Optimisation topologique de formes par algorithmes génétiques

Paru dans la *Revue Française de Mécanique* **4** pp 237–246, 1997

Couro Kane & **Marc Schoenauer**
Centre de Mathématiques Appliquées
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex - FRANCE
{Couro.Kane,Marc.Schoenauer}@polytechnique.fr

November 12, 1998

Abstract

Structural topology optimization is addressed through Genetic Algorithms: A set of designs is evolved following the Darwinian *survival-of-fittest* principle. This approach demonstrates high flexibility, and breaks many limits of standard optimization algorithms, in spite of the heavy requirements in term of computational effort: Alternate optimal solutions to the same problem can be found; Structures can be optimized with respect to multiple loadings; The prescribed loadings can be applied on the unknown boundary of the solution, rather than on the fixed boundary of the design domain; Different materials as well as different mechanical models can be used, as witnessed by the first results of Topological Optimum Design ever obtained in the large displacements model. But these results could not have been obtained without careful specific handling of the specific aspects of topological genetic optimization: First, specific genetic operators were introduced; Second, special attention was paid to the design of the objective function; The nonlinear geometrical effects of the large displacement model lead to non viable solutions, unless some constraints are imposed on the stress field.

Résumé

Le travail présenté dans ce papier est centré sur le problème de l'optimisation topologique des formes, et utilise la méthode des algorithmes génétiques. Une population de formes évolue selon le principe darwinien *Les plus adaptés survivent*, la fonction d'adaptation poussant les individus de cette population vers les structures optimales. Nous montrons la flexibilité de cette approche, qui permet d'obtenir des résultats hors de portée des algorithmes standard du domaine ; le prix à payer est un coût de calcul important. Ainsi, plusieurs solutions quasi-optimales peuvent être obtenues pour le même problème ; l'optimisation peut être faite en respectant des contraintes sur plus d'un chargement ; le chargement peut être appliqué sur la frontière inconnue de la structure finale (comme par exemple pour l'optimisation d'un dôme sous-marin) ; enfin, cette méthode peut être appliquée à tout type de matériau et à tout modèle mécanique, ainsi qu'en attestent les résultats en élasticité non-linéaire, les premiers du genre à notre connaissance. Les clés de ces succès sont des adaptations de la méthode générale des algorithmes génétiques au problème posé. Tout d'abord, des opérateurs génétiques spécialisés ont été utilisés à la place des opérateurs standard. Ensuite, la fonction d'adaptation a du être modifiée après que les premiers résultats utilisant le modèle de l'élasticité en grands déplacements

eurent conduit à des résultats non-viables : une contrainte sur le champ de contraintes mécaniques a été incorporée à la fonction d'adaptation.

1 Introduction

Les algorithmes génétiques sont des méthodes d'optimisation stochastiques maintenant bien connues, depuis le travail séminal de J. Holland [21], consolidé par le livre de D. Goldberg [15]. Plus récemment, le strict cadre initial des chaînes de bits de longueur fixe a été étendu a des espaces de recherches quelconques [33, 31, 6, 5], montrant clairement que les algorithmes de bases devaient être modifiés pour tenir compte des particularités du problème à traiter. Le terme d'*algorithmes évolutionnaires* ("Evolutionary Algorithmes) recouvre ainsi maintenant toutes ces variantes [38, 13, 4].

De telles méthodes peuvent permettre, en Calcul Scientifique comme dans bien d'autres domaines, de dépasser certaines limites des méthodes classiques : capables de travailler sur des espaces discrets aussi bien que continus (voire des espaces mixtes, comme dans le domaine de l'optimisation topologique de structures en treillis [41]), ce sont des méthodes d'ordre 0 particulièrement efficaces lorsque la fonction à optimiser possède de nombreux optima locaux qui pénalisent les méthodes classiques tels les algorithmes de type gradient. En contrepartie, elles sont plusieurs ordres de grandeurs plus lentes en terme de coût de calcul.

Dans ce papier, nous appliquons les algorithmes génétiques a un problème bien connu en Mécanique des Structures, l'optimisation topologique de plaques-consoles. En section 2, nous introduisons brièvement le problème mécanique, passant en revue les travaux antérieurs et en discutant les avantages et limitations. La section 3 présente les grandes lignes des algorithmes génétiques dans leur perspective historique. En section 4, nous présentons les modifications des l'algorithme standards que nous avons effectués pour prendre en compte les spécificités du problème de l'optimisation topologique des formes. Nous discutons du choix de la représentation, des opérateurs génétiques et construisons la fonction d'adaptation. Les résultats dans le cadre de l'élasticité linéaire sont présentés dans la section 5 : les premiers résultats valident la méthode sur le problème-test classique de la plaque console encastrée ; problème qui est ensuite modifié afin de mettre en lumière la possibilité des algorithmes évolutionnaires de donner plusieurs solutions quasi-optimales. Des résultats mettant en jeu l'optimisation des formes soumises à plusieurs chargements sont ensuite présentés sur le problème de l'optimisation d'un cadre de vélo. Enfin, le cas du dôme sous-marin vient illustrer la souplesse de la méthode puisque le chargement est là appliqué sur la frontière "libre" du problème, interdisant l'utilisation des méthodes classiques. La dernière section (avant l'inévitable conclusion) est consacré aux résultats originaux obtenus dans le cadre de l'élasticité en grands déplacements : les effets géométriques non linéaires rendent nécessaires la modification de la fonction d'adaptation afin de prendre en compte le champ de contraintes mécanique.

Tous les résultats présentés ici ont été obtenus dans le cadre de la thèse du premier auteur, où tous les détails techniques peuvent être trouvés [25].

2 Le problème mécanique

2.1 Contexte

Le cadre général de ce papier est le problème de trouver une forme de structure optimale, c'est-à-dire une répartition de matière dans un domaine initial donné, de telle sorte que le poids de la structure soit minimal et que le comportement mécanique de cette structure respecte certaines contraintes (par exemple, que le déplacement de la structure soumise à un chargement donné ne dépasse pas une valeur prescrite.

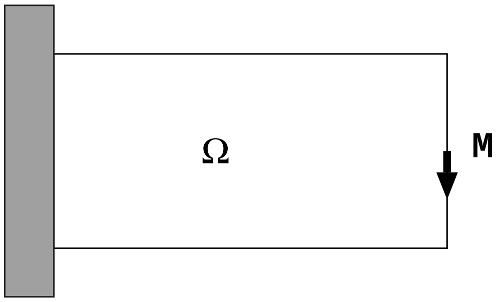


Figure 1: La plaque console 2×1.

