

Projet OPAHC

Ordre Partiel et Algèbre de Hopf en Combinatoire algébrique

Rapport d'activités de mi-parcours

Hugo MLODECKI

26 mai 2020

Introduction

La combinatoire algébrique consiste à appliquer de concepts algébriques (groupes, algèbres. . .) sur des objets combinatoires (permutations, arbres, graphes. . .) afin d'en comprendre plus amplement les propriétés. La compréhension de ces objets combinatoires peut permettre, entre autres, l'analyse fine des algorithmes de tri, de recherche et de rangement de données.

Dans mon travail, j'utilise un concept algébrique, nommé algèbre de Hopf, qui consiste à appliquer des algorithmes d'assemblages (produits) et de désassemblages (coproduits) à des structures combinatoires. Les algèbres de Hopf sont également munies d'une notion de dualité : l'échange du produit et du coproduit. Les questions liées à la dualité sont au cœur de ma recherche, qui se concentre sur l'étude d'algèbres de Hopf indexées par trois familles d'objets combinatoires : les permutations, les mots tassés et les fonctions de parking. Plus précisément, par une étude combinatoire fine de ces objets, nous obtenons de nouveaux résultats sur la dualité des algèbres de Hopf associées. Nous étudions donc trois algèbres de Hopf : **FQSym** définie par Malvenuto-Reutenauer [1] sur les permutations, **WQSym** définie par Hivert [2] sur les mots tassés et **PQSym** définie par Novelli-Thibon [3] sur les fonctions de parking. Une algèbre de Hopf est dite auto-duale, si elle est isomorphe (à une structure similaire) à elle-même après échange du produit et du coproduit. Pour prouver l'auto-dualité, on peut utiliser une approche combinatoire qui consiste à trouver une bijection explicite sur l'ensemble de base qui se traduit par un isomorphisme au niveau algébrique. C'est par exemple le cas pour **FQSym** où la bijection en question est simplement l'inversion des permutations. Sur les mots tassés et les fonctions de parking, l'inversion n'est pas définie, laissant ouverte la question d'un isomorphisme explicite.

En 2001, Duchamp-Hivert-Thibon [4] ont conjecturé que **WQSym** était auto-duale. En 2005, Foissy [5], à l'occasion de ses travaux sur les algèbres bidendriformes (qui possèdent une double structure en arbre), a démontré cette auto-dualité non seulement pour **WQSym**, mais aussi pour toutes les algèbres bidendriformes dont

PQSym. Le travail de Foissy, qui se fonde sur des bases d'*éléments totalement primitifs*, ne donne cependant pas un isomorphisme explicite.

Un des buts de ma thèse est d'obtenir un isomorphisme explicite de **WQSym** compatible avec la structure bidendriforme définie par Foissy. Les théorèmes algébriques qu'il a prouvés forment le socle de ma recherche. Ces théorèmes décrivent la rigidité de la structure bidendriforme et guident ainsi le travail initial combinatoire. Plus précisément, la structure rigide des algèbres bidendriformes permet de ramener la définition d'un isomorphisme entre deux algèbres bidendriformes à la définition d'un isomorphisme linéaire entre leurs parties totalement primitives. Si l'on a défini des bases d'éléments totalement primitifs, le problème devient donc un problème combinatoire où l'on cherche une bijection entre les index de ces bases.

Dans un premier papier [6], j'ai construit une base indexée par une nouvelle famille combinatoire appelée *forêts biplanes*, en bijection avec les mots tassés. Dans cette base, les éléments primitifs sont indexés par les arbres et les totalement primitifs par un certain sous-ensemble d'arbres. Ainsi, nous obtenons la première base explicite des éléments totalement primitifs de **WQSym**.

Depuis la soumission de ce premier papier, mes travaux de recherche m'ont conduit à la construction d'une autre base explicite des éléments totalement primitifs, cette fois dans **WQSym** duale. À partir de là, n'importe quel couplage des éléments de la base primale vers la base duale donne un isomorphisme. Cependant, nous cherchons à définir une bijection explicite qui ait un sens combinatoire, par exemple, car elle généraliserait aux mots tassés l'inversion des permutations.

Dans une première section, nous allons donner le contexte nécessaire à la compréhension des travaux présentés, c'est-à-dire la combinatoire des mots tassés et les notions algébriques associées. Dans une deuxième section nous donnons le détail d'un algorithme de décomposition des mots tassés et définissons les forêts biplanes qui découlent de cette décomposition. Cette partie entièrement combinatoire ne nécessite pas la maîtrise des concepts algébriques la motivant. C'est dans une troisième section que nous voyons l'utilisation de cette nouvelle famille d'objets pour construire de nouvelles bases algébriques et un isomorphisme explicite de **WQSym**. Enfin une quatrième et dernière section est consacrée au logiciel SageMath, utilisé et en partie développé par les membres de mon équipe. SageMath m'a permis de faire des expérimentations par rapport à mon sujet de thèse, comme par exemple vérifier la viabilité de nombre de mes conjectures.

