Auto-dualité de WQSym, l'agèbre de Hopf sur les mots tassés

Hugo Mlodecki

Directeurs de thèse :
Florent Hivert
Viviane Pons

9 octobre 2018

Sommaire

Permutations

Définition

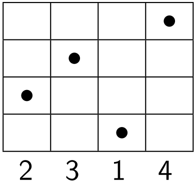
Une permutation de taille n est un mot sur l'alphabet $\{1, 2, ..., n\}$ où chaque lettre apparaît exactement une fois.

Permutations

Définition

Une permutation de taille n est un mot sur l'alphabet $\{1, 2, ..., n\}$ où chaque lettre apparaît exactement une fois.

Une représentation :

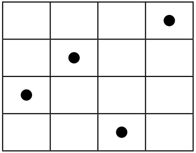


Permutations

Définition

Une permutation de taille n est un mot sur l'alphabet $\{1, 2, ..., n\}$ où chaque lettre apparaît exactement une fois.

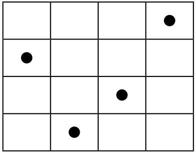
Une représentation :



2 3 1 4

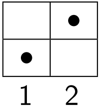
→ transposition →

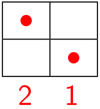
→ inversion →



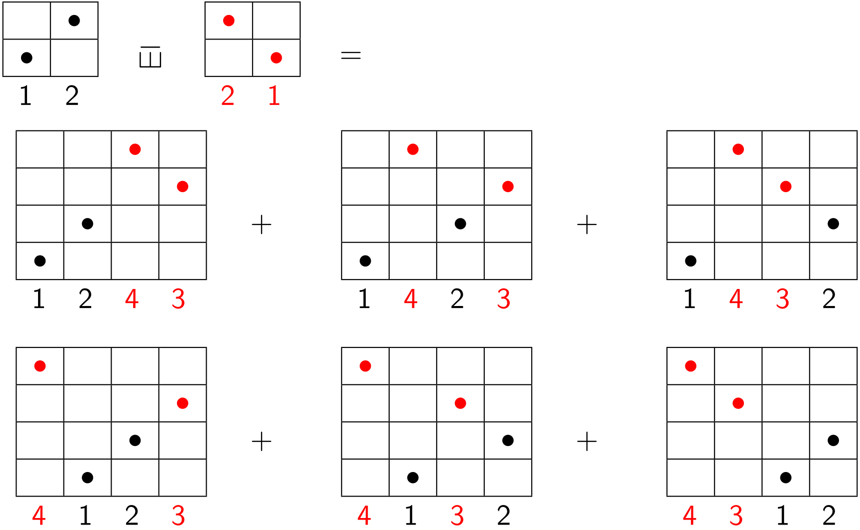
3 1 2 4

Produit

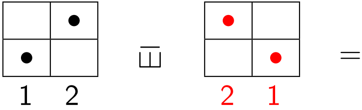




Produit de mélange

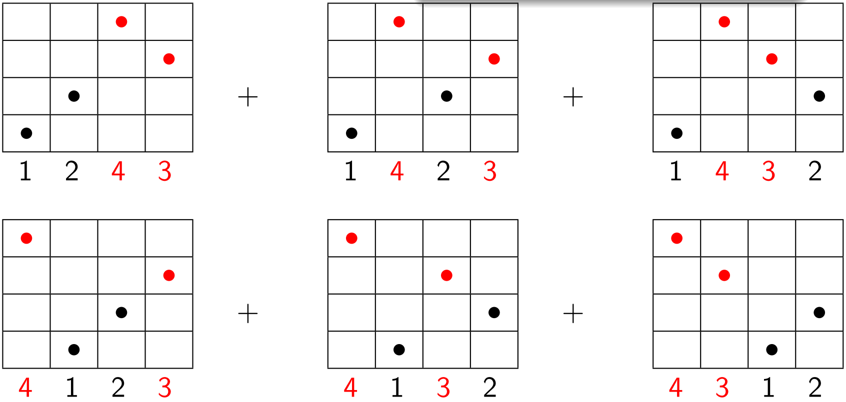


Produit de mélange



$\mathbb{F}$

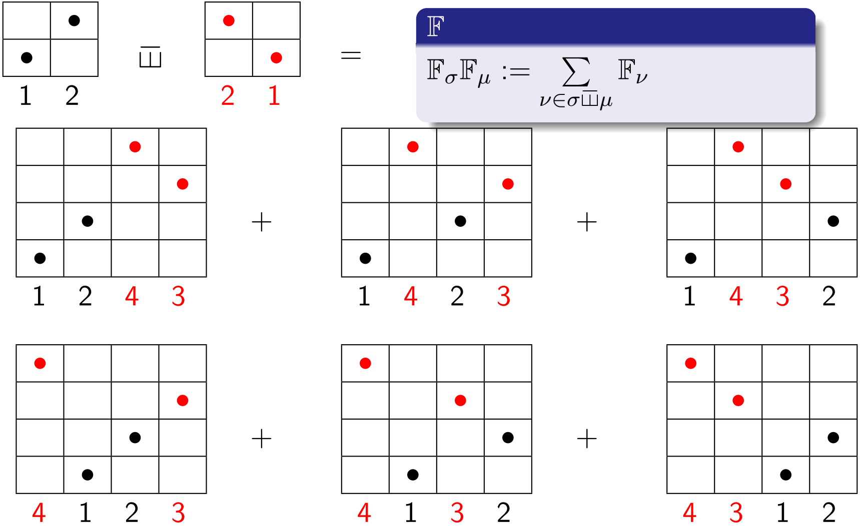
$\mathbb{F}_{12}\mathbb{F}_{21} = \mathbb{F}_{1243} + \mathbb{F}_{1423} + \mathbb{F}_{1432} + \mathbb{F}_{4123} + \mathbb{F}_{4132} + \mathbb{F}_{4312}$