Dans tout ce papier, à part dans la dernière section 6, nous utilisons le modèle de l'élasticité linéaire bidimensionnelle en contraintes planes. De plus, tous les matériaux sont supposé linéaires, et les effets de la gravité sont négligés (voir une description détaillée du modèle dans [11, 24]).

L'un des problèmes-test les plus connus en optimisation de formes est la plaque console encastrée, ou *cantilever* : la forme de la plaque est cherchée dans un rectangle supposé fixé sur sa frontière verticale gauche (le déplacement imposé est 0), et le chargement est constitué d'une force ponctuelle appliquée au milieu de la frontière droite du rectangle (voir figure 1 le problème du cantilever 2×1).

2.2 Etat de l'art

Les approches classiques en optimisation de formes sont les suivantes :

La méthode de variation de domaine [8], ou analyse de sensibilité, consiste à effectuer une succession de petites variations d'un domaine initial, calculant le gradient de la fonction objectif par rapport au domaine. Les deux principaux défauts de cette méthode sont la grande dépendance par rapport au domaine initial choisi, et l'impossibilité de modifier ce la topologie de ce domaine (i.e. ajouter ou enlever des "trous").

Une approche plus récente de l'optimisation topologique des formes est celle fondée sur l'homogénéisation [7], qui consiste à relaxer le problème, considérant des densités de matériau continues dans $[0, 1]$. A la fin de l'étape d'optimisation, le problème est pénalisé pour retrouver une solution dans l'espace des densités $0, 1$ mécaniquement réalistes. Toutefois, cette approche requiert la construction de l'opérateur homogénéisé, limité pour l'instant au strict cadre de l'élasticité linéaire avec chargement unique [2]. De plus, elle est incapable de prendre en compte des chargements sur la frontière inconnue de la structure cherchée (voir le problème du dôme sous-marin section 5.3).

Une approche possible pour dépasser ce limites est offerte par les méthodes d'optimisation stochastiques, comme le recuit simulé [28] ou les algorithmes génétiques [21]. Ces deux méthodes ont été appliquées avec succès à d'autres problèmes d'optimisation de structures : pour le dimensionnement de structures de treillis, (voir [17, 19, 30, 37] parmi d'autres) comme pour leur optimisation topologique [20, 18, 41] et pour l'optimisation de matériaux composites [29].

Plus récemment, des problèmes d'optimisation topologique de formes ont été abordés : le recuit simulé a été utilisé pour l'optimisation de la section droite d'une poutre dans [3, 14], oú de plus un int'eressant cadre théorique a été développé. Les algorithmes génétiques enfin ont été utilisés pour résoudre le problème du cantilever présenté section 2.1 dans [22, 10]. Le travail présenté ici prolonge ces derniers travaux : Nous travaillons avec des contraintes géométriques plus faibles, augmentant l'espace des solutions possibles (Section 4.4.1) ; la mise au point précise de la fonction d'adaptation permet un contrôle plus fin du comportement mécanique de la solution (Section 4.4); Enfin, nous ne nous limitons pas à des résultats de faisabilité sur des problèmes pouvant être résolus par la méthode d'homogénéisation (voir les résultats expérimentaux des sections 5 et 6).

3 Les algorithmes génétiques

Cette section présente rapidement les idées de base des algorithmes génétiques (AGs). Le lecteur pourra consulter utilement [15] ou [31] pour des explications plus détaillées.

3.1 AGs historiques

Supposons que le problème soit de maximiser une fonction d'*adaptation* ("fitness") F définie sur $E = \{0,1\}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Un p-uplet d'*individus* (points de E) appelé *population* est initialisé aléatoirement, puis évolue en une succession de *générations* suivant une caricature du principe Darwinien que les plus adaptés (en terme de valeurs de la fonction F) survivent et se reproduisent. Idéalement, les individus les plus adaptés (i.e. les points de E réalisant les optima de F) finiront par apparaître.

Les étapes principales d'une génération sont les suivantes:

- **Evaluation** : la valeur de F est calculée pour tous les individus de la population P. A noter que ces calculs sont totalement indépendants, et peuvent par conséquent être effectués en parallèle.
- **Sélection** : les individus les plus performants de P sont copiés et forment une nouvelle population P', de même taille que P. Le choix des reproducteurs est effectué par un tirage aléatoire avec remise, chaque individus ayant une chance d'être choisi proportionnelle à sa valeur d'adaptation.
- **Croisement** : des couples d'individus choisis aléatoirement dans P' échangent un certains nombre de bits, avec une probabilité p_c (les valeurs usuelles de p_c sont choisies autour de 0.6-0.7), donnant naissance à deux nouveaux individus. Une nouvelle population p'', de même taille, est ainsi construite.

  Les croisements les plus fréquemment utilisés sont le croisement *à un point* ou *à deux points*, oú des parties contiguës des chaînes de bits de parents sont échangées. Le cas général oú chaque enfant reçoit aléatoirement les bits de l'un ou l'autre des parents est appelé croisement *uniforme* [40].
- **Mutation** : chaque bit de chaque individu de la population P'' a une probabilité p_m, de l'ordre de 10^{-2} à 10^{-4}, d'être inversé.

3.2 Le choix de la représentation

Une des difficulté principales de la résolution de problèmes d'optimisation par algorithmes génétiques est le choix du codage: l'approche purement binaire présentée ci-dessus est élargie. On distingue ainsi deux espaces : La fonction d'adaptation décrit le comportement des individus, et est définie sur l'espace *phénotypique*. Par contre, l'évolution (application des opérateurs génétiques que sont le croisement et la mutation) s'effectue dans l'espace *génotypique*. Ce dernier espace, égal traditionnellement à $\{0,1\}^N$ dans la théorie classique des AGs [21, 15], mais est souvent choisi différemment en fonction du problème dans les algorithmes évolutionnaires modernes [31, 38, 13, 4].

Le *codage*, ou transformation du phénotype en génotype, peut être la source de perte d'information, étant généralement non bijectif, non isométrique, ... Le choix de l'espace génotypique résulte alors d'un compromis entre la simplicité du codage et la possibilité de disposer dans l'espace phénotypique d'opérateurs génétiques performants, respectant certaines heuristiques [33]. Les AGs traditionnels insistent sur l'usage des chaînes de bits comme génotypes, la puissance des opérateurs génétiques devant, dans de cas, compenser toute éventuelle perte d'information due au codage. Les autres écoles en présence insistent sur la nécessité d'avoir deux espaces aussi proches que possible, quitte à redéfinir les opérateurs génétiques à chaque nouveau problème. Une discussion plus complète peut être trouvée dans [13], et un exemple sera présenté en Section 4.

