Autodualité de WQSym

Hugo Mlodecki

19 septembre 2018

Sommaire

Permutation

Définition

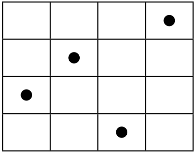
Une permutation de taille n est un mot sur l'alphabet $\{1, 2, ..., n\}$ où chaque lettre apparaît exactement une fois.

Permutation

Définition

Une permutation de taille n est un mot sur l'alphabet $\{1, 2, \ldots, n\}$ où chaque lettre apparaît exactement une fois.

Une représentation :



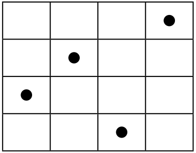
2 3 1 4

Permutation

Définition

Une permutation de taille n est un mot sur l'alphabet $\{1, 2, ..., n\}$ où chaque lettre apparaît exactement une fois.

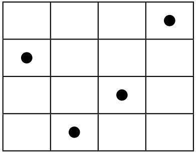
Une représentation :



2 3 1 4

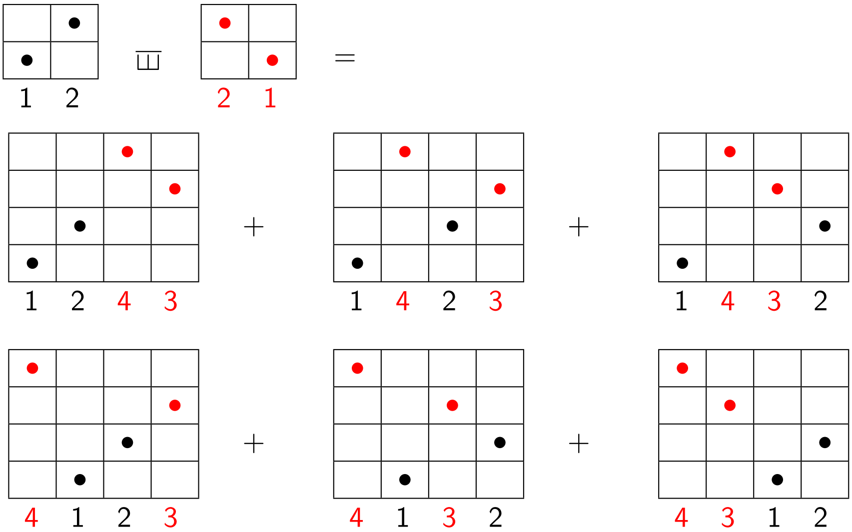
$\rightarrow$ transposition $\rightarrow$

$\rightarrow$ inversion $\rightarrow$

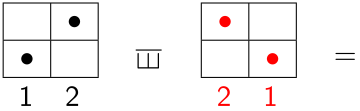


3 1 2 4

Produit de mélange

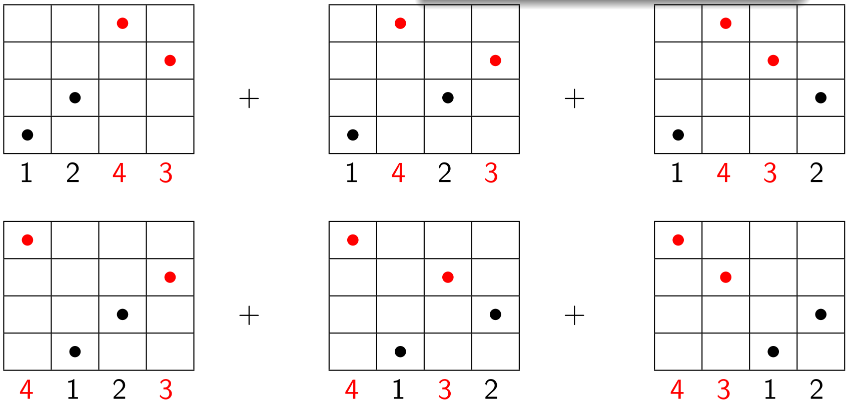


Produit de mélange

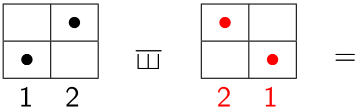


$\mathbb{F}$

$\mathbb{F}_{12}\mathbb{F}_{21} = \mathbb{F}_{1243} + \mathbb{F}_{1423} + \mathbb{F}_{1432} + \mathbb{F}_{4123} + \mathbb{F}_{4132} + \mathbb{F}_{4312}$