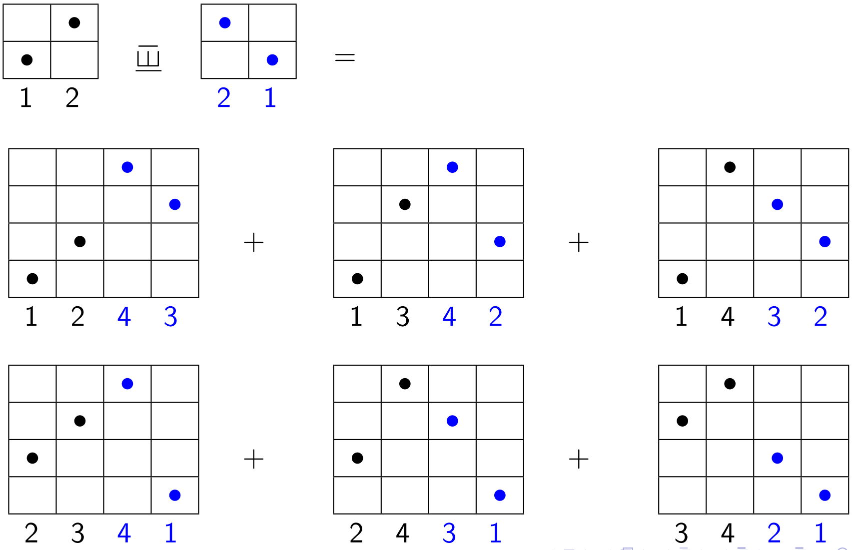
Produit de mélange

$\mathbb{F}$

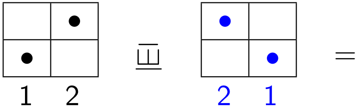
$$\mathbb{F}_\sigma \mathbb{F}_\mu := \sum_{\nu \in \sigma \overline{\sqcup\!\sqcup} \mu} \mathbb{F}_\nu$$



Produit de mélange sur les valeurs

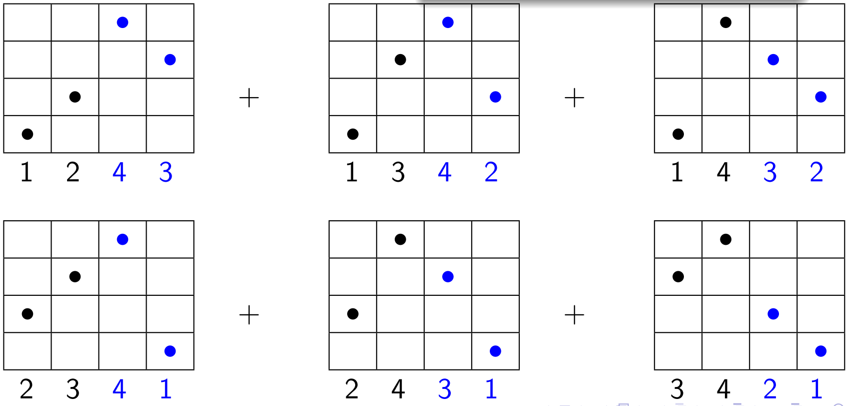


Produit de mélange sur les valeurs

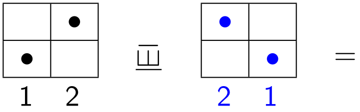


𝔾

$$\mathbb{G}_{12}\mathbb{G}_{21} = \mathbb{G}_{1243} + \mathbb{G}_{1342} + \mathbb{G}_{1432} + \mathbb{G}_{2341} + \mathbb{G}_{2431} + \mathbb{G}_{3421}$$

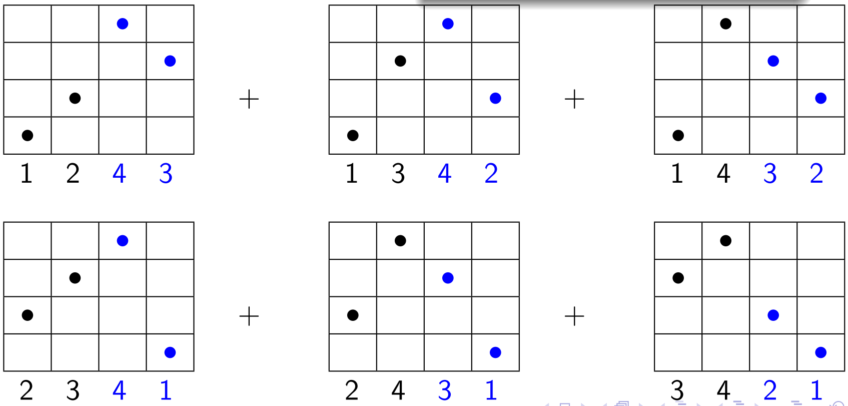


Produit de mélange sur les valeurs

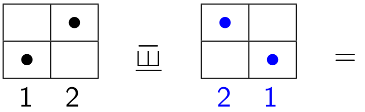


$\mathbb{G}$

$$\mathbb{G}_\sigma \mathbb{G}_\mu := \sum_{\substack{\nu=uv,\\ std(u)=\sigma,\\ std(v)=\mu}} \mathbb{G}_\nu$$

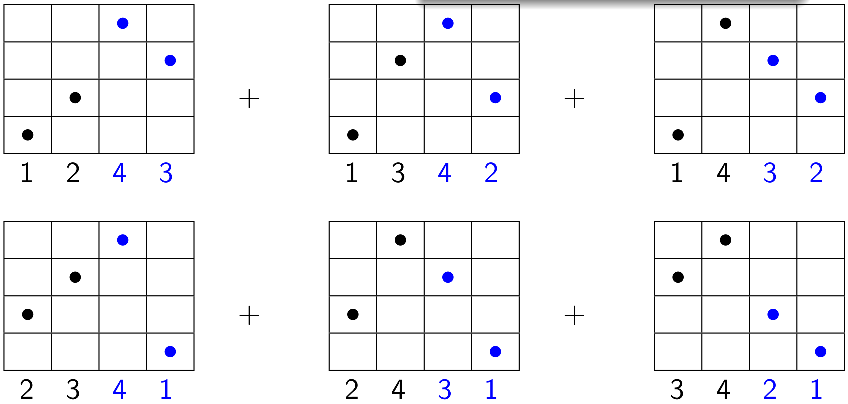


Produit de mélange sur les valeurs

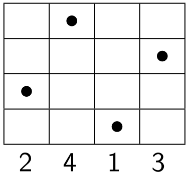


$\mathbb{G}$

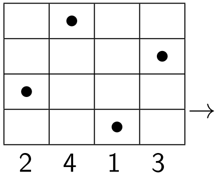
$$\mathbb{G}_\sigma \mathbb{G}_\mu := \sum_{\nu \in \sigma \overline{⧢} \mu} \mathbb{G}_\nu$$