3.3 Avantages et inconvénients des AGs

Le premier avantage des AGs en tant que méthode d'optimisation est d'être d'ordre 0 : ils ne requièrent aucun calcul de gradient, ni de la fonction ni des éventuelles contraintes. De plus, ils sont capables de travailler sur n'importe quel espace de recherche, continu, discret, mixte, espace de graphes, d'arbres, ... du moment qu'il est possible de définir sur cet espace des opérateurs génétiques. Cependant, il n'existe pas de méthode générale de construction de *bons* opérateurs génétiques, et seul le savoir-faire, et des expérimentations numériques a posteriori peuvent justifier certains choix d'opérateurs. La section 4.3 donnera des exemples d'opérateurs spécifiques ainsi validés.

Par ailleurs, le talon d'Achille des AGs est bien connu : il s'agit de leur coût en temps-calcul. En particulier, lorsque des méthodes de gradient sont applicables sur le même problème, elles sont plusieurs ordres de grandeur plus rapides [37]. Certes, la parallélisation permet de réduire le temps d'obtention d'une solution, mais elle ne fait que distribuer le temps-calcul sans réellement le réduire.

De plus, les AGs utilisent une grand nombre de paramètres qui doivent être fixés par l'utilisateur (taille de population, probabilités d'application des opérateurs génétiques, ... et la mise au point de ces paramètres ne peut se faire que par essais-erreurs.

Cependant, ces désavantages sont insignifiants lorsque les AGs sont la seule méthode possible pour résoudre un problème donné. Le reste du papier est consacré à la présentation d'un tel cas de figure.

4 Optimisation de formes génétique

Nous présentons ici les spécificités de la mise en oeuvre des AGs sur le problème d'Optimum Design de la section 2.1, décrivant les étapes ayant conduit à des résultats originaux.

4.1 Principe général

La propriété d'être d'ordre 0 des AGs permet d'optimiser des fonctions dont le calcul est le résultat d'une simulation numérique de type "boite-noire". Ainsi, la fonction d'adaptation pour le problème d'Optimum Design de la section 2.1 peut-elle être représentée schématiquement de la manière suivante : le comportement mécanique de la structure est calculé numériquement par la méthode des éléments finis. Le poids de la structure, pénalisé par les violations des contraintes du cahier des charges déduites de la simulation, est une bonne mesure de l'adéquation de la structure au problème.

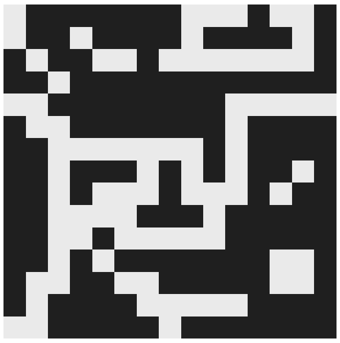
Ce schéma ne résout toutefois pas le problème du choix de l'espace de recherche. L'espace théorique est l'ensemble des partitions du domaine initial en deux sous-ensembles, matière et vide. Cet espace est évidemment beaucoup trop général (par exemple, seules les partitions à frontières régulières ont un sens mécanique). Il n'existe malheureusement pas d'espace "naturel" pour de telles partitions.

4.2 La représentation en tableau de bits

L'utilisation de la méthode des éléments finis a une conséquence immédiate sur la représentation : l'étape de maillage étant source d'erreurs numériques [12], comparer le comportement mécanique de deux structures à partir des résultats obtenus avec deux maillages différents est voué à l'échec dés que les deux structures ont des comportements proches. Il est donc nécessaire d'utiliser le même maillage à l'intérieur d'une même génération.

Une fois prise la décision de travailler sur un maillage fixe, et avec une connaissance même très superficielle des AGs, une représentation s'impose immédiatement : pour un maillage donné, chaque élément peut être constitué soit de matière, soit de vide, codé 0 ou 1 (voir figure 2). Cette représentation a l'avantage de pouvoir être vus comme une chaîne de bits de longueur fixe, nous

```
100000001110110
100100001000010
010011011111110
001000000000000
110000000011111
011000000010000
001111111010000
001000101010010
001011101110100
001111000100000
001010000000110
011001100000110
010000111110000
110000010000000
```



a - *Le génotype : un tableau de bits.* b - *Le phénotype : la répartition vide/matériau.*

Figure 2: Représentation en tableaux de bits : l'AG s'applique sur le génotype (a), et la fonction d'adaptation est calculée sur le phénotype (b).

replaçant ainsi dans le cadre historique des AGs [21, 15]. De fait, tous les travaux précédents utilisant les AGs pour l'optimisation de formes ont adopté cette représentation [22, 10]. De plus, cette représentation rentre dans le cadre théorique défini dans [14].

Cependant, cette interprétation simpliste est loin d'être efficace, comme va le montrer la section suivante.

4.3 Un tableau de bits n'est pas une chaîne de bits

Cette section est consacrée à l'étude des opérateurs de croisement pour la représentation ci-dessus.

Tous les opérateurs de croisement seront représentés symboliquement comme sur la figure 3, qui montre les deux enfants d'un parent "noir" et d;un parent "blanc". La couleur des éléments des enfants indique de quel parent cet élément provient, indépendamment de la valeur 0 ou 1 du bit correspondant.

4.3.1 Les opérateurs 1D sont biaisés

Considérons tout d'abord les opérateurs génétiques classiques (voir section 3) applicables si l'on considère les génotypes décrit section 4.2 comme des chaînes de bits, les lignes du tableau étant mises bout à bout.

On remarque que les croisements à un point ou à deux points ne peuvent échanger que des bandes horizontales entre les parents : ces opérateurs sont biaisés. Les figures 3-a and 3-b illustrent ce phénomène. Une étude des *schémas* peut être trouvée dans [27, 25], détaillant ce problème. Par contre, le croisement uniforme, non représenté figure 3, ne présente pas ce biais.

4.3.2 Croisements bidimensionnels spécifiques

Croisement diagonal
Il s'agit d'une généralisation à deux dimensions du croisement à un point. Comme on peut le voir figure 3-c, la même ligne aléatoire sépare les deux parents, et les parties de génotypes de part et d'autre de cette ligne sont échangées.