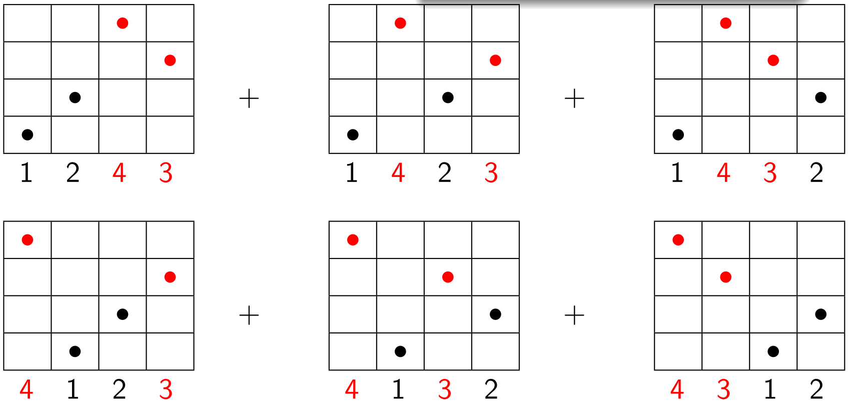


Produit de mélange

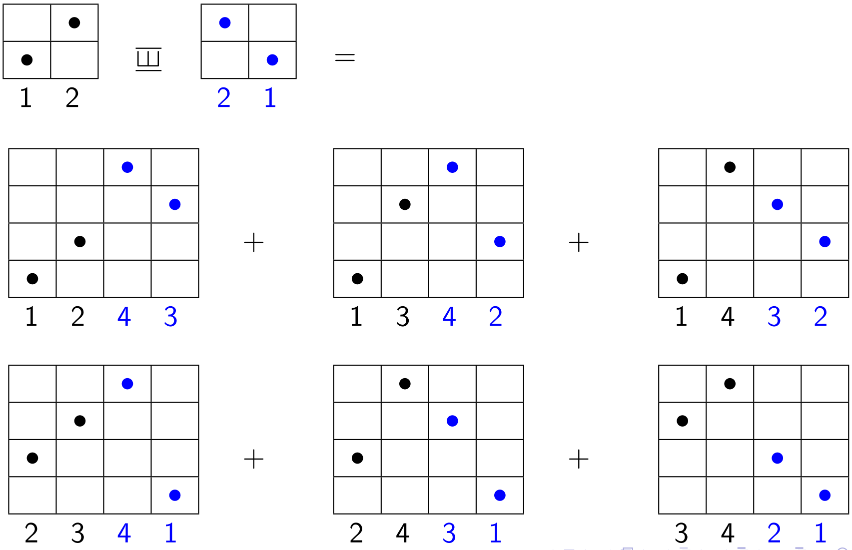


$\mathbb{F}$

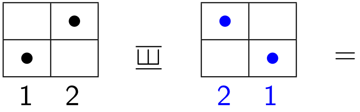
$$\mathbb{F}_\sigma \mathbb{F}_\mu := \sum_{\nu \in \sigma ⧢ \mu} \mathbb{F}_\nu$$



Produit de mélange sur les valeurs

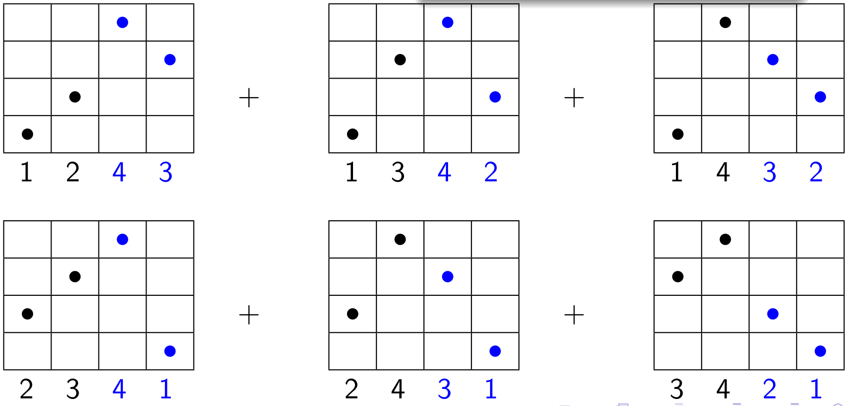


Produit de mélange sur les valeurs

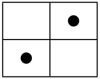


$\mathbb{G}$

$\mathbb{G}_{12}\mathbb{G}_{21} = \mathbb{G}_{1243} + \mathbb{G}_{1342} +$
$\mathbb{G}_{1432} + \mathbb{G}_{2341} + \mathbb{G}_{2431} + \mathbb{G}_{3421}$

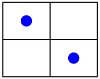


Produit de mélange sur les valeurs



1 2

$⧢$

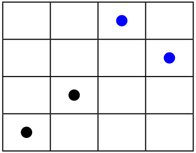


2 1

$=$

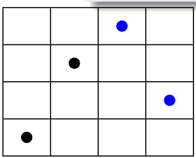
$\mathbb{G}$

$$\mathbb{G}_\sigma \mathbb{G}_\mu := \sum_{\substack{\nu = uv, \\ std(u)=\sigma, \\ std(v)=\mu}} \mathbb{G}_\nu$$



