conclut la preuve du lemme. □

Lemme 5.17 *Soit T un arbre. Si $k_{min}(T) = 1$, alors il existe un sommet u de $K_{min}(T)$ tel que $b_\Delta(T_1^u, u_1) < b_{min}(T)$ et*

$$g(T) \geq \begin{cases} 2b_{min}(T) & \textit{si } b_\Delta(T, u_1) > b_{min}(T); \\ 2b_{min}(T) - 1 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Par la même technique que celle utilisée dans la preuve du lemme 5.15, nous pouvons montrer qu'il existe un sommet u de $K_{min}(T)$ tel que $b_\Delta(T_1^u, u_1) < b_{min}(T)$. Soit donc un sommet u de $K_{min}(T)$ tel que $b_\Delta(T_1^u, u_1) < b_{min}(T)$. Tout d'abord, cherchons à partir de quelle phase t toutes les informations contenues initialement dans l'arbre T_1^u peuvent être connues par des nœuds à l'extérieur de T_1^u. Comme toutes les communications transportant les informations contenues initialement dans l'arbre T_1^u doivent passer par u, le temps t peut être minoré par le temps d'accumulation de T_1^u dans u. On a donc $t \geq b_\Delta(T_1^u, u)$.

Ainsi, tous les protocoles d'échange total dans T satisfont la condition suivante : à la phase $t-1$, il existe une information d'un sommet de T_1^u qui n'est pas connue en dehors de T_u^1. Le nombre de phases pour diffuser cette information dans T à partir d'un nœud de T_1^u est au moins le nombre de phases pour diffuser dans T' depuis u_1 où T' est le sous-arbre de T n'ayant en commun avec T_1^u que l'arête $\{u, u_1\}$. Ainsi, l'échange total dans T nécessite au moins $t - 1 + b_\Delta(T', u_1)$ phases. □

Il ne reste plus maintenant qu'à vérifier que l'algorithme polynomial 5.5 génère un protocole d'échange total optimal en nombre de phases.

Algorithme 5.5 Échange total dans un arbre T en mode Δ-port

1 Déterminer l'ensemble de sommets $K_{min}(T)$.
2 Choisir arbitrairement un sommet u dans $K_{min}(T)$.
3 Accumuler toutes les informations en u.
4 Diffuser toutes les informations à partir de u dans T.

Théorème 5.18 *Soit T un arbre d'au moins trois sommets. L'algorithme 5.5 calcule polynomialement un protocole d'échange total dans T optimal en nombre de phases.*

Preuve. Les lemmes 5.16 et 5.17 donnent la borne inférieure. Nous allons compter d'autre part le nombre de phases utilisées par le protocole retourné par l'algorithme 5.5. Considérons u un sommet de $K_{min}(T)$.

- Si $k_{min}(T) \geq 2$, ou si $k_{min}(T) = 1$, avec $b_\Delta(T, u_1) > b_{min}(T)$ alors nous avons $b_\Delta(T_2^u, u) = b_{min}(T)$, et le protocole effectue l'échange total en $2b_{min}(T)$ phases.

– Si $k_{min}(T) = 1$ et $b_\Delta(T, u_1) = b_{min}(T)$, alors on a, par définition de $K_{min}(T)$ et d'après le lemme 5.15, $b_\Delta(T_2^u, u) = b_{min}(T) - 1$. Ainsi, à la phase $b_{min}(T) - 1$, toutes les informations de T sont rassemblées en deux sommets : le nœud u et un autre nœud. Durant la phase $b_{min}(T)$, ces deux nœuds échangent leurs informations. Cette phase correspond à la dernière phase de l'accumulation en u dans T_1^u, et la première phase de la diffusion dans T_1^u de l'information de $T \setminus T_1^u$ à partir de u_1. Cet algorithme effectue donc l'échange total en $2b_{min}(T) - 1$ phases.

□

5.5 Conclusion

Nous avons montré qu'il existe des algorithmes polynomiaux permettant de calculer des protocoles de diffusion partielle et d'échange total pour les arbres quelconques en mode Δ-port. Nous avons également extrait un protocole de diffusion partielle optimal pour les arbres orientés où tous les routeurs ne géraient pas les messages de la même façon. Malheureusement, nous n'avons pas pu pour l'instant mettre en évidence un algorithme qui prenne en compte les différences de gestion des messages dans un routeur pour les arbres non-orientés. Notons toutefois que la majorité des architectures qui effectuent des diffusions partielles correspondent à des arbres orientés. À notre avis, pour trouver une solution à ce problème dans une topologie non-orientée, il faudrait étendre le problème de la matrice sans conflit au cas des topologies non-orientées.

La majorité des communications multipoints font intervenir un sous-ensemble de nœuds dans les réseaux. Notre étude ne s'est pas penchée sur la question du problème de l'échange total restreint à un sous groupe de nœuds. Notre algorithme d'échange total impose que tous les nœuds de l'arbre participent à l'échange total. Cette voie de recherche n'a pas encore été explorée. Nous pensons que, pour résoudre ce problème, il faudrait trouver un algorithme mélangeant la technique décrite dans ce chapitre et celle de l'échange total en mode 1-port [49].

Les problèmes de diffusion et d'échange total sont NP-complets dans la plupart des modèles de communication usuels considérés dans la littérature. C'est le cas du mode téléphone 1-port [59], et du modèle commuté Δ-port. Par conséquent, plusieurs algorithmes d'approximation ont été proposés (voir par exemple [6, 28, 47, 57]). La phase suivante de notre recherche dans cette direction est naturellement de proposer des algorithmes d'approximation pour ce modèle. $\lceil \log_2 n \rceil$ est une borne supérieure pour la diffusion [24], mais on peut espérer trouver des algorithmes d'approximation plus performants, notamment pour les réseaux de degré non borné. À notre connaissance, aucun algorithme d'approximation Δ-port meilleur que celui trouvé par Farley en mode 1-port n'a été découvert pour les réseaux arbitraires. Notre résultat montre tout de même que, étant donné un arbre couvrant d'un réseau, on peut effectuer la diffusion ou l'échange total optimalement sur cet arbre. Cependant, cette complexité peut être loin des meilleurs résultats (considérez par exemple un graphe Hamiltonien avec un chemin Hamiltonien comme arbre couvrant). Un arbre couvrant en largeur d'abord fournirait peut être de meilleurs résultats, mais aucun preuve de ce fait n'a pour l'instant été faite.

CHAPITRE

6 Diffusion partielle Δ-port dans une grille

Les travaux présentés dans ce chapitre ont été partiellement réalisés en collaboration avec V. Bouchitté et E. Fleury [11].

Dans ce chapitre, nous considérons le problème de la diffusion partielle dans les grilles en mode Δ-port. Par rapport au chapitre précédent, nous supposons que les routeurs ont une capacité supplémentaire, dite de copie/retransmission. Chaque routeur traversé par un message est maintenant capable de le copier dans la mémoire du processeur auquel il est attaché, et de le retransmettre simultanément vers un de ses ports de sortie. Cette caractéristique permet la réalisation d'une diffusion partielle supportée par le matériel [51]. Une source peut en effet effectuer un appel qui transmettra un message à plusieurs nœuds le long d'un chemin. L'entête du message est composé de la liste des destinations dans l'ordre dans lesquelles elles devront être visitées. L'encodage des adresses de destination dans l'entête peut être réalisé de différentes façons [13, 60], mais ceci ne joue aucun rôle dans le problème étudié ici. La première partie de ce chapitre explique les conséquences engendrées par le fait que les routeurs aient la capacité de copie/retransmission. Nous reformulons ensuite le problème de la diffusion partielle dans ce cadre. Et la deuxième partie du chapitre s'attache alors à la résolution de ce problème.

6.1 Modélisation et définitions

Contrairement aux chapitres précédents, nous considérons une topologie fixée : la *grille*. Formellement, une grille de dimension $m \times n$ est un graphe $G = (V, E)$ où $V = \{(x, y), 0 \leq x < n$ et $0 \leq y < m\}$ et $E = \{((x_i, y_i), (x_j, y_j)),\ |x_i - x_j| + |y_i - y_j| = 1\}$.