1 Contexte

1.1 Combinatoire des mots tassés

Définition 1. Un mot sur l'alphabet $\mathbb{N}_{>0}$ est dit **tassé** si toutes les lettres de 1 à son maximum m apparaissent au moins une fois.

Définition 2. Le mot tassé $u := \text{pack}(w)$ associé au mot w sur l'alphabet $\mathbb{N}_{>0}$ est obtenu en numérotant les lettres des plus petites aux plus grandes.

Remarque 3. Un mot u est tassé si et seulement si $\text{pack}(u) = u$.

Exemple 4. Sur la droite, nous avons la décomposition du processus de tassement du mot 6182162. Nous obtenons alors $pack(6182162) = 3142132$ qui est un mot tassé.

6182162
 .1..1..
 .1.21.2
 31.2132
 3142132

Voici tous les mots tassés de tailles 1, 2 et 3 dans l'ordre lexicographique :

1, 11 12 21, 111 112 121 122 123 132 211 212 213 221 231 312 321

Nous allons utiliser les notations et opérations suivantes pour les mots sur $\mathbb{N}_{>0}$:

- Premièrement, $\max(w)$ représente la **lettre maximale** du mot w avec la convention que le maximum du mot vide $\max(\epsilon) = 0$. (ex $\max(414231) = 4$)
- Ensuite $|w|$ est la **taille** (ou longueur) du mot w . (ex $|414231| = 6$)
- La **concaténation** de deux mots u et v est désignée par $u \cdot v$. (ex $21 \cdot 31 = 2131$)
- De plus u/v (resp. $u \setminus v$) est la **concaténation décalée** à gauche (resp. à droite) des deux mots, où toutes les lettres du mot de gauche (resp. de droite) sont décalées du maximum de l'autre mot.
 ex $1121/3112 = 4454 \cdot 3112 = 44543112$ et
 ex $1121 \setminus 3112 = 1121 \cdot 5334 = 11215334$

Finalement le **produit de mélange** de deux mots est défini récursivement par :

$$u \sqcup \epsilon = \epsilon \sqcup u = u \tag{1}$$

$$ua \sqcup vb = (u \sqcup vb) \cdot a + (ua \sqcup v) \cdot b \tag{2}$$

où u et v sont des mots et a et b des lettres. De façon analogue à la concaténation décalée, il est possible de définir le **produit de mélange décalé** à droite $u \sqcap v$ où toutes les lettres du mot de droite v sont décalées du maximum du mot de gauche u .

Exemple 5. $12 \sqcap 11 = 12 \sqcup 33 = 1233 + 1323 + 1332 + 3123 + 3132 + 3312$.

Cette définition récursive (voir l'équation (2)) du produit de mélange contient deux termes. Nous les définissons donc comme deux **demi-produits** \prec et \succ :

$$ua \prec vb := (u \sqcup vb) \cdot a, \quad \text{et} \quad ua \succ vb := (ua \sqcup v) \cdot b. \tag{3}$$

1.2 L'algèbre WQSym

WQSym (pour *Word-quasisymmetric functions*) définie par Hivert [2] est l'algèbre de Hopf indexée par les mots tassés. Dans la littérature, un grand nombre de bases de **WQSym** ont été définies. Nous prenons comme point de départ algébrique la base \mathbb{R} (duale de \mathbb{Q} [7, Equation 23]). Le théorème 8 de Novelli-Thibon sert à justifier que le choix de ce point de départ est cohérent avec la proposition 9 et les théorèmes 10 et 11 structuraux de Foissy. Cette section 1.2 est extraite de l'article [6].

Définition 6.

We define $\prec, \succ, \Delta_\prec$ and Δ_\succ on $(\mathbf{WQSym})_+ = Vect(\mathbb{R}_u \mid u \in \mathbf{PW}_n, n \geq 1)$ in the following way : for all $u = u_1 \cdots u_n \in \mathbf{PW}_{n \geq 1}$ and $v \in \mathbf{PW}_{m \geq 1}$,

$$\mathbb{R}_u \prec \mathbb{R}_v := \sum_{w \in u \prec v} \mathbb{R}_w, \quad \text{and} \quad \mathbb{R}_u \succ \mathbb{R}_v := \sum_{w \in u \succ v} \mathbb{R}_w. \quad (4)$$

$$\Delta_\prec(\mathbb{R}_u) := \sum_{\substack{i=k \\ \{u_1, \dots, u_i\} \cap \{u_{i+1}, \dots, u_n\} = \emptyset \\ u_k = \max(u)}}^{n-1} \mathbb{R}_{\text{pack}(u_1 \cdots u_i)} \otimes \mathbb{R}_{\text{pack}(u_{i+1} \cdots u_n)}, \quad (5)$$

$$\Delta_\succ(\mathbb{R}_u) := \sum_{\substack{i=1 \\ \{u_1, \dots, u_i\} \cap \{u_{i+1}, \dots, u_n\} = \emptyset \\ u_k = \max(u)}}^{k-1} \mathbb{R}_{\text{pack}(u_1 \cdots u_i)} \otimes \mathbb{R}_{\text{pack}(u_{i+1} \cdots u_n)}. \quad (6)$$