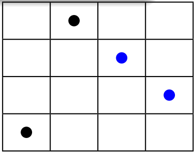
1 2 4 3

$+$

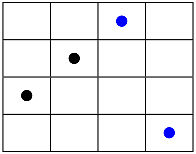


1 3 4 2

$+$

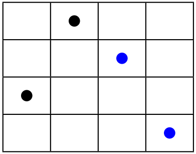


1 4 3 2



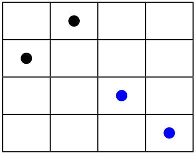
2 3 4 1

$+$



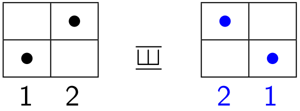
2 4 3 1

$+$



3 4 2 1

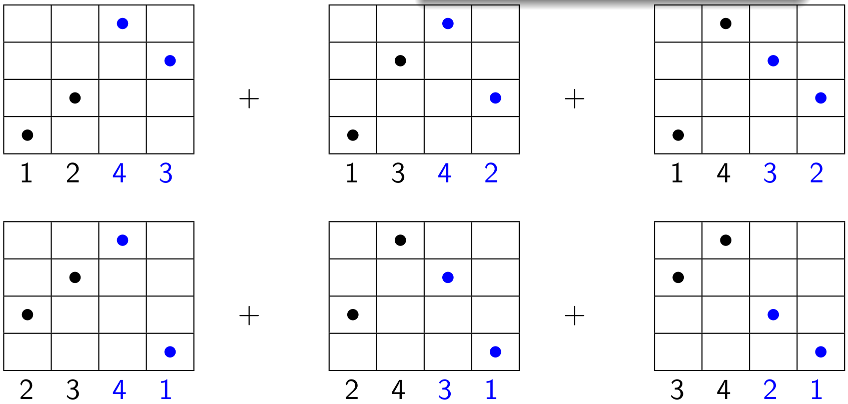
Produit de mélange sur les valeurs



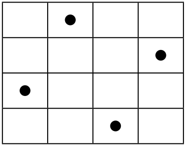
$=$

$\mathbb{G}$

$$\mathbb{G}_\sigma \mathbb{G}_\mu := \sum_{\nu \in \sigma ⧢ \mu} \mathbb{G}_\nu$$