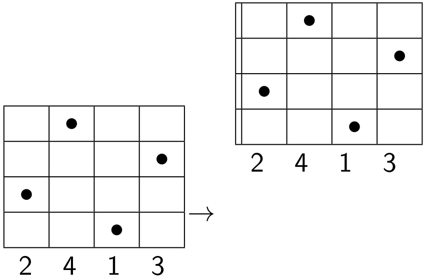
Désassemblage vertical



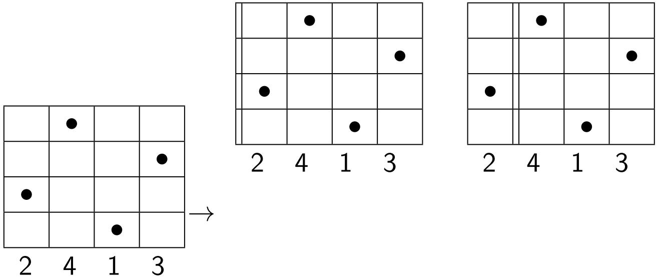
Désassemblage vertical



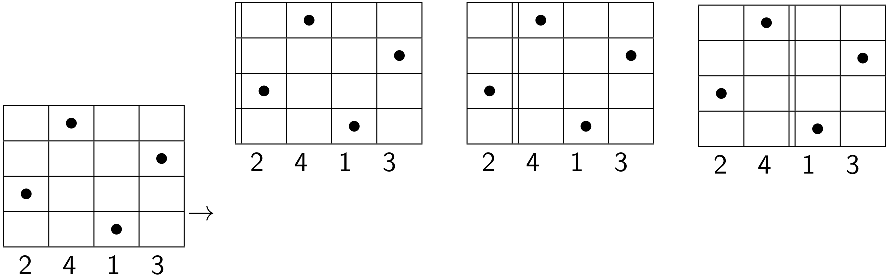
Désassemblage vertical



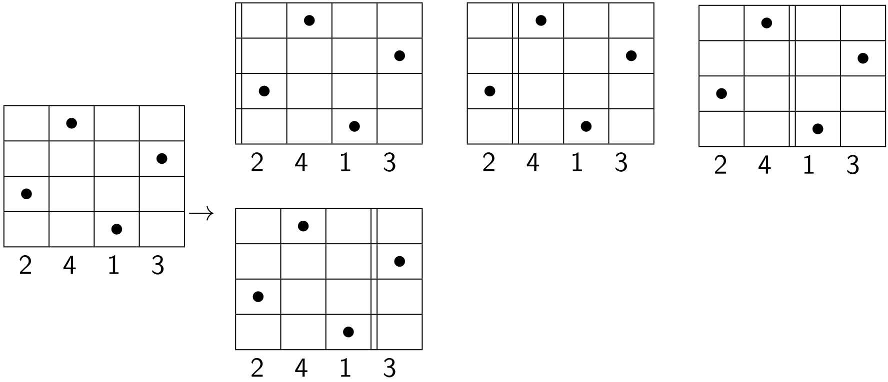
Désassemblage vertical



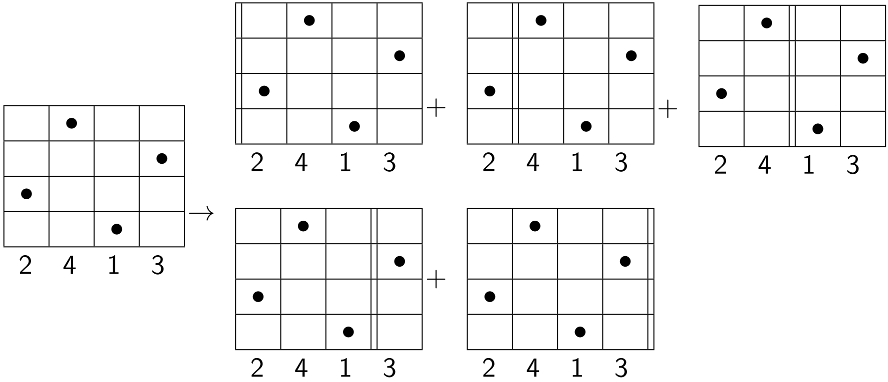
Désassemblage vertical



Désassemblage vertical

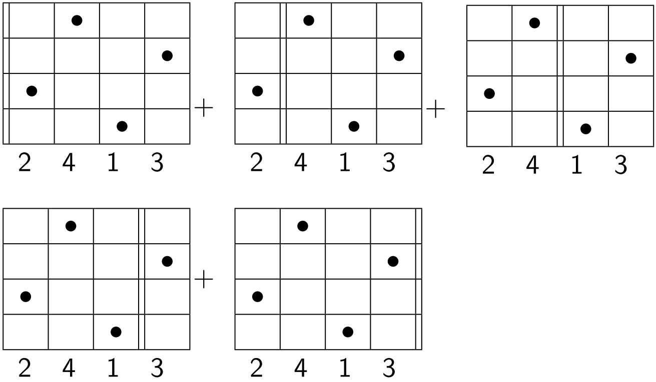


Désassemblage vertical



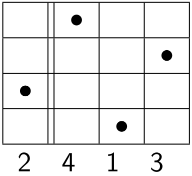
Désassemblage vertical

$\mathbb{F}_{2413} \xrightarrow{\Delta}$

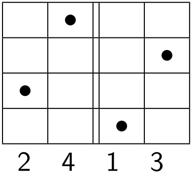


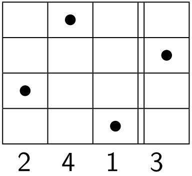
Désassemblage vertical

$\mathbb{F}_{2413} \xrightarrow{\Delta} \mathbb{F}_{\epsilon} \otimes \mathbb{F}_{2413}$ +