Le croisement par blocs
Cet opérateur a été introduit dans [22]. Le domaine de travail est partagé par deux lignes horizontales et deux lignes verticales (tirées aléatoirement). Certains blocs ainsi définis sont échangés. La figure 3-d montre un exemple d'échange de deux blocs.

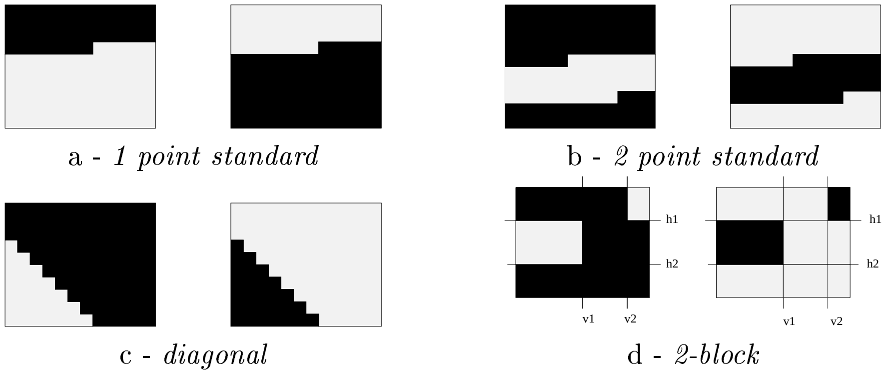


Figure 3: Exemples d'enfants de parents "noirs et blancs" obtenus par application de différents opérateurs de croisement.

4.3.3 Comparaison expérimentale

Les opérateurs de croisement décrits ci-dessus ont été expérimentalement comparés sur le problème de l'optimisation de la section droite d'une poutre (voir les détails dans [27, 25]). La conclusion sans appel est la confirmation de l'inadéquation des opérateurs monodimensionnels au problème : en termes de performances finales, les croisements bidimensionnels et le croisement uniforme sont nettement supérieurs.

A noter également que des opérateurs de mutation spécifiques au problème ont été développés [27, 25], mais apportant des améliorations beaucoup moins spectaculaires que les opérateurs de croisement ci-dessus, la mutation standard par inversion de bits ne souffrant pas de biais géométrique flagrant.

4.4 La fonction d'adaptation

Comme il a été décrit dans les grandes lignes en section 4.1, le calcul de l'adaptation d'un individu utilise la méthode des éléments finis sur la structure définie par le génotype courant. Une première étape obligatoire consiste donc en une analyse géométrique pour déterminer la structure.

4.4.1 Analyse géométrique

Tout d'abord, une *graine* de matière est imposée dans l'élément, ou les éléments, qui reçoivent le ou les chargements dynamiques. La composante connexe contenant ces graines est ensuite calculée (deux éléments sont considérés connectés s'ils partagent un côté. Il faut noter que aucun matériel n'est imposé sur la frontière encastrée du domaine initial, ĺa différence de l'approche décrite dans [10]. C'est le processus d'optimisation lui-même qui "choisit" oú fixer la structure le long de cette frontière, augmentant ainsi la flexibilité de l'approche. Par contre, un nombre plus important de structures pourront se retrouver déconnectées de cette frontière fixe, aboutissant à un problème mécanique irréaliste : un adaptation de 0 est automatiquement donnée à de telles structures, et elles disparaissent lors de la phase de sélection suivante.

Une autre difficulté surgit quant à la prise en compte du matériel présent dans le génotype, mais non connecté à la composante recevant le chargement (voir figure 2-b). Ces parties n'interviennent pas dans le comportement mécanique de la structure, mais il y a plusieurs manières de les traiter d'un point de vue AG :

- Ces composantes déconnectées peuvent simplement être ôtées définitivement du génotype, dans une approche lamarckienne de l'évolution. Mais ces composantes contiennent du matériel génétique qui peut être utile aux étapes ultérieures de l'évolution, et les supprimer augmente considérablement le risque de converger vers un optimum local.

- Ces composantes peuvent être seulement ignorées lors du calcul de l'adaptation. Mais cela introduit un niveau de dégénérescence élevé (de nombreux génotypes correspondent alors au même phénotype, et ont donc exactement la même adaptation. Et, comme signalé dans [34], l'AG s'en trouve pénalisé, n'ayant aucune direction préférable sur de tels larges plateaux de la fonction d'adaptation.

- Enfin, la fonction d'adaptation peut être modifiée pour favoriser la disparition de telles composantes : la méthode des éléments finis calcule le comportement de la structure seule, puis un terme pénalisant est ajouté en fonction des composantes non connectées détectées.

Cette dernière approche donne sans conteste les meilleurs résultats, et a été adoptée dans toute la suite. La forme exacte de la fonction d'adaptation est donnée dans la section suivante.

4.4.2 La fonction d'adaptation pénalisée

Pour chacun des cas de chargement, le comportement mécanique de la structure est calculé numériquement, utilisant le maillage ayant servi à définir le génotype. Divers critères ont été utilisés dans les travaux antérieurs pour prendre en compte ce comportement mécanique dans la fonction d'adaptation. La fonction objectif de la méthode d'homogénéisation est basée sur la *compliance*, ou travail des forces extérieures [2]. Cette fonction a l'avantage d'être différentiable, mais n'autorise pas un contrôle très fin du comportement mécanique, et oblige à procéder par essais-erreurs si l'on veut par exemple respecter des contraintes sur les déplacements maximaux de la structure. Les AGs n'ayant pas besoin de la différentiabilité de la fonction d'adaptation, nous allons considérer directement les contraintes sur les déplacements dans la fonction d'adaptation. Une comparaison détaillée des AGs et de la méthode d'homogénéisation utilisant le même fonction objectif peut être trouvée dans [26, 25].

Une autre approche, utilisée dans [10, 9], consiste à maximiser la *rigidité* de la structure. Mais là encore, cette fonction n'autorise pas un contrôle précis des déplacements ou des contraintes mécaniques. De plus, les études comparatives dans [25] ont montré expérimentalement que l'utilisation de cette fonction conduisait à des structures plus lourdes sans amélioration notable du comportement mécanique.