6.1.1 Modélisation du système et fonction de routage

Nous supposons un routage wormhole, tel que défini dans [18]. Il est bien connu que le routage wormhole est susceptible d'engendrer des interblocages puisque chaque message réserve de nombreuses ressources et peut demander l'utilisation de ressources déjà réservées par d'autres messages. La conception d'algorithmes de diffusion partielle sans interblocage est donc une question importante. Les algorithmes de diffusion partielle que nous proposerons respectent une fonction de routage utilisée pour router les messages. Sur une grille, la fonction de routage la plus populaire est le routage XY qui consiste à, premièrement router dans la dimension 1 puis dans la dimension 2. Cette fonction est sans blocage lorsqu'elle est

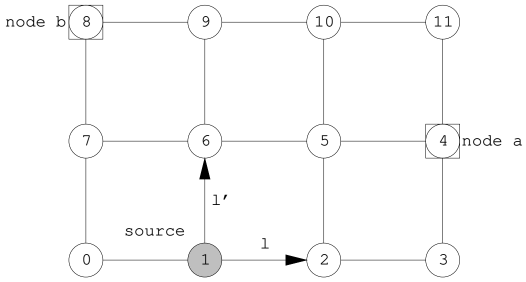


FIG. 6.1: *Affectation des numéros pour une grille* 3×4 *et exemple de diffusion partielle avec deux destinations a et b.*

restreinte aux communications point-à-point puisque le seul type de dépendance entre canaux crées par cette fonction est de X vers Y [19]. Cependant, l'utilisation de la propriété de copie/transmission introduit de nouvelles dépendances (en particulier de Y vers X), et ne permet plus de garantir que le routage XY est sans blocage. Pour résoudre ce problème, Lin et Ni [51] ont proposé de baser les décisions de routage sur un ordre sur les sommets donné par un chemin Hamiltonien "serpent" dans la grille. Plus formellement, à chaque nœud u d'une grille de dimension $m \times n$ est affecté un numéro $\mathcal{N}(u)$ de la façon suivante :

$$\text{si } u = (x, y) \text{ alors } \mathcal{N}(\text{u}) \quad = \quad \begin{cases} y * n + x & \text{si } y \text{ est pair ;} \\ y * n + n - x - 1 & \text{si } y \text{ est impair,} \end{cases}$$

où x et y sont respectivement la colonne et la ligne du nœud. Cette numérotation construit un chemin Hamiltonien "serpent" qui suit les nœuds de 0 à $mn - 1$. La figure 6.1 montre un tel étiquetage pour une grille 3×4. Le routage est alors défini comme suit : si v est la prochaine destination du message, le routeur du nœud u transmet le message sur son lien de sortie $w = \mathcal{R}(u, v)$ tel que :

$$\mathcal{N}(w) \quad = \quad \begin{cases} \max\{\mathcal{N}(z),\ \mathcal{N}(z) \leq \mathcal{N}(v) \text{ et } z \text{ est un nœud voisin de } u\} & \text{si } \mathcal{N}(u) < \mathcal{N}(v); \\ \min\{\mathcal{N}(z),\ \mathcal{N}(z) \geq \mathcal{N}(v) \text{ et } z \text{ est un nœud voisin de } u\} & \text{si } \mathcal{N}(u) > \mathcal{N}(v). \end{cases}$$

Afin d'éviter les interblocages, les destinations doivent ici être visitées dans l'ordre monotone de leurs numéros. Ceci permet en effet de garantir l'absence de dépendances cycliques entre canaux comme montré dans [51]. Par conséquent, une diffusion partielle à partir de u_0 vers un ensemble de destinations D peut se réaliser par deux diffusions partielles à partir de u_0 vers les sous-ensembles D_{inf} et D_{sup} de D, où $D_{inf} = \{v \in D,\ \mathcal{N}(v) < \mathcal{N}(u_0)\}$ et $D_{sup} = \{v \in D,\ \mathcal{N}(v) > \mathcal{N}(u_0)\}$. Puisque ces deux diffusions partielles sont symétriques, nous traiterons uniquement le cas de la diffusion à partir de u_0 vers l'ensemble des sommets de numéros supérieurs à celui de u_0.

Il est bien sûr facile de construire un protocole composé d'un appel uniquement. Il suffit en effet simplement que cet appel traverse toutes les destinations dans l'ordre croissant de leurs numéros. Minimiser le nombre de phases sous ces contraintes n'est donc pas pertinent car une diffusion partielle peut ici toujours s'effectuer en une phase. La section suivante va mettre en évidence quel paramètre il faut en fait minimiser pour réaliser la diffusion partielle efficacement sous ces contraintes.

6.1.2 Définition du problème

Tout d'abord, nous allons définir les propriétés qu'un protocole doit satisfaire pour réaliser effectivement une diffusion partielle. Déterminer un protocole de diffusion partielle est équivalent à déterminer un ensemble d'appels convenables défini comme suit :

Définition 6.1 *Soit un graphe $G = (V, E)$, soit une numérotation des nœuds $\mathcal{N}$ de G, et soit une fonction de routage $\mathcal{R}$ qui impose que les destinations soient visitées dans l'ordre monotone en fonction de la numérotation $\mathcal{N}$. Un protocole de diffusion partielle à partir de u_0 de degré Δ vers l'ensemble D est un ensemble d'appels qui suivent les chemins $\{P_i,\ 1 \leq i \leq \Delta\}$ tels que :*

1. *aucun nœud destination appartienne à plus d'un chemin, i.e. si l'on note $\mathcal{D}_i$ l'ensemble des nœuds informés par l'appel qui suit le chemin P_i, alors on doit avoir $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j = \emptyset$ pour $i \neq j$;*
2. *tous les nœuds de D sont informés par l'un des appels, i.e. $\bigcup_{1 \leq i \leq \Delta} \mathcal{D}_i = D$;*
3. *Chaque appel informe les nœuds par numéros croissants, i.e, si l'on note les nœuds successifs $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{|\mathcal{D}_i|}}$ informés par l'appel qui suit le chemin P_i, on doit avoir, $\mathcal{N}(u_{i_j}) < \mathcal{N}(u_{i_{j+1}})$ si $\mathcal{N}(u_0) < \mathcal{N}(u_1)$;*
4. *Le chemin P_i utilise le canal de sortie i du nœud source u_0, $1 \leq i \leq \Delta$.*

D'après la modélisation des temps de communications page 5, le temps de communication d'un protocole est alors majoré par

$$\alpha + (L-1)\tau + \delta \max_{1 \leq i \leq \Delta} \sum_{j=0}^{|\mathcal{D}_i|-1} d_{\mathcal{R}}(u_{i_j}, u_{i_{j+1}}), \text{ avec } u_{i_0} = u_0,\ 1 \leq i \leq \Delta \tag{6.1}$$

où $d_{\mathcal{R}}(u, v)$ est la longueur du chemin de u à v construit par la fonction de routage R. Pour qu'un algorithme de diffusion partielle soit efficace, il est important qu'il satisfasse principalement deux propriétés. Premièrement, il doit minimiser la bande passante, c'est-à-dire minimiser le nombre de canaux impliqués dans la diffusion partielle. Deuxièmement, il doit minimiser la *latence*, c'est-à-dire le temps écoulé entre le moment où la source envoie la première copie du message et le moment où la dernière destination reçoit cette copie. C'est cette latence qu'exprime l'équation 6.1. Malheureusement, minimiser simultanément ces deux paramètres est impossible. En effet, la figure 6.2 illustre ce fait : il est facile de voir que l'unique protocole qui minimise la latence, ne minimise pas la bande passante. C'est pourquoi nous nous intéressons au problème de la minimisation de chacun des paramètres séparément.

Supposons donc que l'on se donne un graphe $G = (V, E)$, une numérotation $\mathcal{N}$ des nœuds, et une fonction de routage $\mathcal{R}$ qui impose que les destinations des messages soient visitées dans un ordre monotone par rapport à la numérotation $\mathcal{N}$. Les deux problèmes de minimisation peuvent être alors formulés comme suit :

Problème 6.1 *Trouver un protocole réalisant une diffusion partielle à partir de u_0 de degré Δ vers l'ensemble D qui minimise la bande passante, c'est-à-dire trouver un protocole qui minimise le paramètre*

$$\sum_{i=1}^{\Delta} \sum_{j=0}^{|\mathcal{D}_i|-1} d_{\mathcal{R}}(u_{i_j}, u_{i_{j+1}}) \textit{ avec } u_{i_0} = u_0,\ 1 \leq i \leq \Delta. \tag{6.2}$$

Problème 6.2 *Trouver un protocole réalisant une diffusion partielle à partir de u_0 de degré Δ vers l'ensemble D et qui minimise la latence, c'est-à-dire trouver un protocole qui minimise le paramètre*

$$\max_{1\leq i\leq \Delta} \sum_{j=0}^{|\mathcal{D}_i|-1} d_{\mathcal{R}}(u_{i_j}, u_{i_{j+1}}) \textit{ avec } u_{i_0} = u_0,\ 1 \leq i \leq \Delta. \tag{6.3}$$

Nous décrivons dans les sections suivantes des algorithmes qui résolvent ces deux problèmes. Rappelons que nous supposons que le numéro de la source est inférieur au numéro des nœuds destination, i.e. $\mathcal{N}(u_0) < \mathcal{N}(u_i)$ pour $1 \leq i \leq k = |D|$. Puisque nous considérons des grilles, le nœud source a ainsi au plus deux ports de sortie par lesquels des appels peuvent atteindre des nœuds dont le numéro est supérieur. Chaque protocole est donc composé de deux chemins au plus. Lorsque le nœud source possède un unique port de sortie, le problème est trivial car il suffit alors de construire le chemin en triant les destinations par numéros croissants. Nous supposerons donc par la suite que u_0 possède deux ports de sorties que nous noterons 1 et 2.

6.2 Protocole minimisant la bande passante

Dans cette section, nous présentons un algorithme qui calcule un protocole qui minimise la bande passante. Cet protocole se décompose en trois phases. La première construit un graphe biparti pondéré de façon à représenter les contraintes engendrées par la fonction de routage. La seconde calcule un couplage parfait dans ce graphe. La dernière phase en déduit un protocole qui minimise la bande passante. Nous introduisons maintenant quelques définitions.

6.2.1 Fonction de contrainte

Nous voulons construire un protocole de diffusion partielle à partir de u_0 vers un ensemble de destinations D dans une grille. Le nœud source u_0 joue un rôle important puisque ce nœud possèdent deux ports de sortie disponibles pour “construire” les deux chemins de diffusion partielle. Considérons l'exemple de la figure 6.1. Le nœud source peut envoyer un message au nœud a et/ou b via son port de sortie "horizontal" et au nœud b uniquement via son port de sortie "vertical". Il ne peut en effet pas envoyer de message au nœud a via son port de sortie "vertical" car les nœuds informés d'un même chemin doivent l'être par numéros croissants.