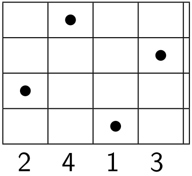


+



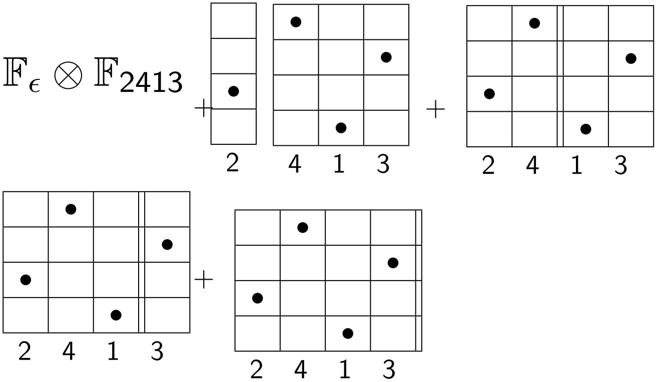


+

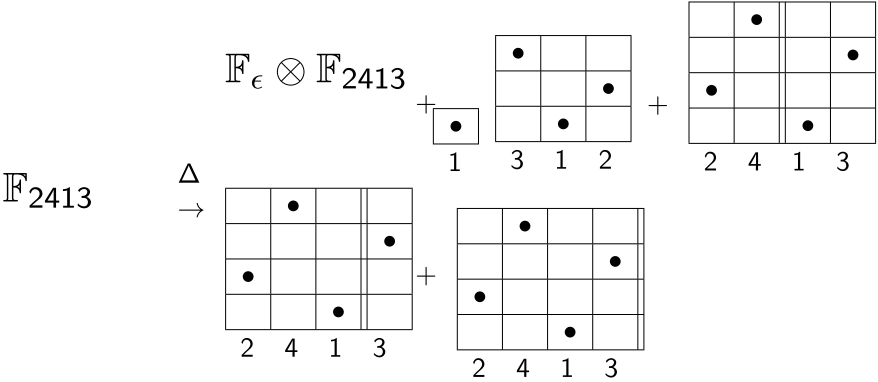


Désassemblage vertical

$\mathbb{F}_{2413} \xrightarrow{\Delta}$ $\mathbb{F}_{\epsilon} \otimes \mathbb{F}_{2413}$

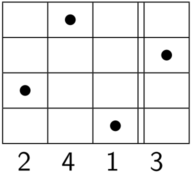


Désassemblage vertical

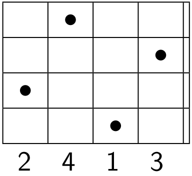


Désassemblage vertical

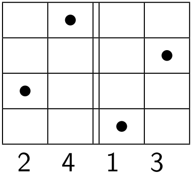
$\mathbb{F}_{2413} \xrightarrow{\Delta}$



$+$



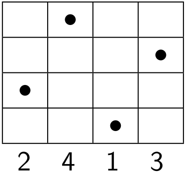
$\mathbb{F}_\epsilon \otimes \mathbb{F}_{2413} + \mathbb{F}_1 \otimes \mathbb{F}_{312} +$



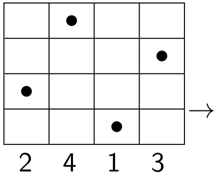
Désassemblage vertical

$$\mathbb{F}_{2413} \overset{\Delta}{\rightarrow} \mathbb{F}_{\epsilon} \otimes \mathbb{F}_{2413} + \mathbb{F}_{1} \otimes \mathbb{F}_{312} + \mathbb{F}_{12} \otimes \mathbb{F}_{12} + \mathbb{F}_{231} \otimes \mathbb{F}_{1} + \mathbb{F}_{2413} \otimes \mathbb{F}_{\epsilon}$$

