Une base des éléments totalement primitifs de WQSym

Hugo Mlodecki

Octobre 2019

Sommaire

Sommaire

Mots tassé

Définition

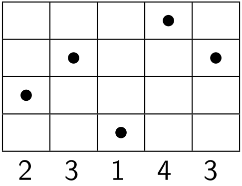
Un mot w sur l'alphabet $\{1, 2, ...n\}$ est un mot tassé si pour tout nombre $k > 1$ apparaissant dans w, $k - 1$ apparaît aussi dans w.

Mots tassé

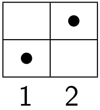
Définition

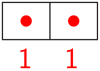
Un mot w sur l'alphabet $\{1, 2, \ldots n\}$ est un mot tassé si pour tout nombre $k > 1$ apparaissant dans w, $k - 1$ apparaît aussi dans w.

Une représentation : $\#$lignes $\leq$ $\#$colonnes

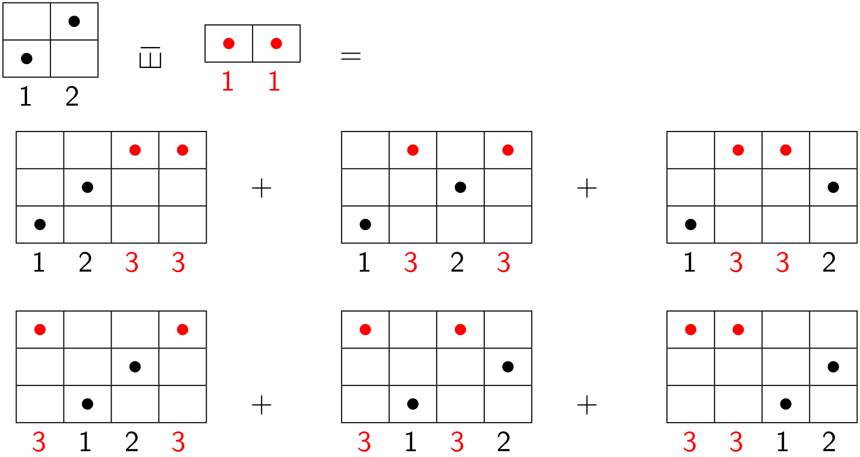


Produit de mélange sur les mots tassés

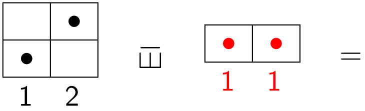




Produit de mélange sur les mots tassés

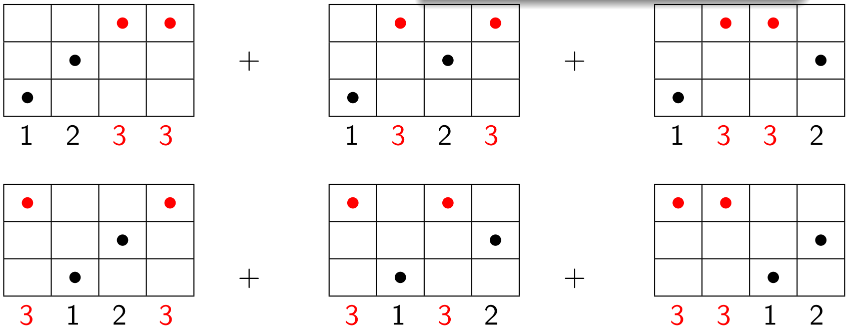


Produit de mélange sur les mots tassés

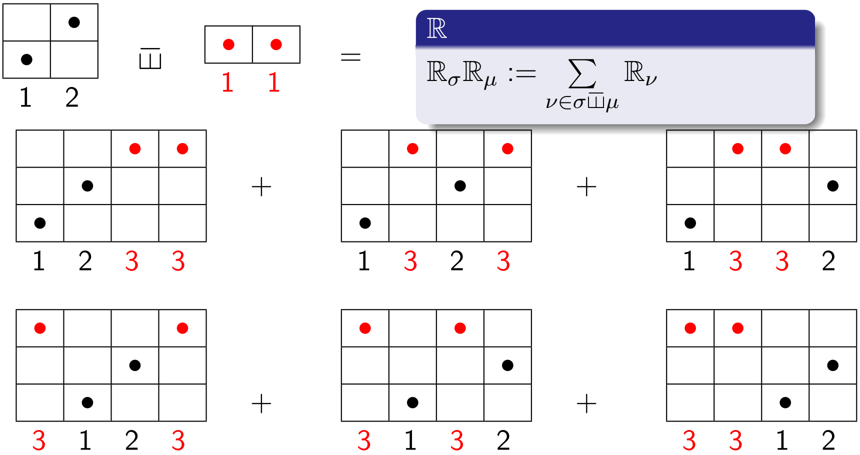


$\mathbb{R}$

$\mathbb{R}_{12}\mathbb{R}_{11} = \mathbb{R}_{1233} + \mathbb{R}_{1323} + \mathbb{R}_{1332} + \mathbb{R}_{3123} + \mathbb{R}_{3132} + \mathbb{R}_{3312}$