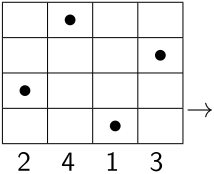


Désassemblage vertical

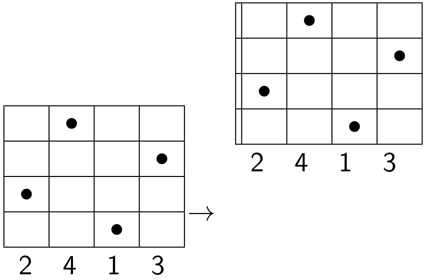


2 4 1 3

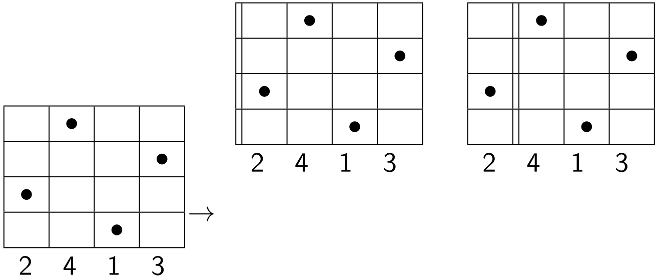
Désassemblage vertical



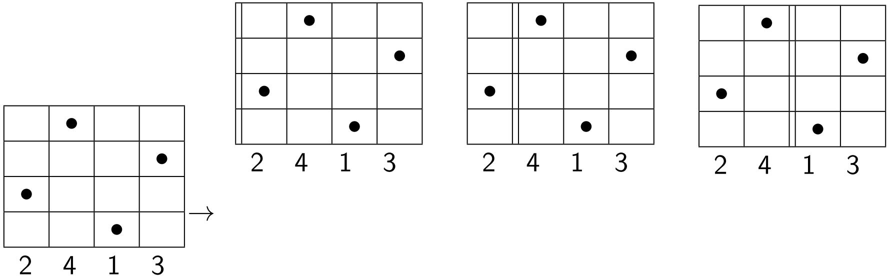
Désassemblage vertical



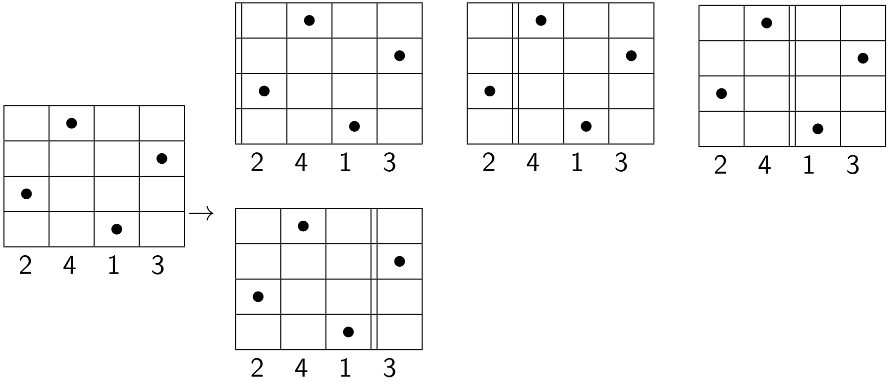
Désassemblage vertical



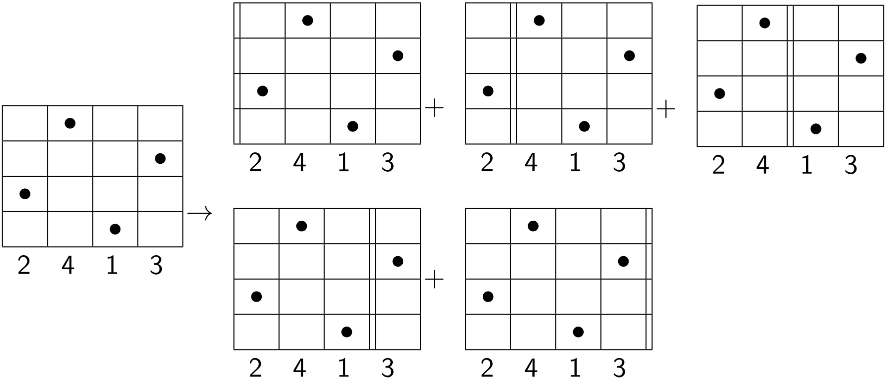
Désassemblage vertical



Désassemblage vertical

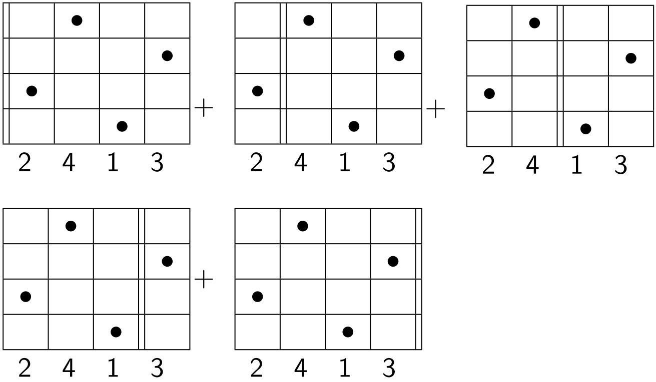


Désassemblage vertical



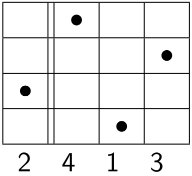
Désassemblage vertical

$$\mathbb{F}_{2413} \xrightarrow{\Delta}$$

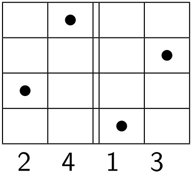


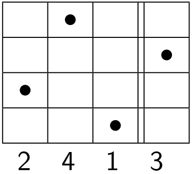
Désassemblage vertical

$$\mathbb{F}_{2413} \xrightarrow{\Delta} \mathbb{F}_{\epsilon} \otimes \mathbb{F}_{2413} +$$

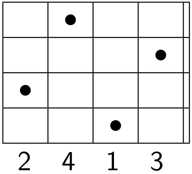


$+$



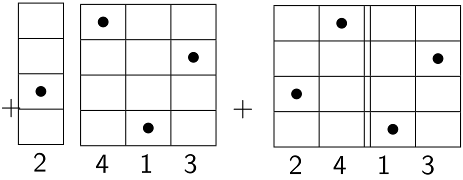


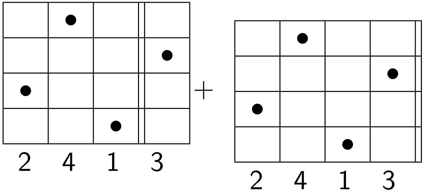
$+$



Désassemblage vertical

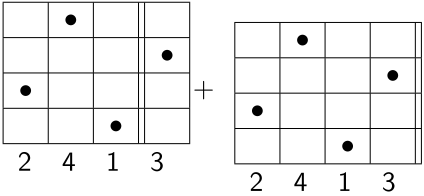
$$\mathbb{F}_{2413} \xrightarrow{\Delta} \mathbb{F}_{\epsilon} \otimes \mathbb{F}_{2413}$$



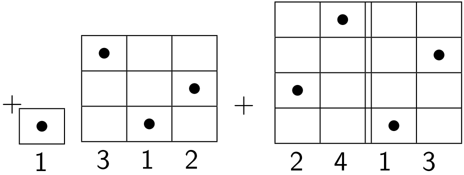


Désassemblage vertical

$$\mathbb{F}_{2413} \xrightarrow{\Delta}$$

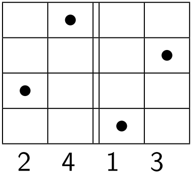


$$\mathbb{F}_{\epsilon} \otimes \mathbb{F}_{2413}$$

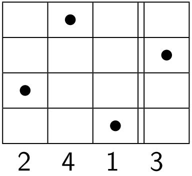


Désassemblage vertical

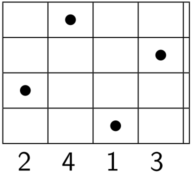
$$\mathbb{F}_\epsilon \otimes \mathbb{F}_{2413} + \mathbb{F}_1 \otimes \mathbb{F}_{312} +$$



$$\mathbb{F}_{2413} \xrightarrow{\Delta}$$



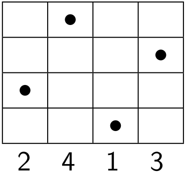
$+$



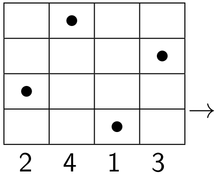
Désassemblage vertical

$$\mathbb{F}_{2413} \xrightarrow{\Delta} \mathbb{F}_{\epsilon} \otimes \mathbb{F}_{2413} + \mathbb{F}_{1} \otimes \mathbb{F}_{312} + \mathbb{F}_{12} \otimes \mathbb{F}_{12} + \mathbb{F}_{231} \otimes \mathbb{F}_{1} + \mathbb{F}_{2413} \otimes \mathbb{F}_{\epsilon}$$