Exemple 7.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{211} \prec \mathbb{R}_{12} &= \mathbb{R}_{21341} + \mathbb{R}_{23141} + \mathbb{R}_{23411} + \mathbb{R}_{32141} + \mathbb{R}_{32411} + \mathbb{R}_{34211}, \\ \mathbb{R}_{221} \succ \mathbb{R}_{12} &= \mathbb{R}_{21134} + \mathbb{R}_{21314} + \mathbb{R}_{23114} + \mathbb{R}_{32114}, \\ \Delta_\prec(\mathbb{R}_{2125334}) &= \mathbb{R}_{2123} \otimes \mathbb{R}_{112} + \mathbb{R}_{212433} \otimes \mathbb{R}_1, \\ \Delta_\succ(\mathbb{R}_{2125334}) &= \mathbb{R}_{212} \otimes \mathbb{R}_{3112}. \end{aligned}$$

Théorème 8. [3, Theorem 2.5] $((\mathbf{WQSym})_+, \prec, \succ, \Delta_\prec, \Delta_\succ)$ is a bidendriform bialgebra.

Proposition 9. Let A be a bidendriform bialgebra and let $p_1 \dots p_n \in \text{Prim}(A)$. Then the map

$$p_1 \otimes p_2 \otimes \dots \otimes p_n \mapsto p_1 \prec (p_2 \prec (\dots \prec p_n) \dots). \quad (7)$$

is an isomorphism of co-algebras from $T^+(\text{Prim}(A))$ (the non trivial part of the tensor algebra with deconcatenation as coproduct) to A . As a consequence, taking a basis $(p_i)_{i \in I}$ of $\text{Prim}(A)$, the family $(p_{w_1} \prec (p_{w_2} \prec (\dots \prec p_{w_n}) \dots))_w$ where $w = w_1 \dots w_n$ is a non empty word on I defines a basis of A . This implies the equality of Hilbert series $\mathcal{A} = \mathcal{P}/(1 - \mathcal{P})$.

Théorème 10 ([8, Theorem 5]). Let A be a bidendriform bialgebra. Then $\text{Prim}(A)$ is freely generated as a brace algebra by $\text{TPrim}(A)$ with brackets given by

$$\begin{aligned} \langle p_1, \dots, p_{n-1}; p_n \rangle &:= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-1-i} \\ &(p_1 \prec (p_2 \prec (\dots \prec p_i) \dots)) \succ p_n \prec ((\dots (p_{i+1} \succ p_{i+2}) \succ \dots) \succ p_{n-1}). \end{aligned}$$

Théorème 11 ([8, Theorem 2]). Let A be a bidendriform bialgebra. Then A is freely generated as a dendriform algebra by $\text{TPrim}(A)$.

2 Forêts biplanes décorées

Maintenant qu'on a donné le point de départ algébrique, nous allons exposer le travail purement combinatoire qui nous a permis d'obtenir les résultats algébriques recherchés et présentés en section 3. Dans cette section 2 nous présentons des résultats qui découlent d'une étude combinatoire avancée des mots tassés.

2.1 Décomposition des mots tassés

Le résultat principal de cette section 2.1 est le lemme 21 qui donne un algorithme de décomposition des mots tassés de façon bijective. Ce lemme et toutes les définitions qui le précèdent sont extraits de l'article [6].

Définition 12. A **global descent** of a packed word w is a position c such that all the letters before or at position c are greater than all letters after position c .

Exemple 13. The global descents of $w = 54664312$ are the positions 5 and 6. Indeed, all letters of 54664 are greater than the letters of 312 and this is also true for 546643 and 12.

Définition 14. A packed word w is **irreducible** if it has no global descent.

Lemme 15. *Each word w admits a unique factorization as $w = w_1/w_2/\dots/w_k$ such that w_i is irreducible for all i .*

Exemple 16. The global descent decomposition of 54664312 is 21331/1/12. The word $n \cdot n - 1 \cdot \dots \cdot 1$ has $1/1/\dots/1$ as global descent decomposition.

Définition 17. Fix $n \in \mathbb{N}$ and $w \in \mathbf{PW}_n$. We write $m := \max(w) + 1$. For any $p > 0$ and any subset $I \subseteq [1, \dots, n + p]$ of cardinality p , $\phi_I(w) = u_1 \dots u_{n+p}$ is the packed word of length $n + p$ obtained by inserting p occurrences of the letter m in w so that they end up in positions $i \in I$. In other words $u_i = m$ if $i \in I$ and w is obtained from $\phi_I(w)$ by removing all occurrences of m .