Afin de modéliser les contraintes de communications imposées par la fonction de routage, nous introduisons la fonction de contrainte c : $D \times D \times E^* \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ où $E^* = E \cup \{*\}$. Informellement, la fonction de contrainte $\mathrm{c}(v, w, \ell)$ vaut $+\infty$ si et seulement s'il est impossible de transmettre un message v à w en utilisant l'arête ℓ comme port de sortie du nœud v. Le cas $\ell = *$ est le cas où l'on ne fait pas attention au port de sortie du nœud v. On utilisera $\ell = *$ pour les destinations intermédiaires. Cette fonction définit les contraintes entre deux nœuds u_i et u_j par rapport à un lien de sortie ℓ comme suit :

$$\mathrm{c}(u_i, u_j, \ell) = \begin{cases} d_{\mathcal{R}}(u_i, u_j) & \text{si } \ell = (u_i, w), \mathcal{N}(u_i) < \mathcal{N}(u_j) \text{ et } \mathcal{R}(u_i, u_j) = w \\ \min_{\ell \in \Omega(u_i)} c(u_i, u_j, \ell) & \text{si } \ell = * \text{ et } \mathcal{N}(u_i) < \mathcal{N}(u_j) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \tag{6.4}$$

où $\Omega(u_i)$ représente l'ensemble des liens de sortie de u_i.

6.2.2 Graphe biparti associé à la diffusion partielle

Étant donnée une diffusion partielle à partir de u_0 vers D, la principale phase de notre algorithme minimisant la bande passante est de construire un graphe biparti tel que chacun de ses couplages parfaits correspond à un protocole. Ce graphe biparti $\mathcal{B}_{(u_0,D)} = (X, Y, F, w)$ est composé de deux ensembles de sommets X et Y, et d'un ensemble d'arêtes F pondérées par la fonction w. Il modélise les contraintes imposées par la fonction de routage $\mathcal{R}$ et/ou induite par la numérotation $\mathcal{N}$des nœuds. Plus formellement, soit $\Omega(u_0)$ l'ensemble des liens de sortie du nœud source u_0 tel qu'un chemin de diffusion utilisant un de ces liens puisse atteindre au moins un nœud destination dans D. Pour une grille, $|\Omega(u_0)|$ vaut 1 ou 2 en fonction de l'emplacement du nœud source u_0 dans la grille. Nous définissons le graphe biparti $\mathcal{B}_{(u_0,D)} = (X, Y, F, w)$ comme suit :

- Chaque sommet u_i de D, $1 \leq i \leq k = |D|$, a une instance x_i dans X et une instance y_i dans Y.

- Le nœud source u_0 a $|\Omega(u_0)|$ instances $\{x_0^\ell, \ell \in \Omega(u_0)\}$ dans X. Ces $|\Omega(u_0)|$ instances représentent les $|\Omega(u_0)|$ liens de sortie disponibles depuis le nœud source u_0 pour construire les $|\Omega(u_0)|$ chemins de diffusion partielle.

- Pour avoir le même nombre de sommets dans X et dans Y, nous insérons $|\Omega(u_0)|$ nœuds $\left\{y_{k+i}, i \in \{1, \ldots, |\Omega(u_0)|\}\right\}$ dans Y. Ces $|\Omega(u_0)|$ nœuds ne sont pas impliqués dans l'ensemble de diffusion partielle. Ils représenteront les extrémités terminales des $|\Omega(u_0)|$ chemins de diffusion partielle.

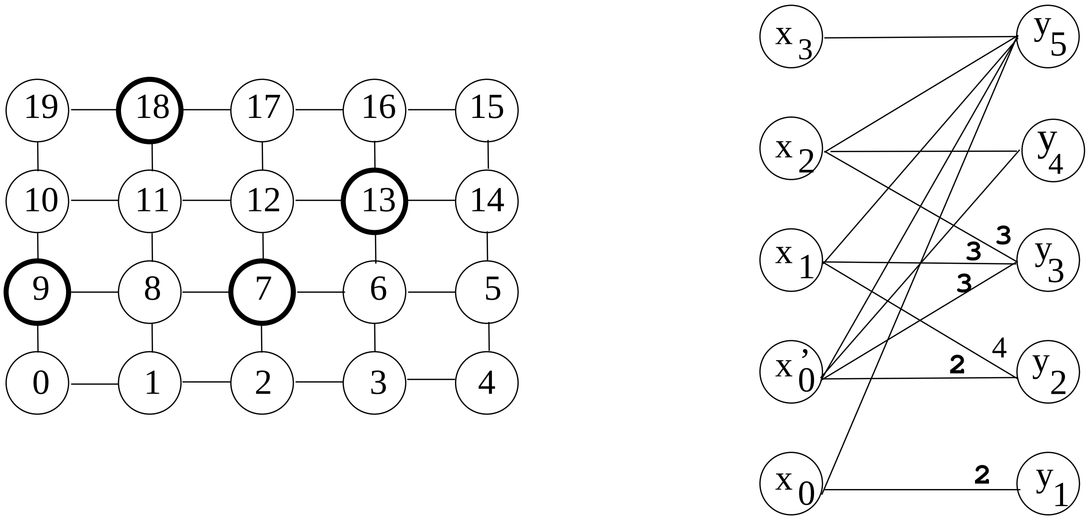


FIG. 6.2: *Exemple de graphe biparti associé à la diffusion partielle du nœud vers les nœuds* $\{9, 13, 18\}$. *Les arêtes dont le poids n'est pas précisé ont un poids nul.*

– On définit une arête e entre les sommets x_0^ℓ et y_j dans $\mathcal{B}_{(u_0,D)}$ si $c(u_0, u_j, \ell) \neq +\infty$ et le poids de cette arête est fixé à $w(e) = c(u_0, u_j, \ell)$. En effet, selon la fonction de routage $\mathcal{R}$, un message peut aller de u_0 à u_j en utilisant le lien de sortie ℓ, et la longueur du chemin est donnée par $d_{\mathcal{R}}(u_0, u_j) = c(u_0, u_j, \ell)$.

– On définit également une arête e entre les sommets x_i et y_j dans $\mathcal{B}_{(u_0,D)}$ si $c(u_i, u_j, *) \neq +\infty$. Le poids de cette arête est fixé à $w(e) = c(u_i, u_j, *)$. En effet, selon la fonction de $\mathcal{R}$, un message peut aller de u_i à u_j.

– Chaque nœud $x \in X$ est connecté par une arête à chacun des nœuds de $\{x_{k+i}, i \in \{1 \ldots |\Omega(u_0)|\}\}$. Les poids de toutes ces arêtes sont fixés à 0. En effet, chaque nœud $u_i, 0 \leq i \leq k$ de l'ensemble de diffusion partielle peut être la dernière destination des $|\Omega(u_0)|$ chemins de diffusion partielle. Notez que ceci inclut le nœud source u_0.

Si $|\Omega(u_0)| = 1$, alors tout protocole de l'ensemble de diffusion partielle à partir de u_0 vers D est réduit à un simple chemin et la solution du problème est simple. Nous nous focaliserons donc sur le cas où $|\Omega(u_0)| = 2$. Pour simplifier les notations, nous appellerons x_0 et x'_0 les sommets de X représentant le nœud u_0. Maintenant, nous étudions quelques propriétés du graphe biparti $\mathcal{B}_{(u_0,D)}$.

Rappelons que, par définition, un *couplage* M de $\mathcal{B}_{(u_0,D)}$ est un sous-ensemble M des arêtes de $M \subset F$ sans éléments adjacents. Le couplage est dit *parfait* si chaque sommet dans $X \cup Y$ est un point terminal d'un élément du couplage M. Le *poids* du couplage est donné par $\sum_{e \in M} w(e)$.

Lemme 6.1 *Le graphe biparti* $\mathcal{B}_{(u_0,D)}$ *contient un couplage parfait.*

Preuve. En effet, $\big\{\{x_0, y_1\}, \{x_1, y_2\}, \ldots, \{x_k, y_{k+1}\}, \{x'_0, y_{k+2}\}\big\}$ est un couplage parfait. $\Box$

Lemme 6.2 *Chaque protocole de diffusion partielle à partir de u_0 vers D peut être représenté par un couplage parfait du graphe biparti $\mathcal{B}_{(u_0,D)}$, et réciproquement.*

Preuve. Étant donné un protocole de diffusion partielle à partir de u_0 vers D, nous construisons un couplage parfait M dans le graphe $\mathcal{B}_{(u_0,D)}$ comme suit. Soient P_1 et P_2 deux chemins correspondants aux appels d'un protocole de diffusion partielle, et soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les ensembles des nœuds destinations qu'ils doivent respectivement atteindre. Conformément à la définition 6.1, les nœuds destinations de chaque chemin sont visités dans l'ordre monotone donné par leurs numéros. Considérons $\mathcal{D}_1 = \{u_{i_1}, \ldots, u_{i_s}\}$ et $\mathcal{D}_2 = \{u_{j_1}, \ldots, u_{j_t}\}$. Nous définissons un couplage parfait de $\mathcal{B}_{(u_0,D)}$ par

$$\begin{aligned} M = \; & \{(x_0, y_{i_1}), (x_{i_1}, y_{i_2}), \ldots, (x_{i_{s-1}}, y_{i_s}), (x_{i_s}, y_{k+1})\} \\ & \cup \{(x'_0, y_{j_1}), (x_{j_1}, y_{j_2}), \ldots, (x_{j_{t-1}}, y_{j_t}), (x_{j_t}, y_{k+2})\} \end{aligned}$$

Sans perte de généralité, nous supposons que le chemin P_1 utilise le lien de sortie ℓ du nœud source u_0 correspondant au nœud x_0 dans X.