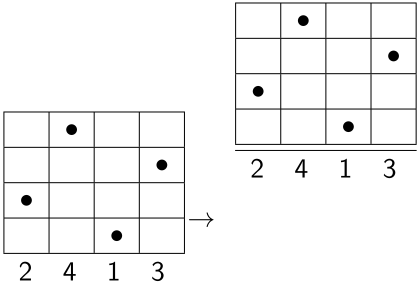
Désassemblage horizontale



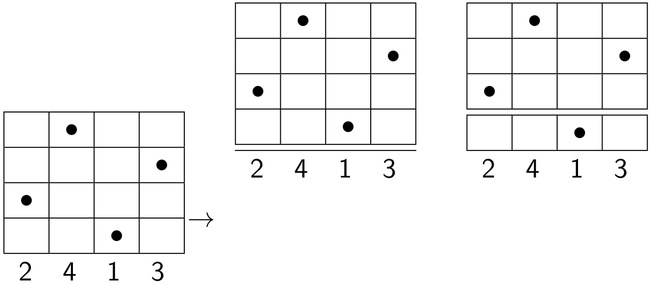
Désassemblage horizontale



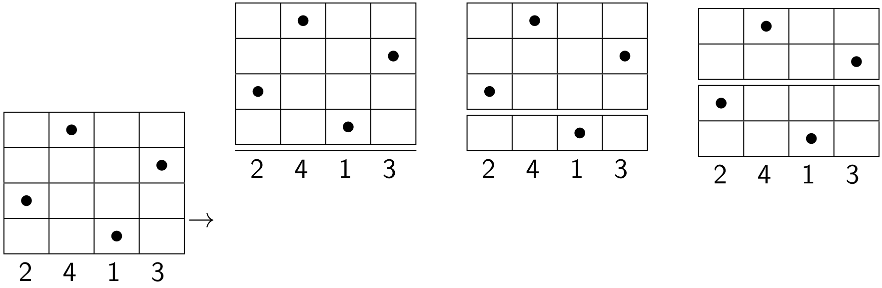
Désassemblage horizontale



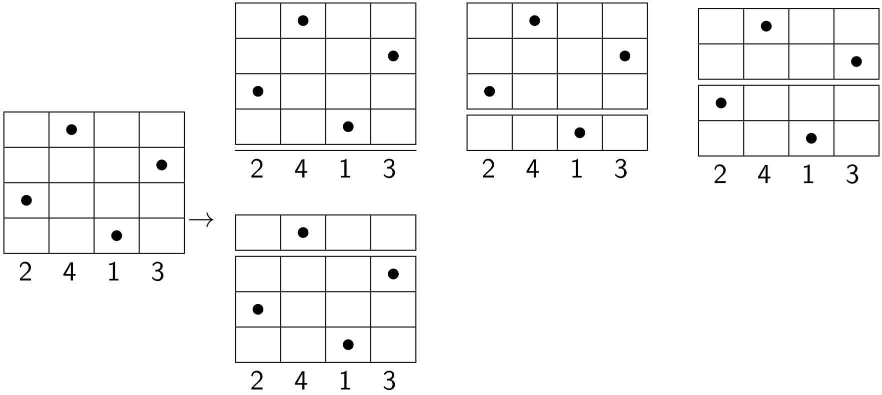
Désassemblage horizontale



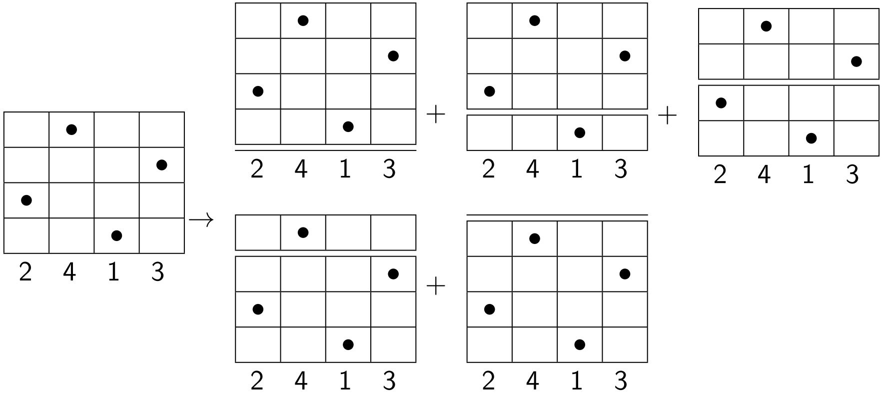
Désassemblage horizontale



Désassemblage horizontale

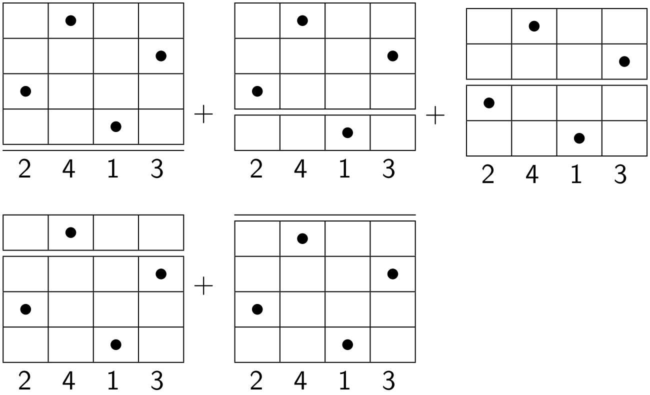


Désassemblage horizontale

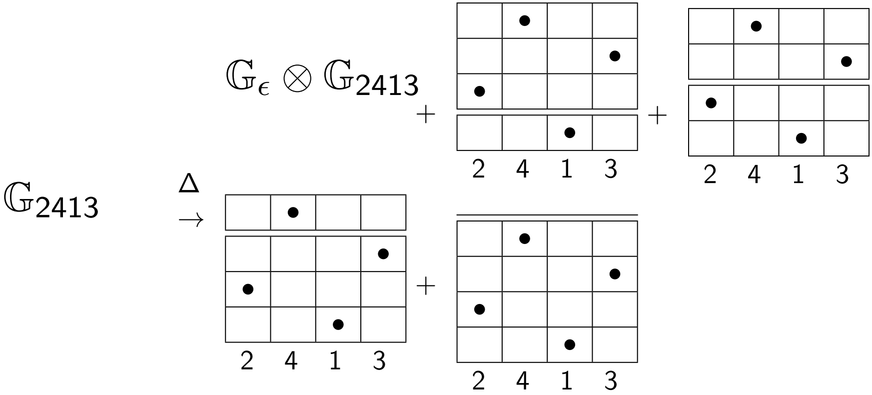


Désassemblage horizontale