Exemple 18. $\phi_{2,4,7}(1232) = 1424324$ and $\phi_{1,2,3}(\epsilon) = 111$.

Let \mathbf{PW}_n^I denote the set of packed words of size n whose maximums are in positions $i \in I$. This way $\phi_I(w) \in \mathbf{PW}_{n+p}^I$.

Définition 19. Let $u, v \in \mathbf{PW}$ with $v \neq \epsilon$. Let (I, v') be the unique pair such that $v = \phi_I(v')$. We denote by I' the set obtained by adding $|u|$ to the elements of I . We define $u \blacktriangleright v = \phi_{I'}(u/v')$. In other words, we remove the maximum letter of the right word, perform a left shifted concatenation and reinsert the removed letters as new maximums.

Exemple 20. $2123 \blacktriangleright 322312 = \phi_{1+4,4+4}(43452212) = 4345622612$.

Lemme 21. *Soit w un mot tassé irréductible. Il existe une unique factorisation de la forme $w = u \blacktriangleright \phi_I(v)$ maximisant la taille de u . Dans cette factorisation*

- soit $v = \epsilon$ et $I = [1, \dots, p]$ pour un p donné ;
- soit la factorisation $v = v_1/\dots/v_r$ de v en irréductibles satisfait les inégalités $i_1 \leq |v_1|$, et $(\sum |v_i| + |I|) + 1 - i_p \leq |v_r|$.

Exemple 22. Voici un premier exemple détaillé de décomposition d'un mot tassé irréductible selon le lemme 21 :

Soit $w = 543462161$ un mot tassé irréductible (voir définition 14).

- La première étape est de retirer toutes les occurrences de la valeur maximale en conservant en mémoire leurs positions initiales dans le mot. On obtient $w' = 5434.21.1$ qui reste un mot tassé, mais plus forcément irréductible.
- La deuxième étape est de décomposer ce nouveau mot w' en facteurs irréductibles (voir le lemme 15) $w' = 1/212/.1/1.1$, en conservant toujours en mémoire les positions des valeurs retirées.
- On peut distinguer deux groupes de facteurs, ceux strictement avant le premier maximum retiré $w' = 1/212/.1/1.1$ et les autres $w' = 1/212/.1/1.1$.

- Enfin, en numérotant les positions de la valeur maximale retirée dans le groupe des facteurs de droite (positions 1 et 4), on obtient la décomposition de w suivante (voir définition 17 pour ϕ et définition 19 pour \blacktriangleright) :
 $w = 543462161 = (1/212) \blacktriangleright \phi_{1,4}(1/11) = (3212) \blacktriangleright \phi_{1,4}(211)$.

Exemple 23. Voici quelques autres exemples :

$$\begin{aligned} 213331 &= 1 \blacktriangleright \phi_{2,3,4}(11)1231 = \epsilon \blacktriangleright \phi_3(121) \\ 1233 &= 12 \blacktriangleright \phi_{1,2}(\epsilon) \quad 111 = \epsilon \blacktriangleright \phi_{1,2,3}(\epsilon) \end{aligned}$$

Depuis la soumission de l'article [6], j'ai défini une nouvelle décomposition duale. Là où ϕ ajoute une nouvelle valeur maximale à certaines positions, ψ^α va ajouter une certaine valeur à la dernière position.

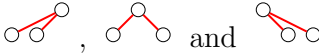
Exemple 24. En voici quelques exemples non détaillés :

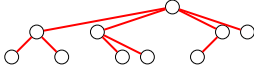
$$\begin{aligned} 233312 &= 1 \blacktriangledown \psi_1^\bullet(1222) & 1231 &= \epsilon \blacktriangledown \psi_1^\bullet(123) \\ 24113 &= 11 \blacktriangledown \psi_2^\circ(12) & 111 &= \epsilon \blacktriangledown \psi_1^\bullet(11) \\ 654623314 &= (122/1) \blacktriangledown \psi_1^\bullet(3213) = (2331) \blacktriangledown \psi_1^\bullet(3213) \end{aligned}$$

2.2 Forêts biplanes décorées à partir de décompositions

Nous allons à présent appliquer récursivement la décomposition du lemme 21 pour construire une bijection entre les mots tassés et une certaine famille de forêts biplanes décorées (voir définition 25). La définition 28 sera celle de la bijection, illustrée par l'exemple 29 détaillé. La définition 30 sera une caractérisation de la famille de forêts mentionnée ci-dessus, que nous appellerons forêts tassées.

Définition 25. An unlabeled **biplane tree** is an ordered tree (sometimes also called a planar) whose children are organized in a pair of two (possibly empty) ordered forests, which we call the left and right forests.

Exemple 26. The biplane trees  are different. Indeed in the first case, the left forest contains two trees and the right forest is empty, in the second case both forests contain exactly one tree while in the third case we have the opposite of the first case. Here is an example of a bigger biplane tree where the root has two

trees in both left and right forests .