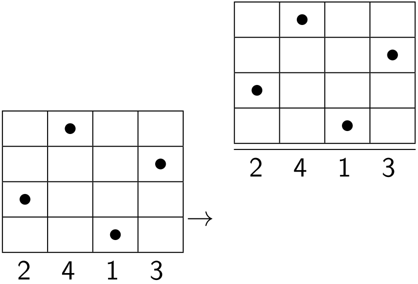
Désassemblage horizontale



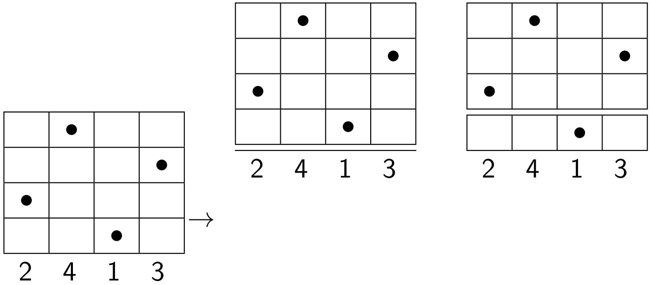
Désassemblage horizontale



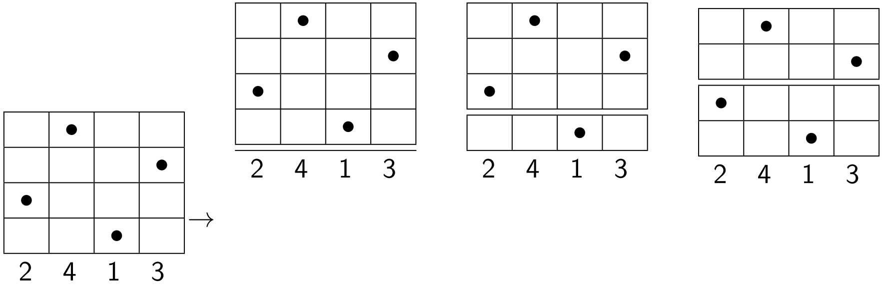
Désassemblage horizontale



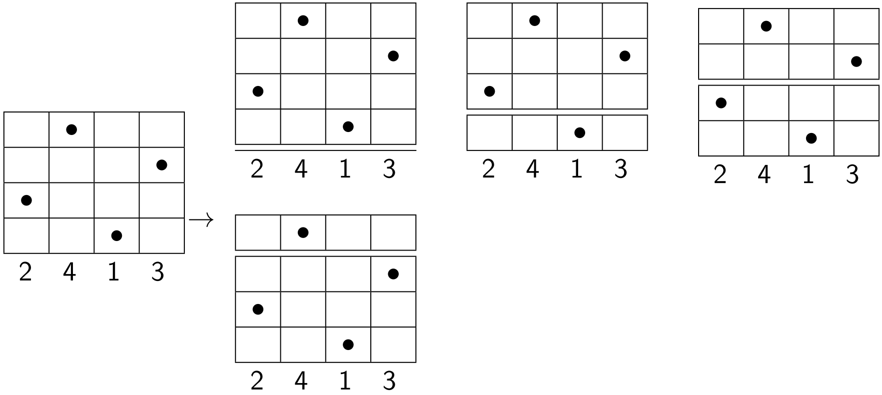
Désassemblage horizontale



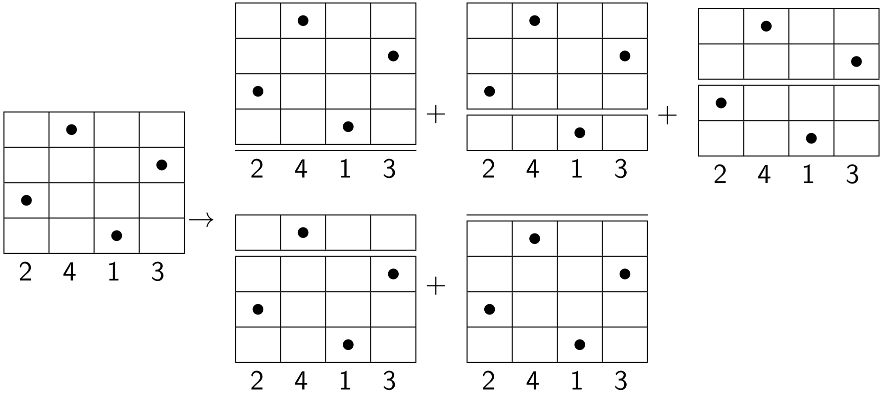
Désassemblage horizontale



Désassemblage horizontale

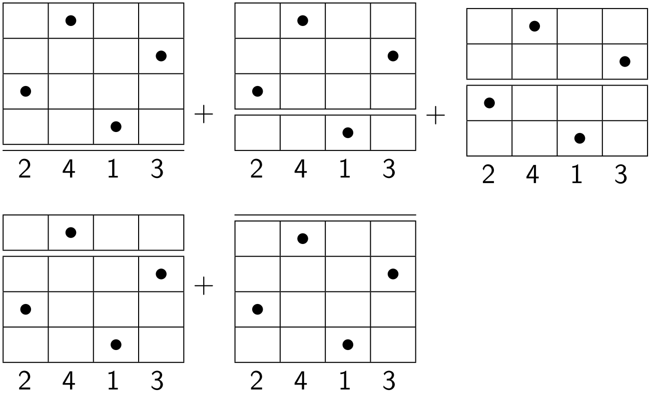


Désassemblage horizontale

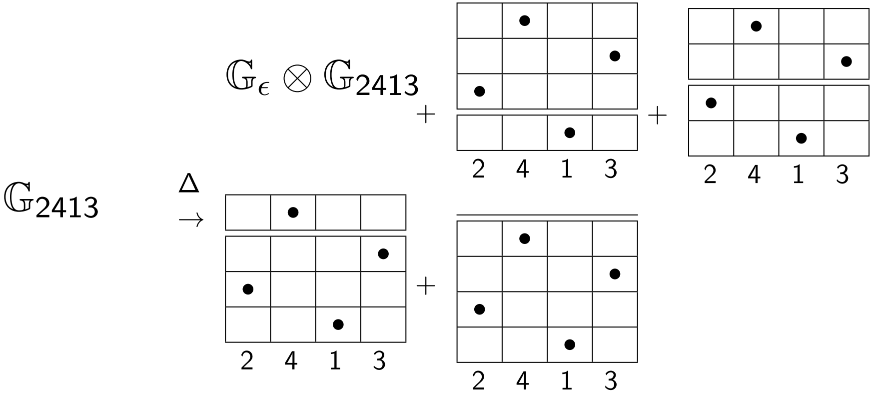


Désassemblage horizontale

$$\mathbb{G}_{2413} \xrightarrow{\Delta}$$

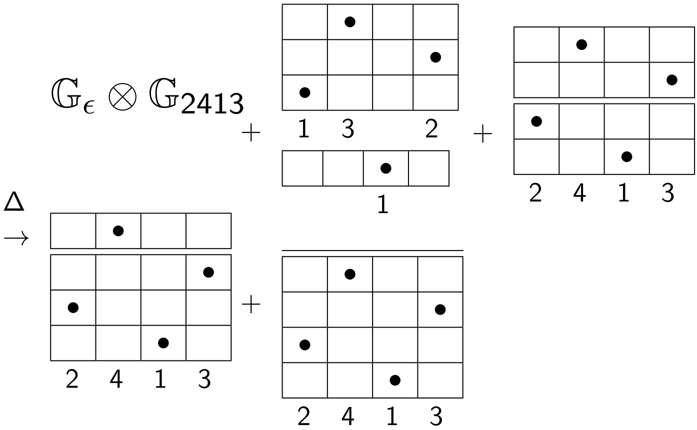


Désassemblage horizontale

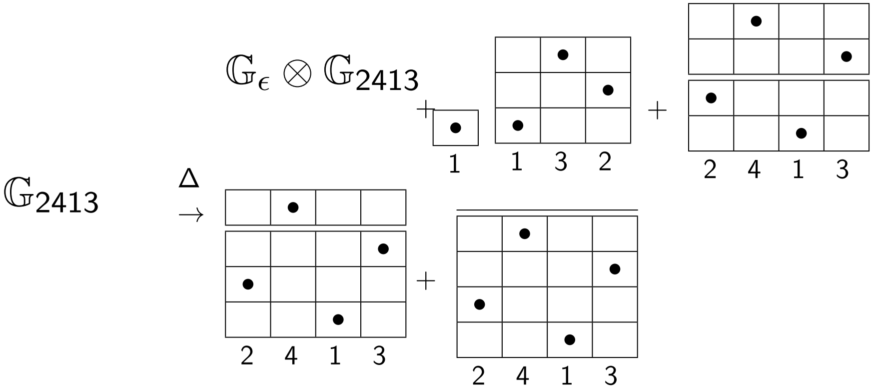


Désassemblage horizontale

$\mathbb{G}_{2413}$

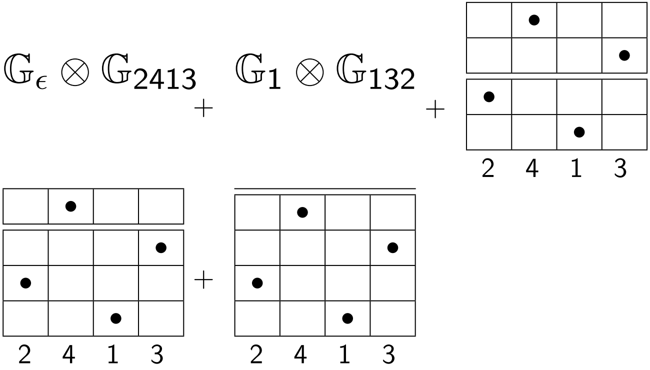


Désassemblage horizontale



Désassemblage horizontale

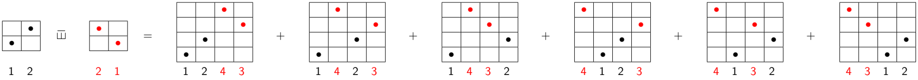
$$\mathbb{G}_{2413} \overset{\Delta}{\rightarrow} \mathbb{G}_{\epsilon} \otimes \mathbb{G}_{2413} + \mathbb{G}_{1} \otimes \mathbb{G}_{132} + \ldots$$



