semaine du 1er février 2021

Automates et Applications
M1–MPRI Orsay

TD nº 1

1 Automates

1. Étant donné un automate $\mathcal{A}$, donner un automate $\mathcal{A}_*$ tel que $(L_\mathcal{A})^* = L_{\mathcal{A}_*}$
2. Montrons que $(a|b)^* = (a^*b^*)^*$.
3. Donner un DFA sur $\Sigma = \{a, b\}$ reconnaissant tous les mots n'ayant pas plus de deux occurrences consécutives de la même lettre :
4. On définit le dédoublement d'un mot par : $dd(\epsilon) = \epsilon$ et $\forall x \in \Sigma : dd(v \cdot x) = dd(v) \cdot xx$. Exemple : sur $\Sigma = \{a, b\}$, $dd(aba)$ est $aabbaa$. Supposons que L est un langage rationnel. Montrer que $dd(L) = \{dd(v) \mid v \in L\}$ est rationnel.
5. Étant donné un automate $\mathcal{A}$ donner un automate (non déterministe) reconnaissant $L_\mathcal{A}^\mathsf{R}$ le langage miroir de $L_\mathcal{A}$.
6. On considère l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$. On considère le langage L_2 comme l'ensemble des mots binaires représentant un multiple de deux (sans zéro non significatif). Ce langage est-il reconnaissable ? Même question pour L_3 l'ensemble des mots binaires représentant un multiple de 3 (sans zéro non significatif). Ce langage est-il reconnaissable ? Qu'en est-il du langage L_6 des mots binaires représentant un multiple de 6 ?

   Indication pour L_3 on pourra remarquer que pour tout nombre, son reste dans la division par 3 est 0 (multiple de 3), 1 ou 2. Pour chacun de ces cas, on poura examiner ce que signifie rajouter un 0 ou un 1 à la fin de ce nombre.
7. On appelle langage de Dyck un l'ensemble D des mots bien parenthésés sur un alphabet $\{(,)\}$. Par exemple, le mot `(()())(()(()))` est bien parenthésé. On peut définir formellement cette propriété. Un mot w est bien parenthésé si :
   — pour tout préfixe u de w, le nombre de `)` dans u est inférieur au nombre de `(`
   — il y a autant de `(` que de `)` dans le mot
   Montrer que D n'est pas un langage rationnel.