In our construction we will deal with labeled biplane trees where the labels are sorted lists of positive integer. For a labeled biplane tree, we denote by $\text{Node}(x, f_\ell, f_r)$ the tree whose root is labeled by x and whose left (resp. right) forest is given by f_ℓ (resp. f_r). We also denote by $[t_1, \dots, t_k]$ a forest of k trees.

Exemple 27. $\text{Node}((1), [], []) = \textcircled{1}$, and $\text{Node}((1, 3), [], [\text{Node}((1), [], [])]) = \textcircled{1,3} \textcircled{1}$.

We now apply recursively the decompositions of lemmes 15 et 21 to get an algorithm which takes a packed word and returns a biplane forest where nodes are decorated by lists of integers :

Définition 28. The forest $F(w)$ (resp. tree $T(w)$) associated to a packed word (resp. a non empty irreducible packed word) w are defined in a mutual recursive way as follows :

- $F(\epsilon) = []$ (empty forest),
- for any packed word w , let $w_1/w_2/\dots/w_k$ be the global descent decomposition of w , then $F(w) := [T(w_1), T(w_2), \dots, T(w_k)]$.
- for any non empty irreducible packed word w , we define $T(w) := \text{Node}(I, F(u), F(v))$ where $w = u \blacktriangleright \phi_I(v)$ and u is of maximal length.

Exemple 29. Soit $w = 876795343912$, la décomposition en irréductible du lemme 15 nous donne $w = w_1/w_2$ avec $w_1 = 6545731217$ et $w_2 = 12$.

Nous décomposons à présent w_1 et w_2 selon le lemme 21 :

$$w_1 = 6545731217 = 3212 \blacktriangleright \phi_{1,6}(3121) \quad \text{et} \quad w_2 = 12 = 1 \blacktriangleright \phi_1(\epsilon).$$

En appliquant l'algorithme de la définition 28, nous obtenons :

$$\begin{aligned} F(876795343912) &= [T(6545731217), T(12)] \\ &= [\text{Node}((1, 6), F(3212), F(3121)), \text{Node}((1), F(1), F(\epsilon))] \\ &= \end{aligned}$$

Nous appliquons récursivement la définition 28 sur $F(3212)$, $F(3121)$, $F(1)$ et $F(\epsilon)$, ce qui nous donne finalement :

$$F(876795343912) =$$

Comme nous pouvons le constater dans cet exemple, afin de simplifier les notations, nous n'écrivons pas les décorations quand c'est la liste 1.

We now characterize the trees obtained this way :

Définition 30. Let t be a labeled biplane tree. We write $t = \text{Node}(I, f_\ell, f_r)$ where $I = [i_1, \dots, i_p]$, $f_\ell = [\ell_1, \dots, \ell_g]$ and $f_r = [r_1, \dots, r_d]$, which is depicted as follows :

$$t = \begin{array}{c} \textcircled{I} \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ \ell_1 \quad \dots \quad \ell_g \quad r_1 \quad \dots \quad r_d \end{array} .$$

The *weight* of t is recursively defined by $\omega(t) = p + \sum_{i=0}^g \omega(\ell_i) + \sum_{j=0}^d \omega(r_j)$. In particular, if t is a leaf then $\omega(t) = p$. The *right-weight* of t is defined by $\omega_r(t) = p + \sum_{j=0}^d \omega(r_j)$. We say that t is a **packed tree** if it satisfies :

- If there are no right children ($d = 0$) then $i_k = k$ for all k .
- Otherwise :
$$\begin{cases} 1 \leq i_1 \leq \omega(r_1), \\ 1 \leq \omega_r(t) + 1 - i_p \leq \omega(r_d). \end{cases} \quad (8)$$
- f_ℓ and f_r are packed forests (*i.e.* lists of packed trees).

Exemple 31.

There is a unique packed forest of weight 1, namely \circ , here are the packed forests of weight 2 : $\circ \circ$, $\circ \circ$, $\circ \circ$. We show below the packed forests of weight 3 :



Nous ajoutons des notations :

- \mathfrak{F}_n pour les forêts tassées de poids n ,
- \mathfrak{T}_n pour les arbres tassés de poids n ,
- \mathfrak{P}_n pour les arbres tassés de poids n dont la forêt gauche est vide.

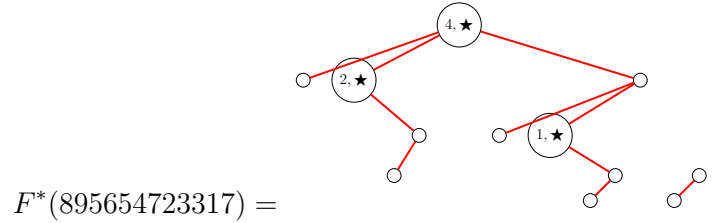
Le théorème 32 est une généralisation de l'article [8], concernant **FQSym** et les permutations, à **WQSym** et les mots tassés.