Par construction de $\mathcal{B}_{(u_0,D)}$, tous les arcs de M existent. Montrons maintenant que M est un couplage parfait. Clairement, il y a un seul arc de M incident aux sommets x_0, x'_0, y_{k+1} et y_{k+2}. Maintenant considérons un sommet x_i (resp. y_i), $1 \leq i \leq k$. Le sommet x_i (resp. y_i) représente le sommet $u_i \in D$. Puisque u_i apparaît une fois seulement dans $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, u_i possède au plus un successeur (resp. prédécesseur) dans $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$. Donc x_i (resp. y_i) est incident à au plus une arête de M et M est un couplage. En outre, le nombre d'arêtes du couplage M est $s + t + 2 = k + 2$ et, puisque nous savons que $|X| = |Y| = k + 2$, il en suit que M est un couplage parfait.

Réciproquement, considérons un couplage parfait M du graphe $\mathcal{B}_{(u_0,D)}$. Un tel couplage existe d'après le lemme 6.1. Soit $\{(x_0, y_{i_1}), (x'_0, y_{i_2}), \ldots, (x_k, y_{i_{k+2}})\}$ une représentation du couplage M. Du couplage M, nous définissons un graphe orienté $H = (D \cup \{u_0\}, U)$ où l'ensemble U est égal à $\{(u_0, u_{i_1}), (u_0, u_{i_2})\} \cup \{(u_i, u_j),\ (x_i, y_j) \in M \text{ et } y_j \notin \{y_{k+1}, y_{k+2}\}\}$. Soit alors $d^+(x)$ (resp. $d^-(x)$) le nombre de successeurs (resp. prédécesseurs) du sommet x dans le graphe orienté H. Comme M est un couplage parfait, et d'après la définition du graphe H, il est facile de vérifier que :

- $d^+(u_0) = 2$ et $d^-(u_0) = 0$;
- $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$, $d^-(u_i) = 1$;
- $d^+(u_k) = 0$;
- Il existe un unique entier j dans $\{1, \ldots, k\}$ tel que $d^+(u_j) = 0$. Il correspond à l'arête (q_j, r_l) du couplage M où $l \in \{k+1, k+2\}$;
- $d^+(u_i) = 1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, $i \neq j$.

Ainsi, le graphe H que nous obtenons consiste en deux chemins sommet-disjoints sauf en u_0, et il couvre tous les sommets de D. En fait, chaque nœud destination est contenu dans un de ces chemins. Ces chemins définissent donc un protocole de diffusion partielle. □

On obtient donc d'après les lemmes 6.1 et 6.2 :

Théorème 6.3 *Tout protocole minimisant le nombre de liens utilisés lors d'une diffusion partielle à partir de u_0 vers D induit un couplage parfait de poids minimum dans le graphe biparti $\mathcal{B}_{(u_0,D)}$ et réciproquement.*

6.2.3 Algorithme

Notre algorithme se décompose en trois phases : une phase de construction, une phase de calcul et une phase d'extraction. La phase de construction (voir la section 6.2.2) construit le graphe biparti $\mathcal{B}_{(u_0,D)}$ correspondant à la diffusion partielle de u_0 vers D. Une fois cette construction terminée, nous exécutons la phase de calcul qui détermine un couplage parfait de poids minimum M du graphe biparti $\mathcal{B}_{(u_0,D)}$, par exemple en utilisant la méthode décrite dans [52]. Finalement, la phase d'extraction construit les deux ensembles de nœuds destinations$\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, et, des deux chemins de diffusion partielle P_1 et P_2 de la preuve du lemme 6.2 (voir l'algorithme 6.1). La validité de l'algorithme 6.1 n'est rien d'autre que le théorème 6.3.

Algorithme 6.1 $\mathcal{OCMS}(u_0, D)$

/* *Phase de construction* */
1 Construire le graphe biparti pondéré $\mathcal{B}_{(u_0,D)} = (X, Y, F, w)$;
/* *Phase de calcul* */
2 Construire un couplage parfait de poids minimum M dans $\mathcal{B}_{(u_0,D)}$;
/* *Phase d'extraction* */
3 Soit *cible* une fonction de F vers Y telle que $cible(e) = y$ pour tout $e = \{x, y\} \in M$;
4 $D_1 : = \emptyset$;
5 $e : = (x_0, y_{i_1}) \in M$;
6 **tant que** $cible(e) \notin \{y_{k+1}\, y_{k+2}\}$ **faire**
7     $D_1 : = D_1 \cup \{u_j\}$ où $y_j = cible(e)$;
8   rechercher $e : = \{x_j, y_t\}$ tel que $e \in M$;
9 **fin tant que**
/* *Construction du second chemin* */
10 $D_2 : = \emptyset$;
11 $e : = (x'_0, y_{i_1}) \in M$;
12 **tant que** $(cible(e) \notin \{y_{k+1}\, y_{k+2}\})$ **faire**
13     $D_2 : = D_2 \cup \{u_j\}$ tel que $y_j = cible(e)$;
14     $e : = \{x_j, y_t\}$ tel que $e \in M$;
15 **fin tant que**

Complexité de l'algorithme 6.1 L'algorithme 6.1 s'exécute en $O(k^3)$ étapes où k est le nombre de sommets de D. Plus précisément, pour chaque phase, nous avons :

- le graphe biparti à la ligne 1 se construit en $O(k^2)$ opérations.
- le calcul d'un couplage parfait de poids minimum M du graphe biparti $\mathcal{B}_{(u_0,D)}$ à la ligne 2 peut être effectué en $O(k^3)$ opérations en utilisant la méthode décrite en [52].

– la phase d'extraction (lignes 3-10) nécessite $O(k)$ opérations.

Finalement, nous avons :

Théorème 6.4 *L'algorithme 6.1 calcule un protocole de diffusion partielle minimisant la bande passante dans une grille à partir de u pourvue d'une fonction de routage $\mathcal{R}$ telle que définie dans la section 6.1, en $O(k^3)$ étapes où k est le nombre de sommets destinations.*

6.3 Protocole minimisant la latence

Cette section décrit un algorithme qui calcule en temps polynomial un protocole de diffusion partielle de latence minimale à partir de u_0 vers D. Minimiser la latence revient à minimiser la longueur maximum de tous les chemins du protocole de diffusion partielle (voir l'équation 6.3). De même que dans la section 6.2, nous ne considérons pas le cas où le nœud source u_0 a seulement un lien de sortie (i.e $\Omega(u_0) = 1$)) et nous supposerons dans la suite que le nœud source u_0 a toujours deux liens de sortie (i.e $\Omega(u_0) = 2$).

L'idée principale consiste à considérer toutes les possibilités pour effectuer une diffusion partielle depuis le nœud source u_0 vers $D = \{u_1, \ldots, u_k\}$. Pour ceci, construisons tout d'abord un ensemble de sommets $Q = \{q_{-1}, q_0, \ldots, q_k\}$ comme suit :

– Le nœud source u_0 possède $|\Omega(u_0)| = 2$ instances dans Q. Ces deux instances représentent les deux liens notés 1 et 2 de sortie disponibles depuis u_0 pour construire les $|\Omega(u_0)|$ chemins correspondants aux appels d'un protocole de diffusion partielle. Ces deux instances de u_0 dans Q sont notées q_0 et q_{-1}.

– Chaque sommet u_i de D, $1 \leq i \leq k = |D|$, possède une instance q_i dans Q.

Nous définissons un protocole de diffusion partielle à partir u_0 vers $D_i = \{u_0, u_1, \ldots, u_i\}$ comme un quadruplet (i, j, l_1, l_2) tel que

1. $i > j$;

2. l'appel du protocole qui possède le nœud u_i comme extrémité a pour longueur l_1 ;

3. l'autre appel qui possède le nœud u_j comme extrémité a pour longueur l_2.

Remarquons que tous les protocoles d'une diffusion partielle à partir de u_0 vers D peuvent se représenter par un quadruplet de la forme $(|D|, j, l_1, l_2)$. Par convention, le quadruplet $(0, -1, 0, 0)$ correspond à une diffusion partielle à partir de u_0 vers l'ensemble vide.

Notre algorithme utilise la programmation dynamique. Il se décompose en trois étapes :

1. Dans la première étape, l'algorithme crée un tableau T de quadruplet de taille

$$\{-1, \ldots, k\}^2 \times \{1, \ldots, nm - 1\}^2.$$

Tous les éléments de ce tableau sont initialisés à $(0,0,0,0)$ sauf l'élément $(0,-1,0,0)$ qui est initialisé à $(1,0,0,0)$. Pour simplifier la description de l'algorithme, nous définissons la fonction $c' : Q \times Q \rightarrow \mathbb{N}$ comme suit :

$$c'(q_i, q_j) = \begin{cases} \mathrm{c}(u_0, u_j, 1) & \text{si } i = -1 \\ \mathrm{c}(u_0, u_j, 2) & \text{si } i = 0 \\ \mathrm{c}(u_i, u_j, *) & \text{si } i \leq 1 \end{cases} \tag{6.5}$$

où c est défini dans la section 6.2.1.