Désassemblage horizontale

$$\mathbb{G}_{2413} \xrightarrow{\Delta} \mathbb{G}_{\epsilon} \otimes \mathbb{G}_{2413} + \mathbb{G}_{1} \otimes \mathbb{G}_{132} + \mathbb{G}_{21} \otimes \mathbb{G}_{21} + \mathbb{G}_{213} \otimes \mathbb{G}_{1} + \mathbb{G}_{2413} \otimes \mathbb{G}_{\epsilon}$$

Dualité de FQSym

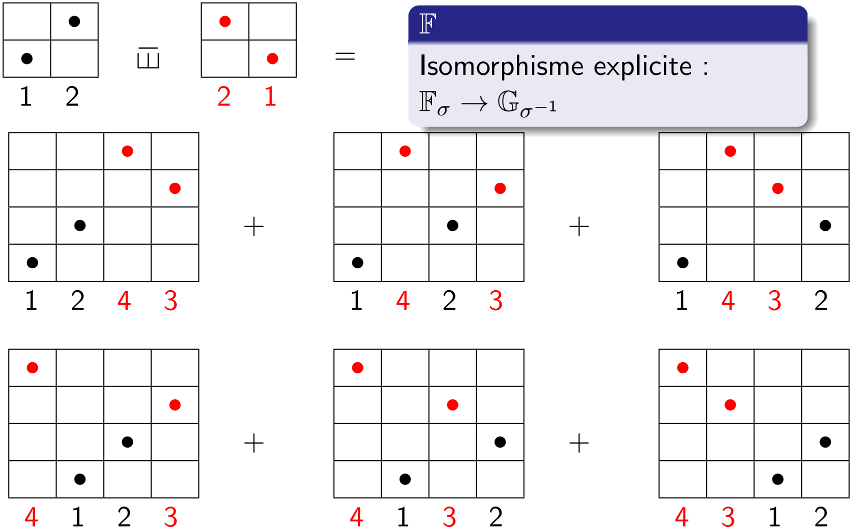


Dualité

Soit H une algèbre de Hopf,

$< \Delta(z), x \otimes y > = < z, x.y > \qquad \forall x, y \in H, z \in H^*,$

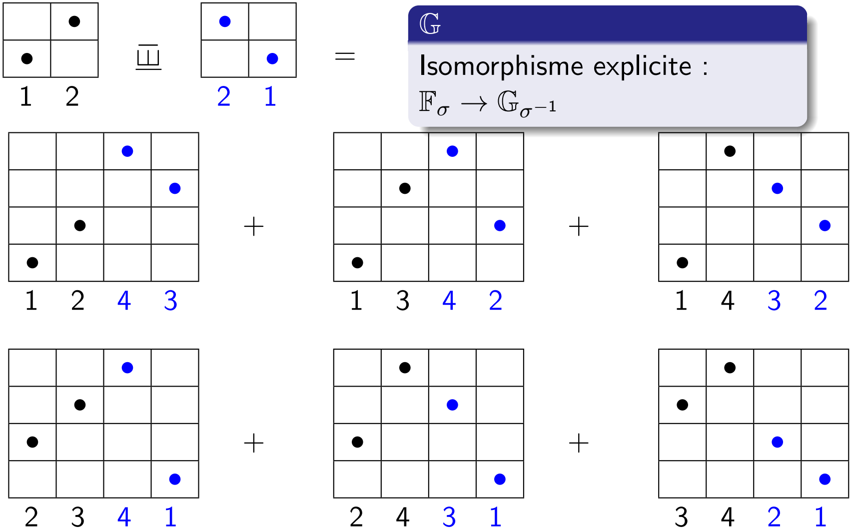
$< y.z, x > = < y \otimes z, \Delta(x) > \qquad \forall x \in H, y, z \in H^*$



$\mathbb{F}$

Isomorphisme explicite :

$\mathbb{F}_\sigma \to \mathbb{G}_{\sigma^{-1}}$



$\mathbb{G}$

Isomorphisme explicite :

$\mathbb{F}_\sigma \to \mathbb{G}_{\sigma^{-1}}$

Mots tassés

Définition

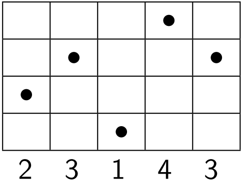
Un mot w sur l'alphabet $\{1, 2, ...n\}$ est un mot tassé si pour tout nombre $k > 1$ apparessant dans w, $k - 1$ apparait aussi dans w.

Mots tassés

Définition

Un mot w sur l'alphabet $\{1, 2, \ldots n\}$ est un mot tassé si pour tout nombre $k > 1$ apparessant dans w, $k - 1$ apparait aussi dans w.

Même représentation : #lignes $\leq$ #colonnes

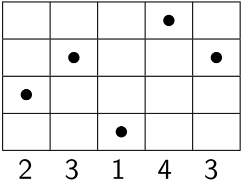


Mots tassés

Définition

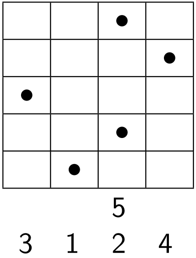
Un mot w sur l'alphabet $\{1, 2, \dots n\}$ est un mot tassé si pour tout nombre $k > 1$ apparessant dans w, $k - 1$ apparait aussi dans w.