Nous avons choisi de considérer le problème sous l'angle de la minimisation du poids de la structure avec des contraintes portant sur les déplacements maximaux. Plusieurs méthodes ont été mises au point pour prendre en compte les contraintes dans les algorithmes évolutionnaires [32]. Toutefois, la méthode la plus utilisée reste la méthode de pénalisation, qui ne demande que la modification de la fonction d'adaptation. L'inconvénient de cette méthode est la difficulté qu'il peut y avoir à ajuster les coefficients de pénalisation (voir section 4.5). La fonction d'adaptation pénalisée est donnée par :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{A_{con} + \varepsilon A_{dis} + \alpha (D_{Max} - D_{Lim})^{+}} \tag{1}$$

oú A_{con} et A_{dis} sont les surfaces des composantes matérielles connectées et déconnectées ;
D_{Lim} est la valeur limite imposée pour le déplacement ;
D_{Max} est le déplacement maximal de la structure, calculé par simulation numérique ;
ε et α sont les paramètres de pénalisation (a^{+} est la partie positive de a).

Le paramétre ε comme α un paramètre de pénalisation, mais son importance est moins cruciale, et il restera fixé à 0.1 dans la suite.

4.5 Facteur de pénalisation

La mise au point du facteur de pénalisation α conditionne le succès de l'optimisation. Les inconvénients d'une valeur fixe sont bien connus [32] :

- Si α est trop petit, l'optimum de l'équation 1 ne respectera pas strictement les contraintes ;

- Si α est trop grand, la recherche se fera essentiellement dans la partie admissible de l'espace de recherche, interdisant des raccourcis à travers la partie non admissible, qui sont souvent essentiels en début d'optimisation.

Une idée naturelle est alors de faire varier α dynamiquement au cours de l'évolution, lui donnant des petites valeurs initialement pour favoriser l'exploration, puis l'augmentant ensuite pour assurer que la solution trouvée sera admissible. Après plusieurs essais [25], le schéma de variation retenu est un schéma géométrique, comme dans [23], oú α est multiplié par un facteur fixe (typiquement 1.0001) à chaque génération.

5 Résultats en élasticité linéaire

5.1 Conditions expérimentales et validation

L'approche a été validée sur des problèmes-test de plaques-consoles encastrées. Typiquement, pour le problème du cantilever 2×1, le domaine initial est discrétisé suivant un maillage régulier 64×44, et les paramètres suivants on été utilisés : une taille de population de 125, 2000 générations au maximum, croisement par blocs (voir section Section 4.3.2) avec une probabilité de 0.6, une probabilité de mutation de 0.1. Le temps de calcul moyen pour un essai, qui requiert environ 150 000 analyses éléments finis est de 12h sur une station de travail HP 755.

De plus, la comparaison avec les résultats de la méthode d'homogénéisation apportent également des arguments mécanique à notre approche : l'aspect général des solutions est le même, pour des poids et des déplacements maximaux très proches. Et un examen attentif des solutions obtenues par AG montre l'apparition de très nombreux petits trous éparpillés dans la structure. Or il est bien connu ([2]) que la solution optimale du problème est atteinte dans l'espace homogénéisé, c'est-à-dire par une structure comprenant une infinité de trous de taille infiniment petite : notre algorithme tente en quelque sorte de se rapprocher d'une telle solution.

Enfin, il ne faut pas oublier le caractère stochastique de la méthode utilisée. Il est donc nécessaire de tester sa robustesse par rapport à la population initiale. De fait, différentes expériences numériques ont donné des structures de poids et de comportements mécaniques semblables, mais montrant de petites variations de forme : le problème posé a probablement plusieurs solutions quasi-optimales. Afin de confirmer cette possibilité d'exhiber plusieurs solutions en cas de problème multi-modal, la problème test de base a été légèrement modifié [26, 25]. Et effectivement, des solutions de formes très différentes quoique de poids très voisins et respectant toutes les contraintes sur les déplacements ont été exhibées.

5.2 Chargements multiples

Les problèmes considérés pour la validation de l'approche AG ne mettaient en jeu qu'un unique chargement, et pouvaient par conséquent être obtenues par l'homogénéisation (par tâtonnements dirigés successifs en ce qui concerne les problèmes multi-modaux). Or il est clair que les structures sont en général construites pour plusieurs utilisations possibles, et doivent par conséquent être optimisées pour plusieurs cas de chargement.

5.2.1 Modification de la fonction d'adaptation

La prise en compte de cette nouvelle situation est très simple dans l'approche AG : pour chaque structure, une simulation numérique est effectuée pour chacun des cas de chargement, et la fonction d'adaptation est pénalisée par la somme des violations de contraintes :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{A_{con} + \varepsilon A_{dis} + \sum_{i=0}^{i=L} \alpha^i (D^i_{Max} - D^i_{Lim})^+} \qquad (2)$$

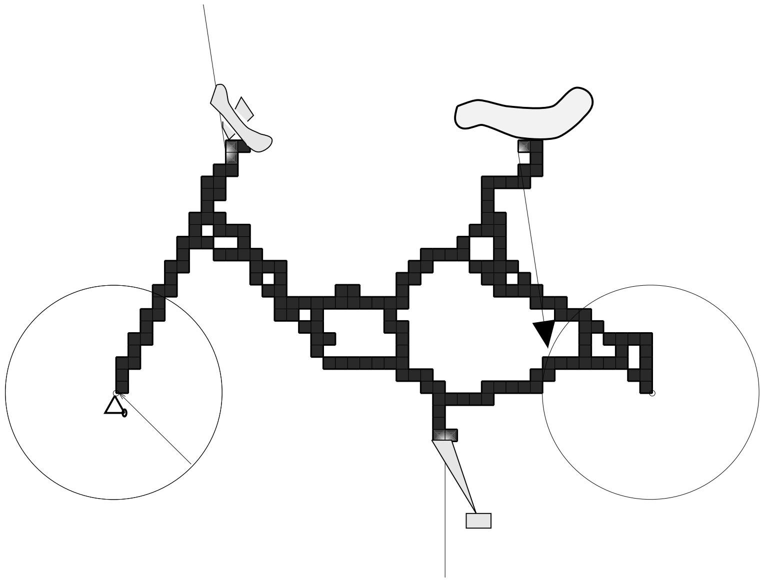


Figure 4: Le cadre de vélo optimisé pour les trois cas simultanément.

oú A_{con}, A_{dis} et ε sont comme dans l'équation 1;
D^i_{Lim} est la valeur limite pour le déplacement pour le cas de charge i;
D^i_{Max} est le déplacement maximal de la structure soumise au chargement i ;
α^i est le facteur de pénalisation pour la i^{eme} contrainte; tous les α^i sont ajustés dynamiquement (voir section 4.5).