2. Dans la deuxième étape, le tableau T est rempli par l'algorithme 6.2 comme suit :

Algorithme 6.2 REMPLIR(T,u,D)

/* *Ici, N représente le nombre de sommets dans la grille* */
pour $i_1 = 1$ **à** k **faire**
  pour $i_2 = 1$ **à** i_1 **faire**
    pour $k_1, k_2 = 2$ **à** N **faire**
      si $\mathrm{T}(i_1, i_2, k_1, k_2) \neq (0,0,0,0)$ **alors**
        $\mathrm{T}(i_1+1, i_2, k_1 + c'(q_{i_1}, q_{i_1+1}), k_2) \leftarrow (i_1, i_2, k_1, k_2)$
        $\mathrm{T}(i_1+1, i_1, k_2 + c'(q_{i_2}, q_{i_1+1}), k_1) \leftarrow (i_1, i_2, k_1, k_2)$
      fin si

Cette façon de modifier le tableau garantit que l'on a $T(X) \neq (0,0,0,0)$ si et seulement s'il existe un protocole défini par le quadruplet $X = (i, j, \ell_1, \ell_2)$, c'est-à-dire un protocole de diffusion à partir de u_0 vers $D_i = \{u_1, \ldots, u_i\}$ où l'appel du protocole qui possède le nœud u_i (resp. u_j) comme extrémité a pour longueur ℓ_1 (resp. ℓ_2), avec $i > j$.

3. Dans la troisième et dernière étape, notre algorithme détermine deux chemins tel que le maximum de leurs deux longueurs soit minimum. Ceci s'effectue de la manière suivante :

   – Chercher un quadruplet du type $(|D|, j, l_{|D|}, l_j)$ tel que $T(|D|, j, l_{|D|}, l_j) \neq (0,0,0,0)$ et tel que $\max(l_{|D|}, l_j)$ soit minimum. Un tel quadruplet correspond à un protocole de diffusion partielle à partir de u_0 vers D ayant une latence minimum.

   – Déterminer les deux chemins correspondant à ce protocole de diffusion partielle en utilisant la valeur stockée dans T pour le quadruplet correspondant.

Prouvons maintenant la validité de notre algorithme. Premièrement, observons qu'il n'existe pas de protocole tel que la longueur d'un des deux chemins de diffusion partielle soit plus grande ou égale au nombre $N = mn$ de sommets du graphe G. En effet, la fonction de routage R ne permet pas à un chemin de diffusion partielle de passer à travers d'un même sommet plus qu'une fois. Par conséquent, tout protocole peut être défini comme un quadruplet dans l'espace $\{-1, \ldots, k\}^2 \times \{1, \ldots, N-1\}^2$ et correspond donc à une entrée du tableau T. Deuxièmement, l'algorithme 6.2 remplit le tableau T en respectant la propriété suivante : $T[X]$ est calculé avant $T[X']$ lorsque le quadruplet X' est supérieur à X dans l'ordre lexicographique. Tout appel visitera donc les nœuds destinations dans un ordre croissant en fonction de leurs numéros.

Il ne reste plus qu'à prouver le lemme suivant pour prouver la validité de l'algorithme :

Lemme 6.5 *S'il existe un protocole de diffusion partielle composé de deux appels de u_0 vers $D_i = \{u_1, \ldots, u_i\}$ où pour tout $j \in \{1, \ldots, i\}$, $u_j \in D$ tels que*

- *une extrémité du chemin P_1 du premier appel est le sommet u_i, et sa longueur est égale à k_1 ;*
- *une extrémité du chemin P_2 du second appel est le sommet u_j (si $j > 0$, et u_0 sinon), et sa longueur est égale à k_2 ;*

Alors, l'élément (i, j, k_1, k_2) du tableau T est différent de $(0, 0, 0, 0)$ et réciproquement.

Preuve. Montrons par récurrence sur le paramètre i que s'il existe un protocole défini par $X = (i, j, k_1, k_2)$, alors $T(X) \neq (0, 0, 0, 0)$. L'assertion est trivialement vraie pour $i = 0$ puisque, après la phase d'initialisation, seulement l'élément $(0, -1, 0, 0)$ de T est différent de $(0, 0, 0, 0)$. Le protocole est alors composé de deux chemins de diffusion partielle qui contiennent seulement le nœud source u_0. Leurs longueurs sont toutes deux égales à zéro. Supposons maintenant que l'hypothèse de récurrence est vraie pour tout entier $s < i$ et considérons $s = i$. Supposons par l'absurde qu'il existe un protocole défini par un quadruplet X tel que $T(X) = (0, 0, 0, 0)$ avec $X = (i, j, l_1, l_2)$. Soient P_1 et P_2 les deux chemins correspondant aux appels du protocole de diffusion partielle définis par $X = (i, j, l_{i+1}, l_j)$. Sans perte de généralité, nous pouvons considérer que u_i est dans P_1. Deux cas peuvent se présenter :

- u_{i-1} est dans P_1. Nous pouvons diviser le chemin P_1 en deux sous-chemins $P'_1 \cup P_{u_{i-1} \to u_i}$ où P'_1 est le sous-chemin de P_1 du nœud u_0 au nœud u_{i-1} et $P_{u_{i-1} \to u_i}$ est le sous-chemin de P_1 de u_{i-1} à u_i. Par définition, les deux chemins P'_1 et P_2 forment un protocole de diffusion partielle à partir de u_0 vers l'ensemble de destinations $D_{i-1} = \{u_1, \ldots, u_{i-1}\}$ où pour tout $j \in \{1, \ldots, i-1\}$, $u_j \in D$;. Ce protocole est défini par le quadruplet $X' = (i-1, j, d(P'_1), l_j)$ où $d(P'_1)$ est la longueur du chemin P'_1. Par hypothèse de récurrence, puisque $i-1 < i$, nous avons $T(X') \neq (0, 0, 0, 0)$. Par son instruction 5, l'algorithme 6.2 affecte le quadruplet $X' = (i-1, j, d(P'_1), l_j)$ à $T(i, j, d(P'_1) + c'(u_{i-1}, u_i), l_j)$. Ainsi, par définition de la fonction c', nous avons $(i, j, d(P'_1) + c'(u_{i-1}, u_i), l_j) = X$, et nous ne pouvons pas avoir $T(X)$ égale à $(0, 0, 0, 0)$.
- u_{i-1} est dans P_2 : nous appliquons les mêmes arguments que pour le cas précédent.

Comme les deux cas mènent à une contradiction, il existe un protocole défini par un quadruplet X avec $T(X) \neq (0, 0, 0, 0)$. Réciproquement, en utilisant les même arguments que précédemment, on peut vérifier que si $T(X) \neq (0, 0, 0, 0)$ alors il existe un protocole défini par X. □

Notre algorithme s'exécute en $O(k^2N^2)$ étapes, où N est le nombre de sommets de la grille. Plus précisément, pour chaque phase, nous avons :

- La phase d'initialisation et la phase de remplissage du tableau T se réalisent en $O(k^2N^2)$ opérations ;
- l'extraction de la solution est équivalente à chercher un maximum parmi $O(kN^2)$ éléments et déterminer les ensembles de destinations de chacun des deux appels se fait en $O(k)$ opérations.

Finalement, nous avons :

Théorème 6.6 *L'algorithme décrit dans la section 6.3 calcule un protocole de diffusion partielle minimisant la latence dans une grille pourvue d'une fonction de routage $\mathcal{R}$ définie comme dans la section 6.1, en $O(k^2N^2)$ étapes (où k est le nombre de sommets destinations).*

6.4 Généralisation aux graphes Hamiltoniens

En considérant un chemin Hamiltonien dans un graphe Hamiltonien $G = (V, E)$, nous pouvons construire une numérotation $\mathcal{N}$ des nœuds selon ce chemin. Une fonction de routage $\mathcal{R}$ ayant les même propriétés que celles décrites dans la section 6.1.1 peut alors être utilisée pour router selon ce chemin. On peut vérifier que les réseaux qui possèdent une fonction de routage $\mathcal{R}$ avec les même propriétés que celles décrites dans la section 6.1.1 sont exactement les graphes Hamiltoniens. Pour le vérifier, considérer le cas d'une diffusion depuis le nœud ayant le plus petit numéro. Une telle fonction de routage n'est pas nécessairement minimale.

Les deux algorithmes décrits dans les sections 6.2 et 6.3, ainsi que les preuves de leur validité, sont fondés sur la fonction de contrainte c. Pour généraliser nos résultats aux graphes Hamiltoniens, nous devons adapter la fonction c. Supposons que k soit la cardinalité de l'ensemble D et que $\Omega(u)$ soit l'ensemble des liens de sortie du nœud u tel qu'un chemin de diffusion partielle traversant u et utilisant un de ces liens peut atteindre au moins un autre nœud destination de D. Soit d une fonction distance dépendant de la fonction routage $\mathcal{R}$ dans G définie comme suit : $d_{\mathcal{R}}(u_i, u_j, \ell)$ est le nombre de liens du chemin utilisés par la fonction $\mathcal{R}$ pour transmettre un message de u_i vers u_j en utilisant le port de sortie ℓ de u_i. La fonction de contrainte entre deux nœuds u_i et u_j d'une part, et un lien de sortie $\ell \in \Omega(u_i)$ du nœud u_i d'autre part, est maintenant définie par

$$\mathrm{c}(u_i, u_j, \ell) = \begin{cases} \min_{\ell' \in \Omega(u_i)} d_{\mathcal{R}}(u_i, u_j, \ell') & \text{si } \ell = * \,; \\ d_{\mathcal{R}}(u_i, u_j, \ell) & \text{si } \mathcal{R}(u_i, u_j) = w \text{ et } \ell = (u_i, w) \,; \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \tag{6.6}$$

Nous pouvons maintenant décrire les modifications à apporter à nos algorithmes.