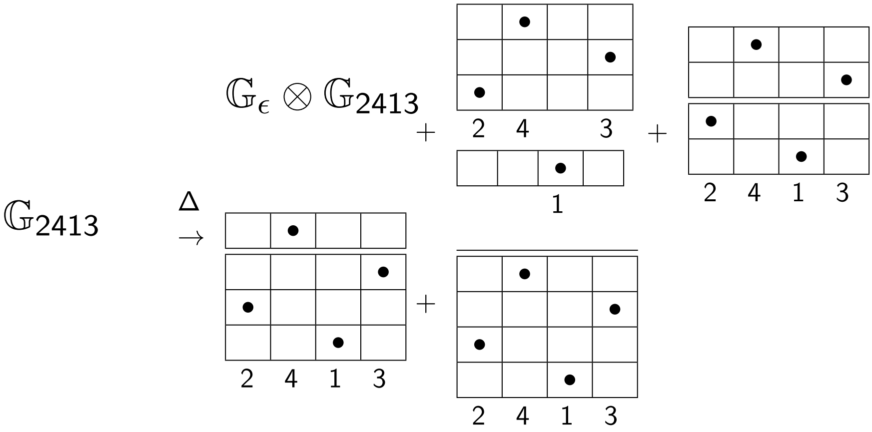
$$\mathbb{G}_{2413} \xrightarrow{\Delta}$$



Désassemblage horizontale

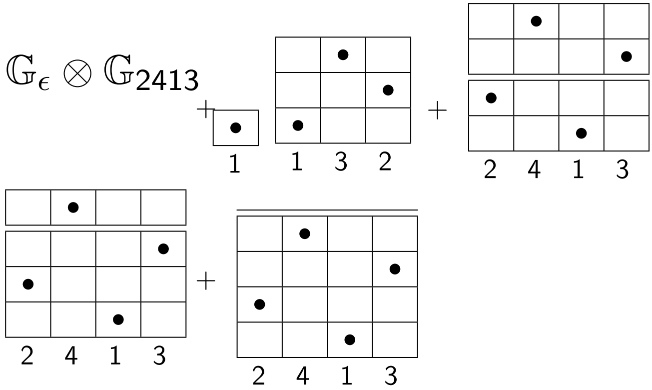


Désassemblage horizontale



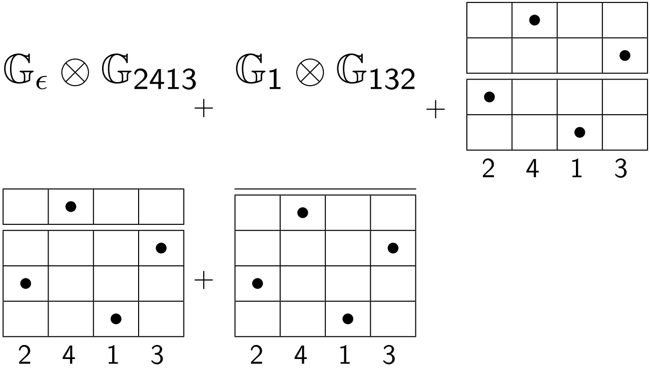
Désassemblage horizontale

$$\mathbb{G}_{2413} \xrightarrow{\Delta} \mathbb{G}_{\epsilon} \otimes \mathbb{G}_{2413}$$



Désassemblage horizontale

$$\mathbb{G}_{2413} \xrightarrow{\Delta} \mathbb{G}_{\epsilon} \otimes \mathbb{G}_{2413} + \mathbb{G}_{1} \otimes \mathbb{G}_{132} + \cdots$$