Bien entendu, l'évaluation de l'adaptation d'une structure requiert L analyses par éléments finis, et augmente donc le coût calcul de la méthode.

5.2.2 L'exemple du vélo

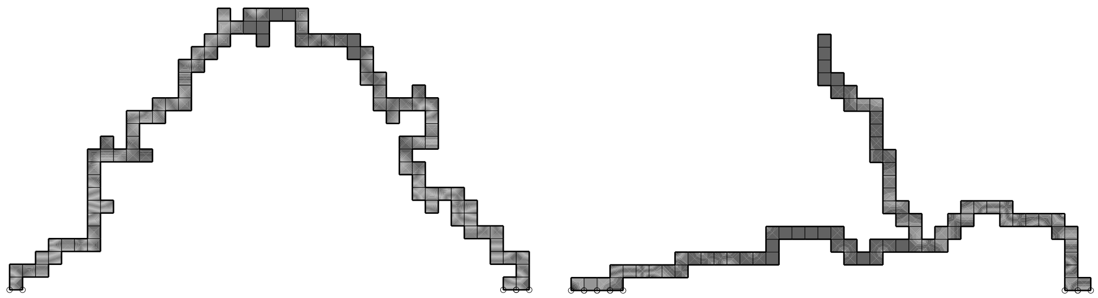
Une situation oú l'optimisation d'une structure doit certainement s'effectuer en considérant plusieurs cas de chargement est le cas du cadre de vélo. En fonction de la route, la position du cycliste et la répartition de ses efforts changent. Par souci de simplicité, seuls trois cas ont été envisagés : sur route plate, la plus grande force est appliquée sur la selle, en montée modérée, l'effort sur les pédales est plus important, et le cycliste tire sur le guidon, et enfin, dans l'ascension du Tourmalet, le cycliste est en position de "danseuse", ne touchant donc plus la selle.

La figure 4 est la solution du problème multi-chargement. Les différence avec les structures obtenues en ne considérant qu'un seul chargement justifient la prise en compte simultanée de tous les cas de chargement auxquels la structure risque d'être soumise.

A noter qu'une autre approche possible pour ce même problème est l'optimisation multi-critère. Il existe des variantes spécifiques des algorithmes évolutionnaires pour l'optimisation multi-critère [35, 39], dont le but est d'échantillonner la surface de Pareto du problème. A notre connaissance, une telle approche n'a pas encore été utilisée dans le cadre de l'optimisation topologique multi-chargement des formes.

5.3 Chargement sur la frontière inconnue

Tous les chargements considérés jusqu'à présent étaient appliqués sur la frontière – connue a priori – du domaine initial. Il existe des situations oú le chargement est appliqué uniformément sur toute une partie de la frontière finale de la structure, qui est au moins en partie inconnue a priori. C'est le cas d'une pression uniforme pour les problèmes d'optimisation de structures, ou de conditions d'échanges



(a) (b)

Figure 5: Optimisation du dôme sous-marin. (a) Pour une faible pression. (b) Pour une pression importante.

de chaleur dans le cadre de l'optimisation de formes de radiateurs [14].

Même dans le cadre de l'élasticité linéaire, une telle situation ne peut pas être prise en compte par la méthode d'homogénéisation, puisque la frontière oú s'applique la condition aux limites n'est pas connu durant le calcul (et est même quelquefois mal définie après). Par contre, ce cas rentre directement dans le cas général de l'optimisation par AGs, puisque la simulation numérique se fait sur la structure réelle, dont la frontière est parfaitement définie.

Considérons l'exemple de l'optimisation de la structure d'un dôme sous-marin. Une pression uniforme est appliquée sur toute la surface supérieure de la structure. Le choix de la contrainte matérielle est ici plus crucial que pour le problème de la plaque console : tout d'abord, une contrainte matérielle est imposée aux deux extrémités de la frontière inférieure, correspondant à la surface au sol que l'on veut protéger de la pression. Mais, sans aucune autre contrainte matérielle, la solution optimale est évidemment la structure plate, reliant ces deux points. Il semble donc légitime d'imposer également de la matière en un point haut de la structure. La figure (5-a) montre la solution - tout à fait satisfaisante - alors obtenue pour une faible pression. Par contre, lorsque l'on augmente la pression, on obtient des solutions ressemblant à la figure (5-b). Et de fait, cette solution est meilleure que la solution attendue (une structure 5-a renforcée).

6 Effets géométriques non-linéaires

Cette section présente les premiers résultats d'optimisation topologique des formes jamais obtenus, à notre connaissance, en dehors du strict cadre de l'élasticité linéaire. Le cadre retenu est toujours celui des contraintes planes, mais sans l'hypothèse des petits déplacements : les effets géométriques non-linéaires des grands déplacements sont pris en compte. Une description détaillée du modèle théorique peut être trouvée dans [11], et les détails du modèle numérique dans [24]. A noter que le matériau suit toujours une loi linéaire, mais que l'extension à tout type de matériau est évidente.

La méthode générale décrite section 4.1 est totalement indépendante du modèle mécanique utilisé pour la simulation du comportement de la structure. Les premiers essais ont donc consisté en un simple remplacement du modèle linéaire par le modèle en grands déplacements lors des analyses par éléments finis, et en utilisant la même fonction d'adaptation décrite par l'équation 1.

Les premiers résultats obtenus par cette méthode ressemblaient souvent à la structure représentée figure 6-b. Par comparaison, la figure 6-a est la solution du même problème dans le contexte linéaire. Il n'est nul besoin d'être un expert mécanicien pour se rendre compte que la solution 6-b est une catastrophe (et d'autres valeurs de F et D_{Lim} ont donné des résultats analogues). Un examen attentif des valeurs du module des contraintes mécaniques σ_{Max} dans cette structure confirma le problème :

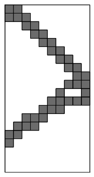
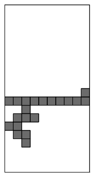
		
D_{Max}	0.022607	0.0199
σ_{Max}	0.076	0.77
$Area$	0.41	0.20
	(a): modèle des petits déplacements.	(b): modèle des grands déplacements.

Figure 6: Résultats optimaux désastreux pour le modèle des grands déplacements : Seules des contraintes sur les déplacements ont été imposées. $\mathcal{F} = 0.009$ and $D_{Lim} = 0.02285$.

ces valeurs sont très importantes, et le modèle de l'élasticité n'est plus valide.