Théorème 32. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons les trois égalités suivantes :*

$$\dim(\mathbf{WQSym}_n) = \#\mathfrak{F}_n \quad \text{and} \quad \dim(\text{Prim}_n) = \#\mathfrak{T}_n \quad \text{and} \quad \dim(\text{TPrim}_n) = \#\mathfrak{P}_n$$

De la même façon que dans l'exemple 24, une autre famille de forêts biplanes représente la décomposition duale. En voici un exemple non détaillé.

Exemple 33.



3 Isomorphisme bidendriforme

Grâce au théorème 32, nous avons des objets combinatoires qui sont en bijection avec les sous-ensembles primitifs et totalement primitifs de **WQSym**. Nous pouvons alors construire deux nouvelles bases \mathbb{P} et \mathbb{O} de **WQSym** et **WQSym** duale.

3.1 La base \mathbb{P}

Dans cette base \mathbb{P} de l'algèbre **WQSym** définie dans l'article [6], les arbres particuliers de \mathfrak{P} indexent les éléments totalement primitifs, les arbres de \mathfrak{T} indexent les éléments primitifs et enfin les forêts de \mathfrak{F} indexent tous les éléments de l'algèbre.

Définition 34. Soit $t_1, \dots, t_k \in \mathfrak{T}$ et $f_l = [\ell_1, \dots, \ell_g]$, $f_r \in \mathfrak{F}$,

$$\mathbb{P}_{\circ} := \mathbb{R}_1, \tag{9}$$

$$\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_k} := \mathbb{P}_{t_k} \prec (\mathbb{P}_{t_{k-1}} \prec (\dots \prec \mathbb{P}_{t_1}) \dots), \tag{10}$$

$$\mathbb{P}_{\text{Node}(I, \cdot, f_r)} := \Phi_I(\mathbb{P}_{f_r}), \tag{11}$$

$$\mathbb{P}_{\text{Node}(I, f_l = [\ell_1, \dots, \ell_g], f_r)} := \langle \mathbb{P}_{l_1}, \mathbb{P}_{l_2}, \dots, \mathbb{P}_{l_g}; \Phi_I(\mathbb{P}_{f_r}) \rangle. \tag{12}$$

Exemple 35.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P} \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \searrow \\ \circ \quad \circ \\ \swarrow \searrow \\ \circ \quad \circ \end{array} &= \mathbb{P} \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \\ \circ \end{array} \prec \mathbb{P} \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \searrow \\ \circ \quad \circ \\ \swarrow \searrow \\ \circ \quad \circ \end{array} \\
&= (\mathbb{P}_\circ \prec \mathbb{P}_\circ - \mathbb{P}_\circ \succ \mathbb{P}_\circ) \prec \Phi_{1,3}(\mathbb{P}_\circ) \\
&= \mathbb{R}_{14342} + \mathbb{R}_{41342} + \mathbb{R}_{43142} + \mathbb{R}_{43412} - \mathbb{R}_{24341} - \mathbb{R}_{42341} - \mathbb{R}_{43241} - \mathbb{R}_{43421}
\end{aligned}$$

Théorème 36. Pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$

$(\mathbb{P}_f)_{f \in \mathfrak{F}_n}$ est une base de \mathbf{WQSym}_n , $(\mathbb{P}_t)_{t \in \mathfrak{P}_n}$ est une base de \mathbf{TPrim}_n .

$(\mathbb{P}_t)_{t \in \mathfrak{T}_n}$ est une base de \mathbf{Prim}_n ,

3.2 La base \mathbb{O}

Encore une fois, comme dans les exemples 24 et 29, mon travail a avancé du côté dual. J'ai donc, de façon duale à la base \mathbb{P} , défini une nouvelle base \mathbb{O} s'appuyant sur la décomposition arborescente duale des mots tassés. Nous pouvons remarquer que la seule différence entre les définitions 34 et 37 se trouve entre les équations (11) et (15). Cette base \mathbb{O} de \mathbf{WQSym}^* étant la base duale de la base \mathbb{P} , de la même façon, les arbres et forêts de respectivement \mathfrak{P}^* , \mathfrak{T}^* et \mathfrak{F}^* indexent les éléments totalement primitifs, les éléments primitifs et tous les éléments de l'algèbre.

