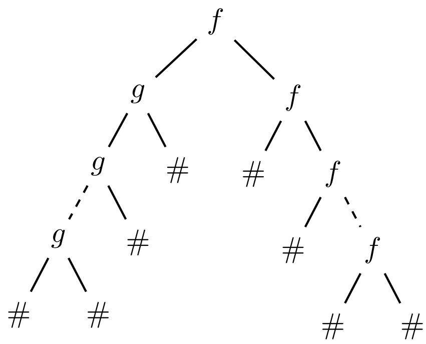
semaine du 1er février 2021

Automates et Applications
M1–MPRI Orsay

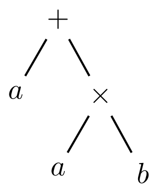
TD nº 2

1 Automates

1. Donner un automate d'arbre ascendant reconnaissant le langage de tous les arbres sur $\mathcal{T}(\Sigma)$, avec $\Sigma = \{f^2, g^2, \#\}$ ayant les propriétés suivantes :
   — un nœud ayant le symbole g possède deux fils f.
   — la racine est un f.
2. Donner un automate d'arbre ascendant reconnaissant le langage de tous les arbres sur $\mathcal{T}(\Sigma)$, avec $\Sigma = \{f^2, g^2, \#\}$ ayant la forme suivante :



3. On considère $\Sigma = \{+^2, \times^2, a, b\}$, on considère le langage sur Σ des expressions arithmétiques non ambiguës. Une expression est non ambiguë si l'affichage de son arbre de syntaxe ne nécessite pas de parenthèses. Par exemple l'arbre :



   Représente une expression non ambiguë. Ce langage est il reconnaissable par un automate ascendant ? Et par un automate descendant déterministe ?
4. Soit T un langage d'arbre. On définit l'ensemble $\mathsf{leaves}(t)$ comme le *mot* formé par tous les symboles d'arité 0 de l'arbre t rencontré dans l'ordre un parcours en profondeur d'abord. Formellement, un tel mot peut s'exprimer comme la suite $t(l_1), t(l_2), \dots, t(l_k)$ vérifiant les propriétés :
   — $\forall i, |t(l_i)| = 0$
   — $\forall i, j, i < j \Rightarrow l_i <_{\mathsf{lex}} l_j$ où $<_{\mathsf{lex}}$ est l'ordre lexicographique sur les chemins.
   On définit ensuite $\mathsf{leaves}(T) = \{\mathsf{leaves}(T) \mid t \in T\}$. Montre que même si T est un langage d'arbre reconnaissable, $\mathsf{leaves}(T)$ n'est pas forcément un langage régulier sur les mots.
5. Montrer que le langage des arbres parfaits sur $\Sigma = \{f^2, a\}$ n'est pas reconnaissable. On rappelle qu'un arbre parfait est un arbre binaire où toutes les feuilles sont à la même profondeur.
6. Soit T un langage d'arbre sur un alphabet $\Sigma = \{f^2, a, b\}$. On considère la congruence $f(x, y) \equiv f(y, x)$. Montrer que si T est reconnaissable, l'ensemble $\{t \mid \exists t' \in T t \equiv t'\}$ est reconnaissable.