Une première explication est que, dans le cadre non-linéaire, il n'y a plus unicité de la solution. De plus, sur des maillages relativement grossiers comme ceux utilisés ici, le champ de contrainte simulé va inévitablement présenter des singularités.

Cette constatation suggère d'incorporer à la fonction d'adaptation une contrainte sur la valeur maximale du champ de contraintes mécaniques. Bien sûr, cela va probablement éliminer, avec les structures non viables telles celle de la figure 6-b, certaines structures intéressantes. Mais elles devraient être remplacées par d'autres structures qui proches pour lesquelles la simulation numérique donnera une solution raisonnable. La fonction d'adaptation devient, suivant ce principe :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{A_{con} + \varepsilon A_{dis} + \alpha(D_{Max} - D_{Lim})^{+} + \alpha'(\sigma_{Max} - \sigma_{Lim})^{+}} \tag{3}$$

avec les mêmes notations que pour l'équation 1, et oú σ_{Lim} est la valeur limite imposée au champ de contraintes mécaniques, σ_{Max} la valeur maximale du module du champ de contraintes et α' le facteur de pénalisation (ajusté comme α, voir section 4.5).

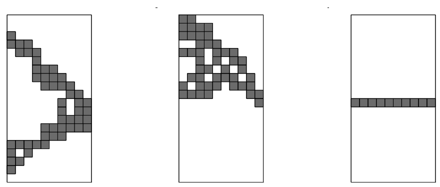
La figure 7 montre les résultats obtenus en utilisant cette fonction d'adaptation, pour différentes valeurs de F, le rapport $\frac{\mathcal{F}}{D_{Lim}}$ restant fixe (c'est-à-dire que tous ces problèmes seraient équivalents dans le cas linéaire). La valeur limite pour le champ de contraintes est calculée à partir du calcul dans le cas linéaire, et des solutions raisonnables sont obtenues. De plus, l'effet non-linéaire est clairement visible, les solutions représentées différant d'un cas à l'autre.

7 Conclusion

La faisabilité de l'approche AG pour le problème de l'Optimum Design avait déjà été attestée par les travaux de [22] et [10]. Ce papier a voulu insister sur la flexibilité de la méthode, et ses potentialités pour résoudre des cas de figures hors de portée des plus puissantes méthodes classiques.

La possibilité de trouver plusieurs solutions quasi-optimales, en utilisant les technique de spéciation comme par exemple l'heuristique de *partage* [16], permet de prendre en compte des critères difficiles à modéliser dans la fonction objectif (critères technologiques, esthétiques, ...).

Les résultats en multi-chargement de la section 5.2 étaient originaux au moment oú nous les avons obtenus. Les derniers résultats de la méthode d'homogénéisation [1] permettent d'obtenir des résultats similaires. Mais cela a nécessité des modifications en profondeur de l'algorithme numérique :



$\mathcal{F}$	0.009	0.018	0.09
D_{Lim}	0.22856	0.457	2.2856
σ_{Lim}	0.53	1.0622	5.3
D_{Max}	0.2143	0.4504	1.687
σ_{Max}	0.550	0.9835	4.379
$Area$	0.21	0.47	0.1

Figure 7: Structures optimales dans le modèle des grands déplacements.

la méthode effectue une optimisation locale dans chaque élément, qui était faite analytiquement dans le cas mono-chargement, et est effectuée numériquement dans le cas multi-chargement. La première conséquence est l'augmentation dramatique du temps-calcul, bien qu'il reste inférieur au temps nécessaire pour la méthode par AGs. Mais une comparaison réaliste des deux méthodes se doit de prendre en compte les coûts de développement. Et la flexibilité de l'approche AGs permet de réduire considérablement ces derniers lorsqu'une nouvelle variante d'un problème est abordée.

Enfin, même dans le cas linéaire, l'approche proposée est capable de résoudre des problèmes inaccessibles à la méthode d'homogénéisation, tel le dôme sous-marin de la section 5.3. De plus, cette application ne contient pas, du point de vue AG, de différence conceptuelle notable avec le cas général.

Mais le plus grand succès présenté ici est l'optimisation topologique de formes dans le contexte des grands déplacements. L'affirmation usuelle "L'extension à d'autres modèles mécaniques est immédiate" est, pour une fois, démontrée et validée. Ici encore, la base conceptuelle de la méthode est restée inchangée. Par contre, la fonction d'adaptation a du être modifiée en cours de route pour tenir compte des particularités du modèle : le "sens physique" est nécessaire pour mener à bien le couplage réussi entre les AGs et les problèmes réels.

Cependant, ces succès ne doivent pas faire perdre de vue le coût de la méthode. En particulier, il est impensable d'appliquer les mêmes techniques aujourd'hui à des maillages très fins, voire à des problèmes tridimensionnels. En effet, non seulement le coût d'une simulation numérique sera plus important, mais encore l'augmentation de la taille des chromosomes (tableaux de bits) imposera de choisir une taille de population plus importante, et rallongera le temps de convergence de l'algorithme. Nous sommes cependant convaincus qu'un choix plus habile de représentation devrait permettre de dépasser cette limitation. Et les premiers résultats des travaux en cours [36] sont plus qu'encourageants. Les avantages de la flexibilité de la méthode permettront alors d'obtenir des résultats sur des problèmes non résolus en optimisation topologique de formes.

Remerciements

Les auteurs tiennent à exprimer ici leurs plus sincères remerciements à François Jouve (CMAP) pour son aide et son soutien tout au long de ce travail.

References

[1] G. Allaire and F. Jouve. Personnal communication, 1996.

[2] G. Allaire and R. V. Kohn. Optimal design for minimum weight and compliance in plane stress using extremal microstructures. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 12(6):839–878, 1993.

[3] G. Anagnostou, E. Ronquist, and A. Patera. A computational procedure for part design. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 97:33–48, 1992.

[4] T. Bäck. *Evolutionary Algorithms in theory and practice.* New-York:Oxford University Press, 1995.

[5] T. Bäck, M. Schütz, and S. Khuri. A comparative study of a penalty function, a repair heuristic and stochastic operators with set covering problem. In J.-M. Alliot, E. Lutton, E. Ronald, M. Schoenauer, and D. Snyers, editors, *Artificial Evolution*, number 1063 in LNCS. Springer Verlag, 1995.

[6] T. Bäck and H.-P. Schwefel. An overview of evolutionary algorithms for parameter optimization. *Evolutionary Computation*, 1(1):1–23, 1993.

[7] M. Bendsoe and N. Kikushi. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71:197–224, 1988.