- Pour calculer un protocole de diffusion partielle minimisant la bande passante, il suffit d'utiliser exactement l'algorithme décrit dans la section 6.3.

- Pour calculer un protocole minimisant la latence, il suffit d'utiliser un algorithme similaire à celui de la section 6.3. Un protocole est maintenant défini comme un $2|\Omega(u_0)|$-uplet au lieu d'un quadruplet car un protocole de diffusion partielle est composé de $|\Omega(u_0)|$ chemins. La complexité en temps de l'algorithme résultant est $O((kN)^{|\Omega(u_0)|})$. Malheureusement, cette complexité dépend du nombre de liens de sortie du nœud source. Cependant, cette complexité reste polynomiale lorsque le degré du nœud source est borné par une constante (ce n'est pas le cas de l'hypercube).

6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré le routage wormhole lorsque les routeurs ont la fonctionnalité de copie/retransmission. Sous cette hypothèse, deux nouveaux algorithmes polynomiaux calculant des protocoles de diffusion partielle dans les grilles et les graphes Hamiltoniens ont été décrits. À notre connaissance, ces algorithmes sont les premiers algorithmes polynomiaux optimaux sans blocage qui sont capables d'optimiser la bande passante ou la latence.

Toutefois, nos algorithmes ont le désavantage de faire apparaître des conflits sous certaines conditions. En effet, les chemins générés par les algorithmes ne sont pas nécessairement arête-disjoints. Il peut donc se faire que deux messages veuillent utiliser le même canal au même moment. Pratiquement, ceci impose que l'un des deux messages doive être retardé. Une extension possible de ce travail consisterait donc à chercher à gérer les conflits, c'est-à-dire à chercher à produire des protocoles arête-disjoints.

CHAPITRE 7

Conclusion et Perspectives

Dans cette thèse, nous nous sommes attachés à étudier les problèmes de communications de groupes (diffusion et échange total) dans les réseaux arbitraires dans le modèle commuté. Face à la complexité de ces problèmes, nous nous sommes souvent restreints à des topologies arborescentes. Nous avons étudié ces problèmes sous différentes contraintes. Tout d'abord, nous récapitulons succinctement nos travaux en mettant en évidence nos principaux résultats.

7.1 Conclusion

Cette thèse peut se diviser en deux parties. Une partie est dédiée au mode 1-port et l'autre au mode Δ-port. Sous ces contraintes, il ressort que les problèmes de diffusion et d'échange total sont majoritairement NP-complets mais qu'ils deviennent polynomiaux lorsque la topologie est un arbre. Tout d'abord, nous rappelons les principaux résultats de cette thèse en mode 1-port.

Théorème 2.4 *Pour tout réseau G, pour tout ensemble $D \subseteq V$, pour tout nœud $u \in D$, et pour toute fonction de routage minimale (éventuellement adaptative) sur G, on peut calculer en temps polynomial un protocole de diffusion partielle de u vers D qui s'effectue optimalement en nombre de phases dans le modèle commuté avec fonction de routage, et tel qu'à chaque phase, le nombre de liens utilisés soit minimum.*

Ce résultat est une extension du théorème de Farley en introduisant une condition supplémentaire : les appels obéissent à une fonction de routage minimale. Il est à constater que minimiser *globalement* la bande passante est NP-complet même si à chaque phase, le problème est polynomial. Pour les arbres, nous donnons un encadrement fin de ce paramètre. De plus, nous avons montré que minimiser certaines ressources comme la charge et le délai conduit à des problèmes NP-complets. Par contre, dans les arbres, minimiser certains de ces paramètres conduit à des problèmes polynomiaux. C'est le cas de la minimisation à chaque phase de la charge des routeurs.

Dans le chapitre 3, nous nous sommes intéressés à l'échange total dans le mode 1-port. Contrairement au cas de la diffusion, la complexité du problème de l'échange total est à ce jour inconnue. Il existe cependant une borne inférieure très fine s'appuyant sur la notion d'arête-bissection. Nous avons donc eu comme objectif de vérifier si cette borne inférieure était atteinte dans le cas des anneaux à cordes.

Théorème 3.5 *Soit $C(N,c)$ un anneau à cordes ayant $N = a(c+1)+b$ sommets de corde c, nous avons,*

- *Si $a > c+1$, ou si $N = a(c+1)$,* $g_1(\mathbf{C}(N,c)) = 2\lceil \log_2 N \rceil - \lceil \log_2 k \rceil + O(\log \log k)$;
- *Si $a \leq c+1$,* $2\lceil \log_2 N \rceil - \lceil \log_2 c \rceil + O(1) \leq g_1(\mathbf{C}(N,c)) \leq 2\lceil \log_2 N \rceil - \lceil \log_2 a \rceil + O(1)$.

avec k l'arête-bissection de $C(N,c)$. Ceci signifie malheureusement que, pour le cas $a \leq c+1$, nous sommes incapables d'affirmer ou d'infirmer que la borne inférieure calculée par Klasing soit atteinte pour l'échange total dans les anneaux à cordes.

Dans le chapitre 4, nous traitons le cas où les réseaux sont orientés. Le fait de rajouter cette contrainte complexifie fortement le problème de la diffusion partielle.

Théorème 4.3 *Minimiser le nombre de phases nécessaires pour réaliser une diffusion partielle dans un réseau orienté sous le modèle commuté 1-port est NP-complet.*

Face à ce résultat, nous sommes concentrés sur la détermination de protocoles de diffusion partielle dans les arbres.

Théorème 4.11 *Il existe un algorithme polynomial qui calcule un protocole de diffusion optimal dans une étoile généralisée.*

Nous avons pu résoudre le problème que pour une classe simple d'arbres. Par contre, le fait que le protocole soit optimal est un premier pas vers généralisation de ce théorème dans les arbres quelconques.

La deuxième partie de la thèse porte sur la contrainte Δ-port.

Théorème 5.2 *Minimiser le nombre de phases nécessaires pour réaliser une diffusion partielle dans un réseau dans le modèle commuté Δ-port est NP-complet.*

À partir du résultat précédent, nous pouvons déduire que :

Théorème 5.3 *Minimiser le nombre de phases nécessaires pour réaliser un échange total dans un réseau dans le modèle commuté Δ-port est NP-complet.*

Ces résultats peuvent s'étendre aux graphes orientés. Ceci signifie qu'il est difficilement envisageable (sauf si $P = NP$) de trouver une stratégie générale capable de résoudre les problèmes de diffusion et d'échange total en mode Δ-port. Nous nous donc encore restreints à des arbres.

Théorème 5.10 *Il existe un algorithme polynomial qui calcule un protocole de diffusion partielle optimal dans un arbre (orienté ou non).*

Théorème 5.18 *Il existe un algorithme polynomial qui calcule un protocole d'échange total optimal en nombre de phases dans un arbre non-orienté.*

Toujours dans le mode Δ-port, nous avons étudié une contrainte supplémentaire en supposant que les routeurs possèdent la faculté de copie et transmission. Ceci implique en particulier que les appels peuvent avoir plusieurs destinations. Dans le modèle copie/retransmission, le paramètre du nombre de phases est donc peu pertinent car toutes les diffusions partielles peuvent se faire en une seule phase. C'est pourquoi minimiser la latence et la bande passante permettent d'évaluer l'efficacité des protocoles.

Théorème 6.4 *Il existe un algorithme polynomial qui calcule un protocole de diffusion partielle minimisant la bande passante dans une grille pourvue d'une fonction de routage sans interblocage dans le mode copie/retransmission.*

Théorème 6.6 *L'algorithme de la section 6.3 calcule en temps polynomial un protocole de diffusion partielle minimisant la latence dans une grille pourvue d'une fonction de routage sans interblocage dans le mode copie/retransmission.*

Malheureusement, les deux protocoles ne tiennent pas compte du fait que les appels peuvent être arête-disjoints. Or, ce genre de conflit doit cependant être pris en compte dans la pratique car un appel peut être retardé lors d'un conflit ce qui détériore la performance de nos protocoles. Une extension naturelle de ce travail consisterait à prendre en compte ce genre de conflit.

7.2 Perspectives

Tout au long de cette thèse, nous avons laissé de nombreux points non encore résolus. Dans cette section, nous allons énumérer des problèmes ouverts qui sont, à notre avis, les plus importants.

Un outil général pour la diffusion dans les arbres

Nous avons déterminé des protocoles de diffusion dans les arbres en utilisant des matrices. En effet, au niveau des nœuds, chaque protocole a été considéré comme une empreinte où est notifiée à quelle phase un appel traverse un lien de communication. Puisque nous sommes dans des topologies arborescentes, il existe un unique chemin pour communiquer d'un nœud à un autre. Notre stratégie construit ainsi un protocole optimal en comparant deux-à-deux les protocoles en fonction de leurs empreintes. Nous n'espérons pas que cette méthode puisse s'étendre à d'autres topologies que les arbres. Par contre, elle pourrait se généraliser à des problèmes de communications dans les arbres sous d'autres contraintes.