Même représentation : #lignes $\leq$ #colonnes

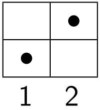


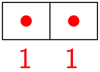
$\rightarrow$ transposition $\rightarrow$

$\rightarrow$ ~~inversion~~ $\rightarrow$

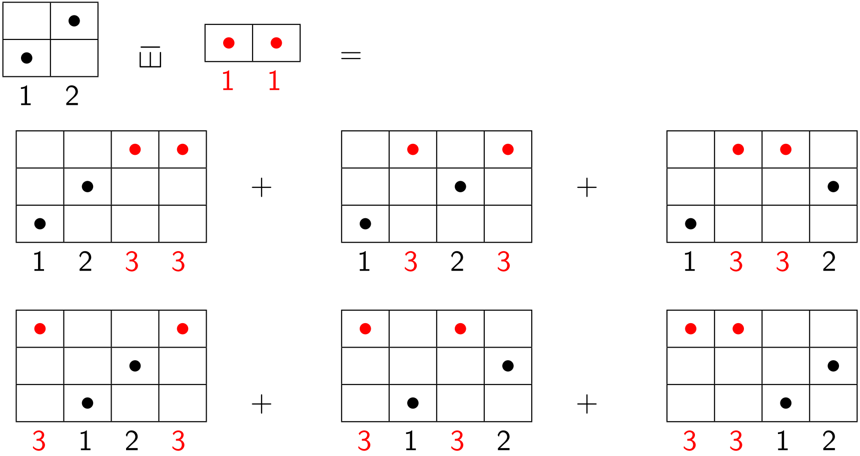


Produit sur les mots tassés

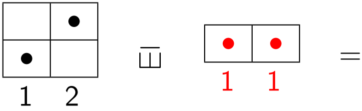




Produit de mélange sur les mots tassés

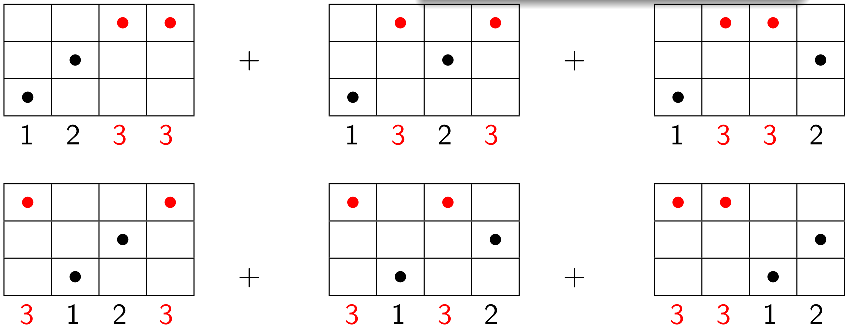


Produit de mélange sur les mots tassés

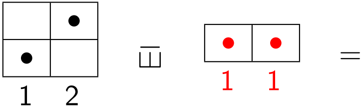


$\mathbb{S}$

$\mathbb{S}_{12}\mathbb{S}_{11} = \mathbb{S}_{1233} + \mathbb{S}_{1323} + \mathbb{S}_{1332} + \mathbb{S}_{3123} + \mathbb{S}_{3132} + \mathbb{S}_{3312}$

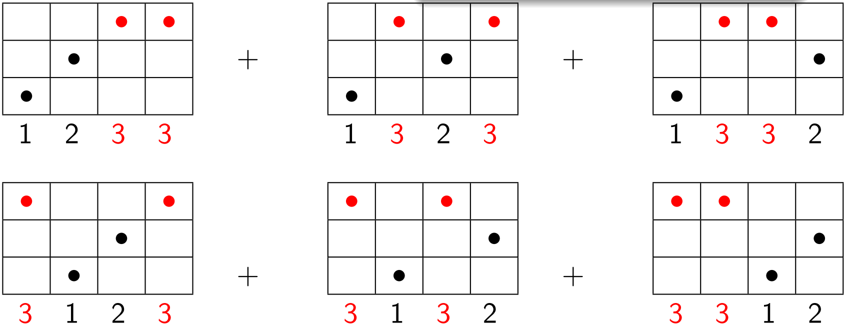


Produit de mélange sur les mots tassés

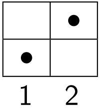


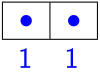
$\mathbb{S}$

$$\mathbb{S}_\sigma \mathbb{S}_\mu := \sum_{\nu \in \sigma \overline{⧢} \mu} \mathbb{S}_\nu$$



Produit de mélange **augmenté** sur les valeurs

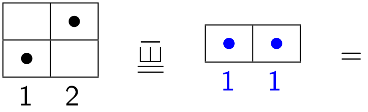




$\mathbb{M}$

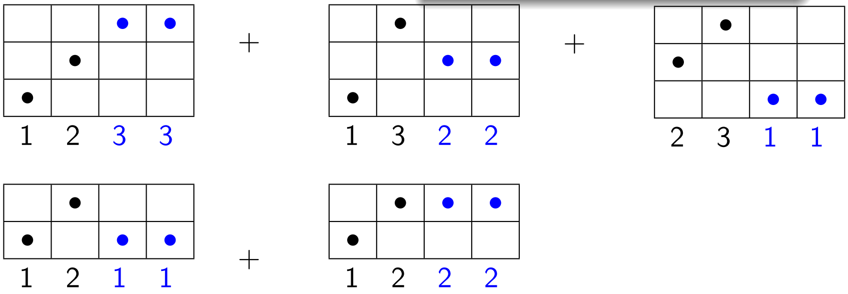
$$\mathbb{M}_\sigma \mathbb{M}_\mu := \sum_{\substack{\nu = uv, \\ tass(u)=\sigma, \\ tass(v)=\mu}} \mathbb{M}_\nu$$

Produit de mélange **augmenté** sur les valeurs

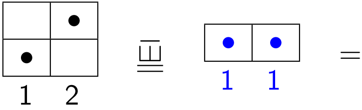


M

$$\mathbb{M}_\sigma \mathbb{M}_\mu := \sum_{\substack{\nu = uv, \\ tass(u)=\sigma, \\ tass(v)=\mu}} \mathbb{M}_\nu$$