Définition 37. Soit $t_1, \dots, t_k \in \mathfrak{T}^*$ et $f_l = [\ell_1, \dots, \ell_g]$, $f_r \in \mathfrak{F}^*$,

$$\mathbb{O}_\circ := \mathbb{Q}_1, \quad (13)$$

$$\mathbb{O}_{t_1, \dots, t_k} := \mathbb{O}_{t_k} \prec (\mathbb{O}_{t_{k-1}} \prec (\dots \prec \mathbb{O}_{t_1}) \dots), \quad (14)$$

$$\mathbb{O}_{\text{Node}(i^\alpha, [], f_r)} := \Psi_i^\alpha(\mathbb{O}_{f_r}), \quad (15)$$

$$\mathbb{O}_{\text{Node}(i^\alpha, f_l=[\ell_1, \dots, \ell_g], f_r)} := \langle \mathbb{O}_{\ell_1}, \mathbb{O}_{\ell_2}, \dots, \mathbb{O}_{\ell_g}; \Psi_i^\alpha(\mathbb{O}_{f_r}) \rangle. \quad (16)$$

Exemple 38.

$$\begin{aligned}
\mathbb{O} \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \searrow \\ \circ \quad \circ \\ \swarrow \searrow \\ \circ \quad \circ \end{array} &= \mathbb{O} \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \\ \circ \end{array} \prec \mathbb{O} \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \searrow \\ \circ \quad \circ \\ \swarrow \searrow \\ \circ \quad \circ \end{array} \\
&= (\mathbb{O}_\circ \prec \mathbb{O}_\circ - \mathbb{O}_\circ \succ \mathbb{O}_\circ) \prec \Psi_2^\bullet(\mathbb{O} \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \\ \circ \end{array}) \\
&= \mathbb{Q}_{34122} + \mathbb{Q}_{24133} + \mathbb{Q}_{14233} - \mathbb{Q}_{43122} - \mathbb{Q}_{42133} - \mathbb{Q}_{41233} - \mathbb{Q}_{34212} \\
&\quad - \mathbb{Q}_{24313} - \mathbb{Q}_{14323} + \mathbb{Q}_{43212} + \mathbb{Q}_{42313} + \mathbb{Q}_{41323}
\end{aligned}$$

Théorème 39. Pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$

$(\mathbb{O}_f)_{f \in \mathfrak{F}_n^*}$ est une base de \mathbf{WQSym}_n , $(\mathbb{O}_t)_{t \in \mathfrak{P}_n^*}$ est une base de \mathbf{TPrim}_n .

$(\mathbb{O}_t)_{t \in \mathfrak{T}_n^*}$ est une base de \mathbf{Prim}_n ,

3.3 La bijection

Les théorèmes algébriques de la section 1.2 nous imposent toute la partie non totalement primitive de la bijection entre les bases \mathbb{P} et \mathbb{O} . Il nous reste à trouver une bijection entre les arbres particuliers de \mathfrak{P} et \mathfrak{P}^* pour avoir un isomorphisme bidendriforme de \mathbf{WQSym} .

Rappelons que comme ces deux sous-ensembles sont déterminés, n'importe quelle bijection, même arbitraire, répond à la question d'un point de vue algébrique. Cependant nous souhaitons avoir un algorithme explicite et qui ait un sens combinatoire clair, par exemple en généralisant l'inversion des permutations. Nous avons des pistes très prometteuses dans ce sens que nous sommes en train d'explorer.

4 Utilisation de SageMath pour ma recherche

4.1 Deux tickets SageMath

J'ai eu besoin d'implanter un ticket SageMath (*ticket #25916 implement Packed Words*) sur les mots tassés qui sont les objets combinatoires que j'utilise le plus. J'ai travaillé sur ce code en collaboration avec Aaron Lauve de Loyola University Chicago. Ces 2000 lignes de code devraient être intégrées à SageMath, mais quelques modifications mineures et relectures sont encore nécessaires avant que ce ticket soit validé.

Actuellement quelques bases de **WQSym** sont déjà présentes dans SageMath. Le but de mon deuxième ticket SageMath (*ticket #25930 implementation of different basis of WQSym*) est l'implantation de plusieurs bases de l'algèbre, prioritairement celles servant à l'isomorphisme bidendriforme dont j'ai parlé dans ce rapport (\mathbb{R} , \mathbb{Q} , \mathbb{P} et \mathbb{O}).

4.2 Du code personnel

En plus de ces deux tickets, pour compléter cette boîte à outils, j'ai codé environ 3000 lignes pour m'aider à : trier nombre de mes conjectures, réaliser en une seule commande certains calculs algébriques et combinatoires, générer du code *tiks* pour l'affichage L^AT_EX de mes arbres biplans décorés (voir exemples 29 et 33).

L'utilisation de toutes ces lignes n'apparaît pas dans ce rapport mais sont utiles pour : faire des calculs de séries génératrices, générer des ordres partiels sur les mots tassés, faire des calculs sur les fonctions de parking.

Conclusion

Ce travail présente des résultats combinatoires sur les mots tassés qui ont permis de résoudre des questions algébriques ouvertes (théorèmes 36 et 39).

Mon but initial, qui est de construire un isomorphisme bidendriforme explicite de **WQSym** à sa duale, est atteint. Cependant il reste à trouver une bijection qui s'exprime clairement d'un point de vue combinatoire en généralisant l'inversion des permutations.