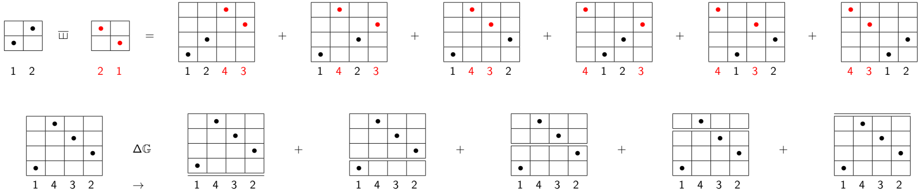
Désassemblage horizontale

$$\mathbb{G}_{\epsilon} \otimes \mathbb{G}_{2413} + \mathbb{G}_{1} \otimes \mathbb{G}_{132} + \mathbb{G}_{21} \otimes \mathbb{G}_{21}$$

$$\mathbb{G}_{2413} \xrightarrow{\Delta}$$

$$\mathbb{G}_{213} \otimes \mathbb{G}_{1} + \mathbb{G}_{2413} \otimes \mathbb{G}_{\epsilon}$$

Dualité de FQSym



Dualité

Soit H une algèbre de Hopf,

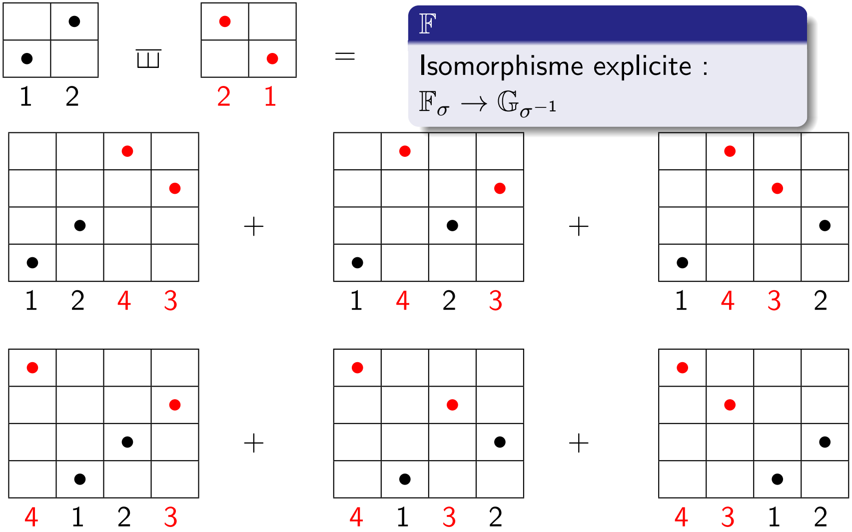
$< \Delta(z), x \otimes y >=< z, x.y > \qquad \forall x, y \in H, z \in H^*,$

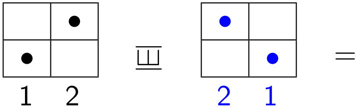
$< y.z, x >=< y \otimes z, \Delta(x) > \qquad \forall x \in H, y, z \in H^*$

$\mathbb{F}$

Isomorphisme explicite :

$\mathbb{F}_\sigma \rightarrow \mathbb{G}_{\sigma^{-1}}$

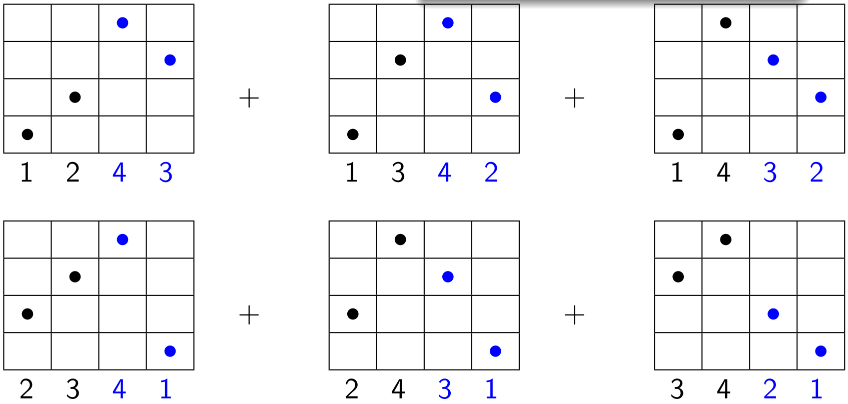




$\mathbb{G}$

Isomorphisme explicite :

$\mathbb{F}_\sigma \rightarrow \mathbb{G}_{\sigma^{-1}}$



Mots tassés

Définition

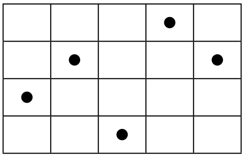
Un mot w sur l'alphabet $\{1, 2, ...n\}$ est un mot tassé si pour tout nombre $k > 1$ apparessant dans w, $k - 1$ apparait aussi dans w.

Mots tassés

Définition

Un mot w sur l'alphabet $\{1, 2, \dots n\}$ est un mot tassé si pour tout nombre $k > 1$ apparessant dans w, $k - 1$ apparait aussi dans w.