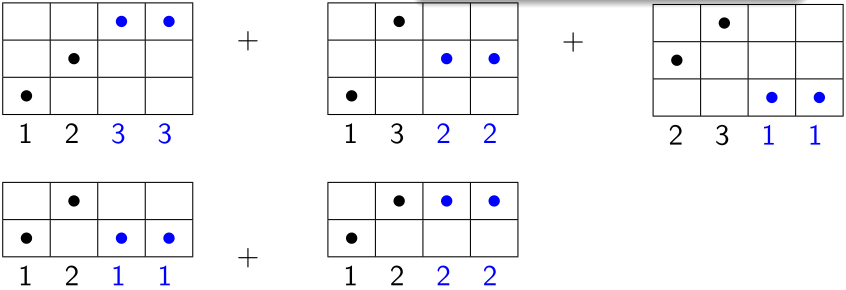


Produit de mélange **augmenté** sur les valeurs

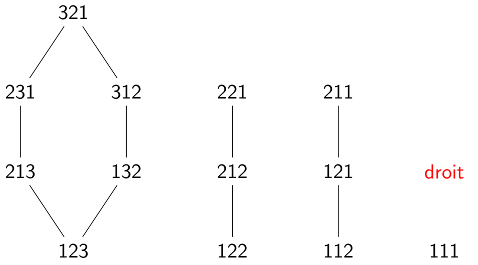


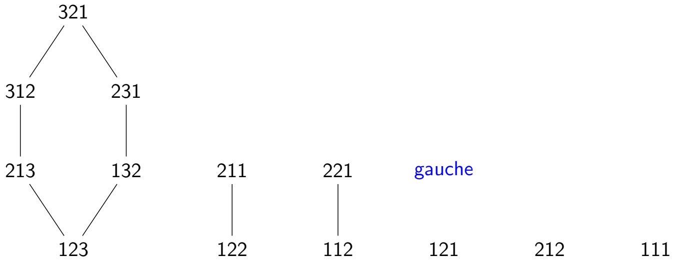
$\mathbb{M}$

$\mathbb{M}_{12}\mathbb{M}_{11} = \mathbb{M}_{1233} + \mathbb{M}_{1322} + \mathbb{M}_{2311} + \mathbb{M}_{1211} + \mathbb{M}_{1222}$



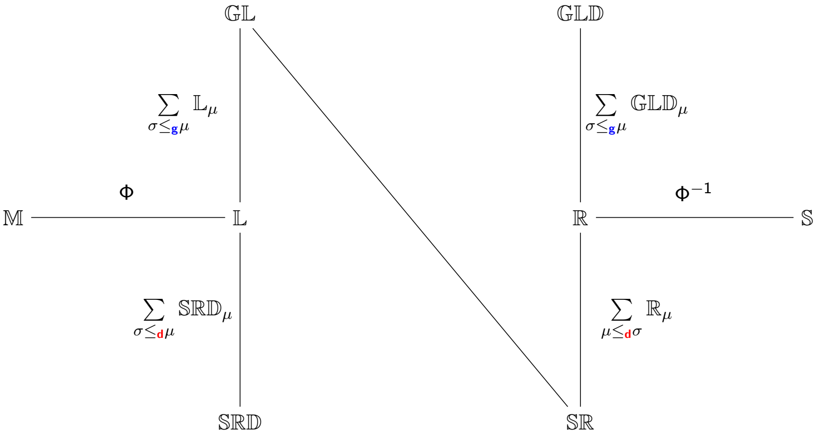
Ordres partiels





Ordres Partiels :
Réflexivité,
Transitivité,
Antisymétrie.

From $\mathbb{M}$ to $\mathbb{S}$ in **WQSym**



Quelques matrices

	123	132	213	231	312	321	122	212	221	112	121	211	111
123	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
132	.	-1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
213	.	1	-1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
231	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
312	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
321	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
122	.	.	.	.	.	.	1	1	1	-1	.	.	.
212	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.
221	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
112	.	.	.	.	.	.	-1	.	.	1	1	1	.
121	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.
211	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
111	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1

Figure: Matrice de changement de base de $\mathbb{L}$ à $\mathbb{R}$ pour les mots tassés de taille 3.

Quelques matrices

	123	132	213	231	312	321	122	212	221	112	121	211	111
123	0	0	0	0	0	1	0	0	1/2	0	0	1/2	1/6
132	0	0	0	1	0	0	0	0	1/2	0	1/2	0	1/6
213	0	0	0	0	1	0	0	1/2	0	0	0	1/2	1/6
231	0	1	0	1	-1	0	1/2	-1/2	1/2	0	1	-1/2	1/6
312	0	0	1	-1	1	0	0	1	-1/2	1/2	-1/2	1/2	1/6
321	1	0	0	0	0	0	1/2	0	0	1/2	0	0	1/6
122	0	0	0	1/2	0	1/2	0	0	3/2	0	1/4	1/4	2/3
212	0	0	1/2	-1/2	1	0	0	7/4	-5/4	1/4	-1/4	1/2	1/6
221	1/2	1/2	0	1/2	-1/2	0	3/2	-5/4	1/4	1/4	1/2	3/4	2/3
112	0	0	0	0	1/2	1/2	0	1/4	1/4	0	0	3/2	2/3
121	0	1/2	0	1	-1/2	0	1/4	-1/4	1/2	0	7/4	-5/4	1/6
211	1/2	0	1/2	-1/2	1/2	0	1/4	1/2	3/4	3/2	-5/4	1/4	2/3
111	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	2/3	1/6	2/3	2/3	1/6	2/3	13/6

Figure: Matrice de changement de base de $\mathbb{S}$ à $\mathbb{M}$ pour les mots tassés de taille 3.

Contributions

- Développement des mots tassés en Sage, *#25916 implement Packed Words*.

Contributions

- Développement des mots tassés en Sage, *#25916 implement Packed Words*.
- Développement de l'algèbre WQSym en Sage avec ses 8 bases, *#25930 implementation of different basis of WQSym*.

Contributions

- Développement des mots tassés en Sage, *#25916 implement Packed Words*.
- Développement de l'algèbre WQSym en Sage avec ses 8 bases, *#25930 implementation of different basis of WQSym*.
- Lancement de tests à grande échelle pour vérifier les résultats de Vargas.

Contributions

- Développement des mots tassés en Sage, *#25916 implement Packed Words*.
- Développement de l'algèbre WQSym en Sage avec ses 8 bases, *#25930 implementation of different basis of WQSym*.
- Lancement de tests à grande échelle pour vérifier les résultats de Vargas.
- Etude de la combinatoire de ces changements de base grâce à l'affichage des matrices et des graphes obtenu en Sage.

Contributions

- Développement des mots tassés en Sage, *#25916 implement Packed Words*.
- Développement de l'algèbre WQSym en Sage avec ses 8 bases, *#25930 implementation of different basis of WQSym*.
- Lancement de tests à grande échelle pour vérifier les résultats de Vargas.
- Etude de la combinatoire de ces changements de base grâce à l'affichage des matrices et des graphes obtenu en Sage.
- Nouveaux résulats et conjectures

Contributions

- Développement des mots tassés en Sage, *#25916 implement Packed Words*.
- Développement de l'algèbre WQSym en Sage avec ses 8 bases, *#25930 implementation of different basis of WQSym*.
- Lancement de tests à grande échelle pour vérifier les résultats de Vargas.
- Etude de la combinatoire de ces changements de base grâce à l'affichage des matrices et des graphes obtenu en Sage.
- Nouveaux résulats et conjectures
  - Stabilité de l'isomorphisme de Vargas sur **FQSym**.
  - Une infinité d'automorphisme de **WQSym**.
  - Généralisation à **PQSym**.