Par ailleurs nous espérons que cette étude de **WQSym** nous permettra de mieux comprendre la structure bidendriforme de façon générale en déterminant ce qui est

spécifique à la combinatoire des mots tassés et ce qui est commun aux algèbres bidendriformes. En particulier nous souhaitons étudier l'algèbre **PQSym** sur les fonctions de parking, que l'on sait être bidendriforme [3], et donc auto-duale, mais pour laquelle aucun isomorphisme explicite n'est connu.

Références

- [1] C. Malvenuto and C. Reutenauer, “Duality between Quasi-Symmetrical Functions and the Solomon Descent Algebra,” *J. of Algebra*, vol. 177, no. 3, pp. 967–982, 1995.
- [2] F. Hivert, *Combinatoire des fonctions quasi-symétriques*. PhD thesis, Informatique fondamentale Université de Marne-la-Vallée, 1999.
- [3] J. C. Novelli and J. Y. Thibon, “Polynomial realizations of some trialgebras,” 2006.
- [4] G. Duchamp, F. Hivert, and J. Y. Thibon, “Noncommutative symmetric functions vi : Free quasi-symmetric functions and related algebras,” 2001.
- [5] L. Foissy, “Bidendriform bialgebras, trees, and free quasi-symmetric functions,” *Journal of Pure and Applied Algebra*, vol. 209, no. 2, p. 439–459, 2007.
- [6] H. Mlodecki, “Basis of totally primitive elements of WQSym,” *FPSAC 2020 (Formal Power Series and Algebraic Combinatorics)*, 2020.
- [7] N. Bergeron and M. Zabrocki, “The Hopf algebras of symmetric functions and quasisymmetric functions in non-commutative variables are free and cofree,” 2005.
- [8] L. Foissy, “Primitive elements of the Hopf algebra of free quasi-symmetric functions,” *Contemporary Mathematics Combinatorics and Physics*, p. 79–88, 2011.

Mlodecki Hugo

45 Rue Jacob
75006 Paris France
☎ +33 6 81 79 72 58
✉ hugo.mlodecki@gmail.com

Formation

- 2018–2020 **Thèse au LRI**, Sous la direction de Florent Hivert et Viviane Pons, Orsay.
- 2017–2018 **Stage au LRI**, Sous la direction de Florent Hivert et Viviane Pons, Orsay.
- 2017–2018 **Double diplôme**, Université Paris-Saclay, Master Fondements de l'Informatique et Ingénierie du Logiciel (FILL), Orsay.
- 2015–2018 **École d'ingénieur**, École Nationale Supérieure d'Informatique pour l'Industrie et l'Entreprise ENSIIE (ex IIE) associée à l'institut Mines Telecom., Évry.
Enseignement spécialisé en informatique, math, finance et gestion d'entreprise.

Articles, exposés et autres travaux de recherche

- En cours Rédaction d'une version longue de *Basis of totally primitive elements of WQSym* (extended abstract) avec des résultats supplémentaires sur la dualité
- Article accepté pour une présentation Poster à la Conférence internationale FPSAC 2020 (Formal Power Series and Algebraic Combinatorics) *Basis of totally primitive elements of WQSym*
- Développement Mots tassés en collaboration avec Aaron Lauve de Loyola University Chicago (ticket #25916 implement Packed Words)
- SageMath Bases de l'algèbre WQSym (ticket #25930 implementation of different basis of WQSym)
- Exposés Séminaire combinatoire du Plateau de Saclay organisé par les équipes de Combinatoire du LIX et GALaC (plusieurs présentations)
Séminaire de l'équipe de combinatoire algébrique du LIGM, Univ. Gustave Eiffel (Marne-la-Vallée) (plusieurs présentations)
Séminaire de l'IRIF todo (à venir)
- Exposés à l'étranger Séminaire doctorants de l'UQAM (Université du Québec à Montréal)
Séminaire d'équipe à York University (Toronto)
Séminaire AGDM à Institute of Discrete Mathematics and Geometry à Vienne

Enseignement

- 2019-2020 Introduction à l'informatique (Info 111), L1 Université Paris-Saclay
Principes d'Interprétation des Langages (PIL/Info 222), L2 Université Paris-Saclay
Aide sur Premier Langage dans la continuité de l'année précédente
- 2019-2020 Programmation Impérative (Info 121), L1 Université Paris-Saclay
Principes d'Interprétation des Langages (PIL/Info 222), L2 Université Paris-Saclay
Conception et mise en production d'exercices en ligne sur Premier Langage

Formations scientifiques disciplinaires

- 25 heures Ecole des jeunes chercheurs en informatique mathématique Pierre Guillon Aix-Marseille
- À venir VII Encuentro Colombiano De Combinatoria (ECCO) en Colombie (si réalisable)

Formations transverses

- 7 heures Les bases pour le doctorant-Enseignant débutant (session 15) (12 novembre 2018 - 12 novembre 2018) Université Paris-Saclay
- 7 heures Retour d'expériences sur l'enseignement à l'Université (06 juin 2019) Campus universitaire d'Orsay
- À valider Sage days 107: Outils logiciels pour les mathématiques et l'illustration