Même représentation : #lignes $\leq$ #colonnes



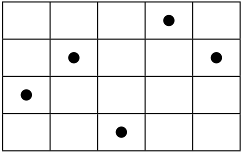
2 3 1 4 3

Mots tassés

Définition

Un mot w sur l'alphabet $\{1, 2, \dots n\}$ est un mot tassé si pour tout nombre $k > 1$ apparessant dans w, $k - 1$ apparait aussi dans w.

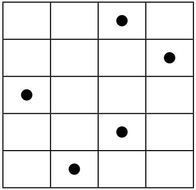
Même représentation : #lignes $\leq$ #colonnes



2 3 1 4 3

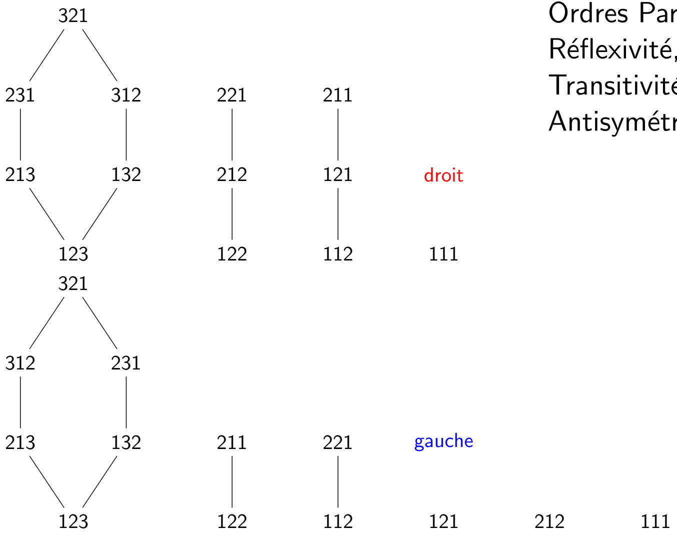
$\rightarrow$ transposition $\rightarrow$

$\rightarrow$ ~~inversion~~ $\rightarrow$



$$\begin{array}{cccc} & & 5 & \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{array}$$

Ordres partiels



Ordres Partiels :
Réflexivité,
Transitivité,
Antisymétrie.

Plusieurs bases de WQSym

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{GL} \arrow[d, dash, "\displaystyle\sum_{\sigma \leq_{\mathbf{g}} \mu} \mathbb{L}_\mu"'] \arrow[ddrr, dash] & & \mathbb{GLD} \arrow[d, dash, "\displaystyle\sum_{\sigma \leq_{\mathbf{g}} \mu} \mathbb{GLD}_\mu"] & \\
\mathbb{M} \arrow[r, dash, "\Phi"] & \mathbb{L} \arrow[d, dash, "\displaystyle\sum_{\sigma \leq_{\mathbf{d}} \mu} \mathbb{SRD}_\mu"'] & & \mathbb{R} \arrow[r, dash, "\Phi^{-1}"] \arrow[d, dash, "\displaystyle\sum_{\mu \leq_{\mathbf{d}} \sigma} \mathbb{R}_\mu"] & \mathbb{S} \\
 & \mathbb{SRD} & & \mathbb{SR} &
\end{tikzcd}
$$

Contributions

- Développement des mots tassés en Sage, *#25916 implement Packed Words*.

Contributions

- Développement des mots tassés en Sage, *#25916 implement Packed Words*.
- Développement de l'algèbre WQSym en Sage avec ses 8 bases, *#25930 implementation of different basis of WQSym*.

Contributions

- Développement des mots tassés en Sage, *#25916 implement Packed Words*.
- Développement de l'algèbre WQSym en Sage avec ses 8 bases, *#25930 implementation of different basis of WQSym*.
- Lancement de tests à grande échelle pour vérifier les résultats de Vargas.

Contributions

- Développement des mots tassés en Sage, *#25916 implement Packed Words*.
- Développement de l'algèbre WQSym en Sage avec ses 8 bases, *#25930 implementation of different basis of WQSym*.
- Lancement de tests à grande échelle pour vérifier les résultats de Vargas.
- Etude de la combinatoire de ces changements de base grâce à l'affichage des matrices et des graphes obtenu en Sage.

Contributions

- Développement des mots tassés en Sage, *#25916 implement Packed Words*.
- Développement de l'algèbre WQSym en Sage avec ses 8 bases, *#25930 implementation of different basis of WQSym*.
- Lancement de tests à grande échelle pour vérifier les résultats de Vargas.
- Etude de la combinatoire de ces changements de base grâce à l'affichage des matrices et des graphes obtenu en Sage.
- Nouveaux résulats et conjectures

Contributions

- Développement des mots tassés en Sage, *#25916 implement Packed Words*.
- Développement de l'algèbre WQSym en Sage avec ses 8 bases, *#25930 implementation of different basis of WQSym*.
- Lancement de tests à grande échelle pour vérifier les résultats de Vargas.
- Etude de la combinatoire de ces changements de base grâce à l'affichage des matrices et des graphes obtenu en Sage.
- Nouveaux résulats et conjectures
  - Stabilité de l'isomorphisme de Vargas sur **FQSym**.
  - Une infinité d'automorphisme de **WQSym**.
  - Généralisation à **PQSym**.