Dans un premier temps, nous voulons terminer le travail sur la diffusion partielle dans des arbres orientés commencé dans cette thèse. Nous avons résolu le cas simple des étoiles généralisées. Nous voulons poursuivre ce travail en résolvant la diffusion sur les fourches. Cet exemple nous montrera comment un protocole optimal gère les conflits à l'intérieur d'une étoile lorsque des appels extérieurs à l'étoile peuvent aider à les résoudre. Nous pensons qu'il sera ensuite facile de déduire de cette étude un protocole de diffusion pour les arbres quelconques. La diffusion en mode 1-port dans les arbres orientés est certes un problème difficile, mais il se doit d'être considéré car la plupart des protocoles de multicast existants ne réservent pas des canaux symétriques.

Dans un deuxième temps, nous voudrions vérifier si la méthode matricielle peut être adaptée à la construction de protocoles de diffusion 1-port dans des topologies non-orientées. Si tel est le cas, cela nous conforterait dans l'intuition que cette méthodologie pourrait d'étendre au problème de la diffusion partielle sous des contraintes différentes. Par exemple, il serait intéressant d'étudier la contrainte k-port ou, de relâcher la contrainte que les appels soient deux-à-deux arêtes-disjoints. La contrainte k-port induit en effet les mêmes problèmes que lorsqu'on se place dans le modèle 1-port : comment gérer efficacement les conflits si on suppose qu'à chaque phase, k appels peuvent résorber un conflit ? La contrainte permettant qu'un lien soit traversé par k appels simultanément induit que les empreintes ne sont plus des vecteurs binaires mais des vecteurs pouvant contenir des entiers.

Finalement, dans le prolongement du travail précédent, il serait bon de trouver un protocole dans les arbres qui soit optimal en nombre de phases, tout en limitant la longueur des appels. Ceci se justifie par le fait que le temps de communication dépend en partie de la longueur des appels. Afin de résoudre ce problème, il faut vraisemblablement introduire un autre outil que les matrices car ces dernières ne permettent pas de gérer la longueur des appels.

Échange total dans le modèle commuté 1-port.

Le problème de l'échange total dans le modèle commuté 1-port n'est pas complètement résolu. Par exemple, sa complexité est toujours à ma connaissance un problème ouvert. Déterminer la NP-complétude de l'échange total paraît difficile à priori car montrer qu'un problème d'échange total est NP-complet est généralement déduit du fait que le problème de la diffusion est NP-complet. Comme dans modèle commuté 1-port, la diffusion est un problème polynomial, ce raisonnement ne peut pas s'appliquer, et il faut alors rechercher un problème NP-complet original auquel le problème de l'échange total puisse se réduire. Nous n'avons pas encore réussi dans cette recherche. Chercher un contre exemple de réseau qui permettrait d'infirmer l'optimalité de la borne inférieure de Klasing est une autre voie de recherche. Si un tel exemple existe, il donnera des indications sur la NP-complétude du problème. Sinon, il reste envisageable de tenter de trouver une borne supérieure de l'échange total.

Rappelons qu'un protocole d'accumulation et de diffusion est un protocole d'échange total simple et à une constante multiplicative 2 près de l'optimal. Malheureusement, la taille du message après l'accumulation est conséquente. De ce fait, compter le nombre de phases afin d'analyser un protocole nous paraît peu judicieux. Il faut plutôt introduire un autre paramètre qui prenne en compte la taille des messages. Il y a un équilibre à trouver entre le nombre de phases et la longueur des messages. Par exemple, si on n'impose aucune contrainte sur le nombre de phases, il est possible de faire un échange total tel que la somme des tailles des messages à chaque phase soit égale à la taille de l'ensemble des informations à échanger initialement. C'est pourquoi il faut faire un compromis entre le nombre de phases et la taille du message. En d'autres termes, il faut autoriser que le protocole ait un nombre de phases à une constante multiplicative près de l'optimal pour permettre de diminuer considérablement la masse des messages échangés.

Algorithmes d'approximation

Tout au long de notre thèse, nous avons montré que, dans le modèle commuté, les problèmes de la diffusion partielle et d'échange total sont souvent NP-complets. Ainsi, une voie de recherche consiste à se consacrer à la mise au point d'algorithmes d'approximations. Nous avons remarqué que la technique de [47] définie pour la contrainte 1-port sommet-disjoints ne s'applique pas, ou pas directement, aux modes de communications étudiés dans cette thèse, en particulier pour le mode orienté 1-port ou le mode Δ-port. À notre avis, pour le mode orienté 1-port, il faudrait trouver une nouvelle méthode qui s'appuie notamment sur le fait que, dans des graphes Eulériens, la diffusion peut se faire optimalement. En revanche, pour le mode Δ-port, une bonne méthode pourrait être de trouver un arbre couvrant ayant des bonnes caractéristiques.

Bibliographie

[1] B.W. Arden and H. Lee. Analysis of chordal ring network. In *IEEE Trans. Comput.*, volume 30, pages 291–295. IEEE, April 1981.

[2] T. Ballardie, P. Francis, and J. Crowcroft. Core based tree (CBT): an architecture for scalable inter-domain multicast routing. In *proceedings of SIGCOMM*, pages 85–95. ACM press, 1993.

[3] A. Bar-Noy, S. Guha, J. Naor, and B. Shieber. Multicasting in heterogeneous networks. In *ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)*, pages 448–453. ACM press, 1998.

[4] L. Bariere, J. Fabrega, E. Simo, and M. Zaragoza. Fault-tolerant routings in chordal ring networks. Submitted to *Networks*, 1997.

[5] L. Barrière, J. Cohen, and M. Mitjana. Gossiping in chordal rings under the line model. In *23rd Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science*, pages 37–47, 1998.

[6] D. Barth and P. Fraigniaud. Approximation algorithms for structured communication problems. In *Proceedings of the 9th Annual ACM Symposium on Parallel Algorithms and Architectures*, pages 180–188. ACM press, June 22–25, 1997.

[7] B. Beauquier, J-C. Bermond, L. Gargano, P. Hell, S. Perennes, and U. Vaccaro. Graph problems arise from wavelength-routing in all-optical networks. In Pierpaolo Degano, Robert Gorrieri, and Alberto Marchetti-Spaccamela, editors, *2nd Workshop on Optics and Computer Science (WOCS)*, Geneva, April 1997.

[8] J.-C. Bermond, F. Comellas, and D. F. Hsu. Distributed loop computer networks: A survey. *J. Parallel Distributed Comput.*, pages 2–10, 1995.

[9] B.D. Birchler, A. Esfahanian, and E. Torng. Sufficient conditions for optimal multicast communication. In *Proceedings of the International Conference on Parallel Processing*, pages 390–393, 1997.

[10] V. Bouchitte, J. Cohen, and E. Fleury. Optimal deadlock-free path-based multicast algorithms in meshes. Pre-proceedings of International Colloquium on Structural Information Communication Complexity (SIRROCO), June 1998.

[11] V. Bouchitte, J. Cohen, and E. Fleury. Optimal deadlock-free path-based multicast algorithms in meshes, June 1998.

[12] N.K. Cheung, K. Nosu, and G. Winzer. Special issue on dense WDM networks. *IEEE Journal Selected Areas in Communications*, 8(4), 1990.

[13] C-M. Chiang and L. M. Ni. Multi-address encoding for multicast. In K. Bolding and L. Snyder, editors, *Parallel Computer Routing and Communication, First International Workshop, (PCRCW '94)*, number 853 in Lecture Notes in Computer Science, pages 146–160. Springer-Verlag, May 1994.

[14] J. Cohen. Broadcasting, multicasting and gossiping in trees under the all-port line model. In *10th ACM Symposium on Parallel Algorithms and Architectures (SPAA)*, pages 164–171. ACM press, 1998.

[15] J. Cohen, P. Fraigniaud, J.C. König, and A. Raspaud. Optimized broadcasting and multicasting protocols in cut-through routed networks. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 9(8):788–802, 1998.

[16] J. Cohen, P. Fraigniaud, and M. Mitjana. Scheduling calls for multicasting in tree-networks. Technical report 1189, LRI, Université Paris-Sud, 91405 Orsay cedex, France (http://www.lri.fr/˜pierre), 1998.

[17] H.S.M. Coxeter. Self dual configurations and regular graphs. In *Bull. Amer. Math. Soc.*, volume 56, pages 413–455, 1950.

[18] W. Dally and C. Seitz. The torus routing chip. *Distributed Computing*, 1:187–196, 1986.

[19] W. J. Dally and C. L. Seitz. Deadlock-free message routing in multiprocessor interconnection networks. *IEEE Transactions on Computers*, C-36(5):547–553, may 1987.

[20] S. Deering, D. Estrin, D. Farinacci, V. Jacobson, C-G. Liu, and L. Wei. An architecture for wide-area multicast routing. In *SIGCOMM*, pages 126–135. ACM press, 1994.

[21] O. Delmas and S. Perennes. Circuit-switched gossiping in 3-dimensionnal torus networks. In *Euro-Par'96 Parallel Processing*, number 1123 in Lecture Notes in Computer Science, pages 371–373. Springer-Verlag, August 1997.