[8] J. Cea. Problems of shape optimum design. In E. J. Haug and J. Cea, editors, *Optimization of distributed parameter structures - Vol. II*, volume 50, pages 1005–1088. NATO Series, Series E, 1981.

[9] C. D. Chapman and M. J. Jakiela. Genetic algorithm-based structural topology design with compliance and topology simplification considerations. *Journal of Mechanical Design*, 1995. Submitted.

[10] C. D. Chapman, K. Saitou, and M. J. Jakiela. Genetic algorithms as an approach to configuration and topology design. *Journal of Mechanical Design*, 116:1005–1012, 1994.

[11] P. G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity, Vol I : Three-Dimensional Elasticity.* North-Holland, Amsterdam, 1978.

[12] P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems.* North-Holland, Amsterdam, 1988.

[13] D. B. Fogel. *Evolutionary Computation. Toward a New Philosophy of Machine Intelligence.* IEEE Press, Piscataway, NJ, 1995.

[14] C. Ghaddar, Y. Maday, and A. T. Patera. Analysis of a part design procedure. *Submitted to Nümerishe Mathematik*, 1995.

[15] D. E. Goldberg. *Genetic algorithms in search, optimization and machine learning.* Addison Wesley, 1989.

[16] D. E. Goldberg and J. Richardson. Genetic algorithms with sharing for multi-modal function optimization. In J. J. Grefenstette, editor, *Proceedings of the* 2^{nd} *International Conference on Genetic Algorithms*, pages 41–49. Lawrence Erlbaum Associates, 1987.

[17] D. E. Goldberg and M. Samtani. Engineering optimization via genetic algorithms. In *Proceedings of the ninth Conference on Electronic Computation*, pages 471–482. American Society of Civil Engineers, University of Alabama at Birmingham, 1986.

[18] D. Grierson and W. Pak. Discrete optimal design using a genetic algorithm. In M. Bendsoe and C. Soares, editors, *Topology Design of Structures*, pages 117–133. NATO Series, 1993.

[19] P. Hajela. *Optimization and Artificial Intelligence in Civil and Structural Engineering*, volume 1, chapter Genetic Algorithms in Automated Structural Synthesis, pages 639–653. Kluwer Academic Publishers, 1992.

[20] P. Hajela, E. Lee, and C. Lin. *Topology Design of Structures*, chapter Genetic Algorithms in Structural Topology Optimization. NATO Series, 1993.

[21] J. Holland. *Adaptation in natural and artificial systems.* University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.

[22] E. Jensen. *Topological Structural Design using Genetic Algorithms.* PhD thesis, Purdue University, November 1992.

[23] J.A. Joines and C.R. Houck. On the use of non-stationary penalty functions to solve nonlinear constrained optimization problems with GAs. In Z. Michalewicz, J. D. Schaffer, H.-P. Schwefel, D. B. Fogel, and H. Kitano, editors, *Proceedings of the First IEEE International Conference on Evolutionary Computation*, pages 579–584. IEEE Press, 1994.

[24] F. Jouve. *Modélisation mathématique de l'œil en élasticité non-linéaire*, volume RMA 26. Masson Paris, 1993.

[25] C. Kane. *Algorithmes génétiques et Optimisation topologique.* PhD thesis, Université de Paris VI, July 1996.

[26] C. Kane, F. Jouve, and M. Schoenauer. Structural topology optimization in linear and nonlinear elasticity using genetic algorithms. In *Proceedings of the ASME 21st Design Automation Conference.* ASME, Boston, Sept. 1995.

[27] C. Kane and M. Schoenauer. Genetic operators for two-dimensional shape optimization. In J.-M. Alliot, E. Lutton, E. Ronald, M. Schoenauer, and D. Snyers, editors, *Artificial Evolution*, number 1063 in LNCS. Springer Verlag, Septembre 1995.

[28] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt, and M. P. Vecchi. Optimization by simulated annealing. *Science*, 220:671–680, 1983.

[29] R. Leriche and R. T. Haftka. Optimization of laminate stacking sequence for buckling load maximization by genetic algorithms. *AIAA Journal*, 31(5):951–970, May 1993.

[30] C. Lin and P. Hajela. Genetic search strategies in large scale optimization. In *Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, La Jolla, CA, April 1993. AIAA paper #93-1585.

[31] Z. Michalewicz. *Genetic Algorithms+Data Structures=Evolution Programs.* Springer Verlag, New-York, 1996. 3rd edition.

[32] Z. Michalewicz and M. Schoenauer. Evolutionary Algorithms for Constrained Parameter Optimization Problems. *Evolutionary Computation*, 4(1), Spring 1996.

[33] N. J. Radcliffe. Equivalence class analysis of genetic algorithms. *Complex Systems*, 5:183–20, 1991.

[34] N. J. Radcliffe and P. D. Surry. Fitness variance of formae and performance prediction. In D. Whitley and M. Vose, editors, *Foundations of Genetic Algorithms 3*, pages 51–72. Morgan Kaufmann, 1994.

[35] D.J. Schaffer. Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithms. In J. J. Grefenstette, editor, *Proceedings of the* 1^{st} *International Conference on Genetic Algorithms.* Laurence Erlbaum Associates, 1985.

[36] M. Schoenauer. Representations for evolutionary optimization and identification in structural mechanics. In J. Périaux and G. Winter, editors, *Genetic Algorithms in Engineering and Computer Sciences*, pages 443–464. John Wiley, 1995.

[37] M. Schoenauer and Z. Wu. Discrete optimal design of structures by genetic algorithms. In Bernadou and al., editors, *Conférence Nationale sur le Calcul de Structures.* Hermes, 1993.

[38] H.-P. Schwefel. *Numerical Optimization of Computer Models.* John Wiley & Sons, New-York, 1981. 1995 – 2^{nd} edition.

[39] P.D. Surry, N.J. Radcliffe, and I.D. Boyd. A multi-objective approach to constrained optimization of gas supply networks. In T. Fogarty, editor, *Proceedings of the AISB-95 Workshop on Evolutionary Computing*, volume 993, pages 166–180. Springer Verlag, 1995.

[40] G. Syswerda. Uniform crossover in genetic algorithms. In J. D. Schaffer, editor, *Proceedings of the* 3^{rd} *International Conference on Genetic Algorithms*, pages 2–9. Morgan Kaufmann, 1989.

[41] Z. Wu. *Optimisations génétiques en Mécanique des Solides.* PhD thesis, Ecole Polytechnique, April 1996.