[22] O. Delmas and S. Perennes. Diffusion en mode commutation de circuits dans les tores de dimension k. *Techniques et Science informatiques*, 16(5):563–581, 1997.

[23] J. Edmonds. Maximum matching and a polyhedron with 0-1 vertices. *Journal of Research of the Natianal Bureau of Standards-B*, 69(B):125–130, 1965.

[24] A. Farley. Minimum-time line broadcast networks. *Networks*, 10:59–70, 1980.

[25] E. Fleury and P. Fraigniaud. A general theory for deadlock avoidance in wormhole-routed networks. In *10th International Conference on Parallel and Distributed Computing Systems (PDCS'97)*, New Orleans, Louisiana, October 1997.

[26] P. Fraigniaud and E. Lazard. Methods and Problems of Communication in Usual Networks. *Discrete Applied Mathematics*, 53:79–133, 1994.

[27] P. Fraigniaud and J. Peters. Structured Communication in torus networks. In *28th Annual Hawaii International conference on system sciences*, pages 584–593. IEEE, 1995.

[28] P. Fraigniaud and S. Vial. Approximation algorithms for information dissemination problems. In *Proceedings of the IEEE second international conference on algorithms and architectures for parallel processing*, pages 155–162, 1996.

[29] S. Fujita and A. Farley. Minimum-cost line broadcast in paths. *Discrete Applied Mathematics*, 75(3):225–268, 1997.

[30] S. Fujita and M. Yamashita. Optimal group gossiping in hypercubes under a circuit-switching model. *SIAM Journal on Computing*, 25(5):1045–1060, 1996.

[31] S. Fujita, M. Yamashita, and T. Ae. Optimal group gossiping in hypercubes under wormhole routing model. In *Algorithms and computation*, volume 762 of *Lecture notes in Computer Science*, pages 276–286. Springer-Verlag, December 1993.

[32] M.R. Garey and D.S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the theory of NP-Completeness*. Serie of books in mathematical sciences. Freeman, freeman edition, 1979.

[33] R. Handler and M. Huber. *Integrated broadband networks: an introduction to ATM-based networks*. Addison-Wesley, 1991.

[34] S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, and A. Liestman. A survey of gossiping and broadcasting in communication networks. *Networks*, 18:319–349, 1986.

[35] C-T. Ho and M-Y. Kao. Optimal broadcast in all-port wormhole-routed hypercubes. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 6(2):200–204, 1995.

[36] J. Hromković, R. Klasing, B. Monien, and R. Peine. Dissemination of information in interconnection networks (broadcasting and gossiping). In Ding-Zhu Du and D. Frank Hsu, editors, *Combinatorial Network Theory*, pages 125–212. Kluwer Academic, 1995.

[37] J. Hromković, R. Klasing, and E. Stohr. Dissemination of information in vertex-disjoint paths mode. *Computer and Artificial Intelligence*, 15(4):295–318, 1996.

[38] J. Hromkovic, R. Klasing, E. A. Stohr, and H. Wagener. Gossiping in vertex-disjoint paths mode in d-dimensional grids and planar graphs. *Information in Computation*, 133(1):17–28, 1995.

[39] J. Hromkovic, R. Klasing, and E.A Stohr. Dissemination of information in vertex-disjoint paths mode. *Comput. Artif. Intell*, 15(4):295–318, 1996.

[40] J. Hromkovic, R. Klasing, W. Unger, and H. Wagener. Optimal algorithms for broadcast and gossip in the edge-disjoint path modes. *Information in Computation*, 133(1):1–33, 1997.

[41] C.C. Huang and P.K. McKinley. Communication issues in parallel computing across ATM networks. *IEEE Parallel and Distributed Technogy*, 1994.

[42] S.L. Johnson. Communication efficient basic linear algebra computations on hypercube architectures. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 4:133–172, 1987.

[43] J.O. Kane and J. Peters. Line broadcasting in cycles. Technical Report CMPT TR 94-11, School of Computing Science, Simon Fraser University, Burnaby, Canada, 1994.

[44] Klasing. The relationship between the gossip complexity in vertex-disjoint paths mode and the vertex bisection width. *Discrete Applied Mathematics*, 83:229–246, 1998.

[45] R. Klasing. The relationship between gossiping in vertex-disjoint paths mode and bisection width. In Igor Prívara, Branislav Rovan, and Peter Ruzicka, editors, *Mathematical Foundations of Computer Science 1994 19th International Symposium*, volume 841 of *lncs*, pages 473–483, Kosice, Slovakia, 22–26 August 1994. Springer.

[46] W. Knödel. New gossip and telephone. *Discrete mathematics*, 13:95, 1975.

[47] G. Kortsarz and D. Peleg. Approximation algorithms for minimum time broadcast. In *Proceedings of the 1992 Israel Symposium on Theory of Computer Science*, number 601 in Lecture Notes in Computer Science, pages 67–78. Springer-Verlag, 1992.

[48] D. Krizanc and F. Luccio. Boolean routing on chordal rings. In *Proceedings of the colloquium on Structural Information and Communication Complexity (SIRROCO)*, pages 119–123. Carleton University Press, 1995.

[49] C. Laforest. Broadcast and gossip in line-communication mode. *Discrete Applied Mathematics*, 80:161–176, 1997.

[50] Y. Lan, A-H. Esfahanian, and L. Ni. Multicast in hypercube multiprocessor. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 8:30–41, 1990.

[51] X. Lin and L. M. Ni. Deadlock-free multicast wormhole routing in multicomputer networks. In *18th Annual International Symposium on Computer Architecture*, pages 116–125, Toronto, May 1991. ACM press. (see also Technical Report MSU-CPS-ACS-29, 1990).

[52] L. Lovasz and M. D. Plummer. *Matching theory.* North-Holland, 1986.

[53] B. Monien and H. Sudborough. Embedding one interconnection network in another. *Computing Supplementum*, 7:257–282, 1990.

[54] L. Ni and P. McKinley. A survey of wormhole routing techniques in direct networks. *Computers*, 26(2):62–76, feb 1993.

[55] J. Peters and M. Syska. Circuit-switched broadcasting in torus networks. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 7(3):246–255, 1996.

[56] J.G. Peters and C.C. Spencer. Global communication on circuit-switched toroidal meshes. Technical Report TR 97-02, School of Computing Science, Simon Fraser Univ., 1997.

[57] R. Ravi. Rapid rumor ramification: approximating the minimum broadcast time. In *35-th Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 202–213. IEEE Computer Society Press, 1994.

[58] J. De Rumeur. *Communication dans les réseaux de processeurs*. Collection Etudes et Recherches en Informatique. Masson, 1994.

[59] P. Slater, E Cockayne, and S. Hedetniemi. Information dissemination in trees. *SIAM Journal on Computing*, 10(4):692–701, 1981.

[60] C. B. Stunkel, R. Sivaram, and D. K. Panda. Implementing multidestination worms in switch-based parallel systems: Architectural alternatives and their impact,. In *The 24th Annual IEEE/ACM International Symposium on Computer Architecture (ISCA '97)*, Denver, Colorado, June 1997.

[61] A. Tanenbaum. *Computer Networks*. Prentice Hall, 1997.

[62] P. Winter. Steiner problem in networks: a survey. *IEEE Networks*, 17(2):129–167, 1987.

[63] H. Xu, P. McKinley, and L. Ni. Efficient implementation of barrier synchronization in wormhole-routed hypercube multicomputers. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 16:172–184, 1992.

Index

Résumé : On assiste actuellement à un développement spectaculaire des réseaux de communication, en particulier des réseaux informatiques. Ces réseaux peuvent aussi bien interconnecter des processeurs dans des machines massivement parallèles que des ordinateurs dans des réseaux de stations de travail. Les réseaux informatiques sont de plus en plus utilisés pour réaliser des communications de groupes, c'est-à-dire pour réaliser un ensemble de communications impliquant un groupe de processeurs ou d'ordinateurs.

Dans cette thèse, nous présentons une étude de l'optimisation des communications de groupes telles que la diffusion partielle ou l'échange total dans les réseaux informatiques de topologies arbitraires. Lorsque les problèmes s'avèrent NP-complets, puisque la plupart des protocoles usuels utilisent des arbres couvrants pour faire transiter les informations, nous étudions la restriction des problèmes aux arbres.

L'étude se place dans le cadre du modèle commuté, c'est-à-dire dans un modèle où les nœuds communiquent par des appels longues distances arrête-disjointes. L'optimalité des protocoles est étudiée suivant différentes hypothèses sur les propriétés des nœuds du réseaux ou sur la façon dont sont acheminés les messages dans le réseau comme par exemple le mode de commutation choisi ou la fonction de routage utilisée.

Abstract : We are currently facing to a spectacular development of communication networks. These networks are used to connect processors in massively parallel machines or to connect work stations. They are more and more used to perform group communications, that is to say to perform communications between groups of processors or of computers.

In this thesis, we present a study of the optimization of group communications in arbitrary networks. When the problems turn out to be NP-complete, since most of the usual protocols use spanning trees to disseminate information, the restriction of the problems to trees is studied.

The study is made under the line model, that is to say under the model where communications are made via edge disjoint long distance calls. The optimality of the protocols is studied according to several hypothesis on the properties of the nodes of the network or on the way the messages are routed in the network: for example according to the chosen commutation mode or according to the routing function used.