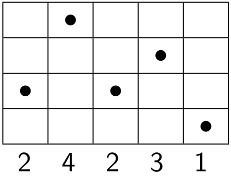
Produit de mélange sur les mots tassés



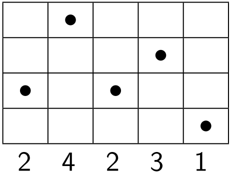
ℝ

$$\mathbb{R}_\sigma \mathbb{R}_\mu := \sum_{\nu \in \sigma \overline{⧢} \mu} \mathbb{R}_\nu$$

Déconcaténation

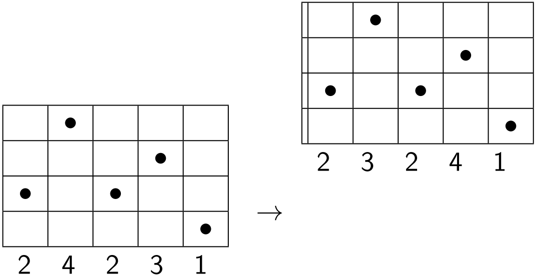


Déconcaténation

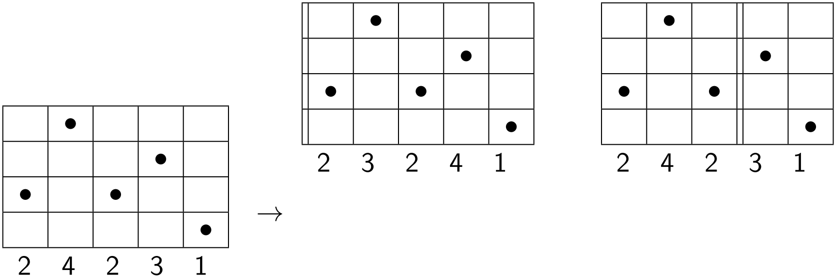


$\rightarrow$

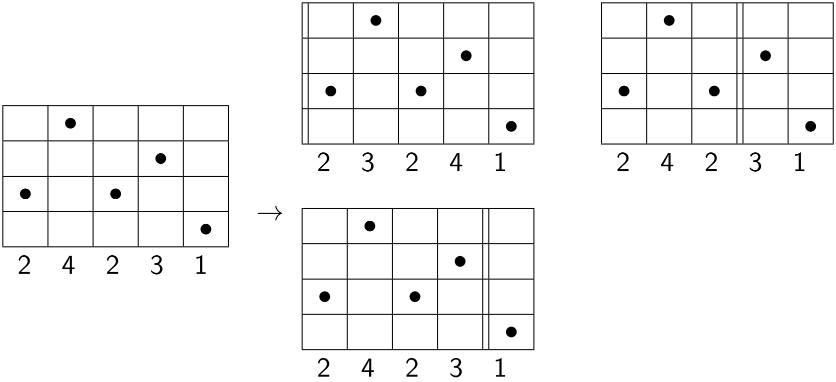
Déconcaténation



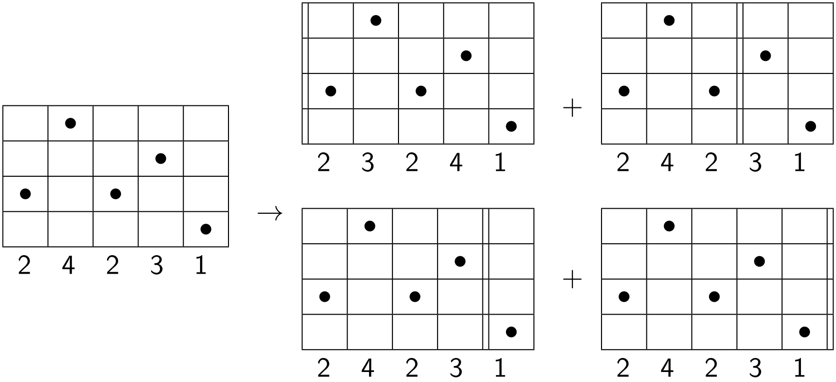
Déconcaténation



Déconcaténation

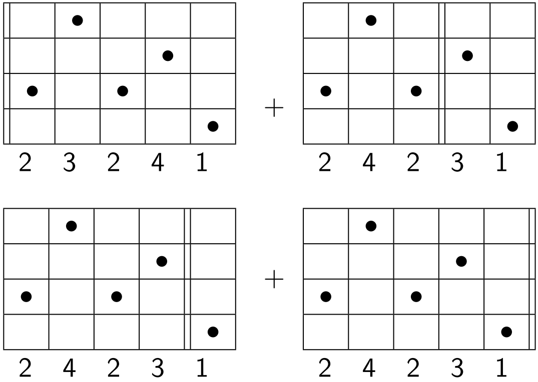


Déconcaténation



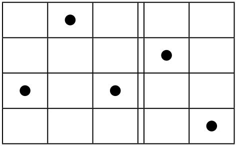
Déconcaténation

$\mathbb{R}_{24231}$ $\rightarrow$



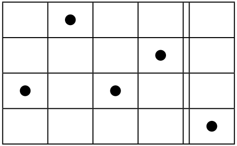
Déconcaténation

$$\mathbb{R}_{24231} \xrightarrow{\Delta} \mathbb{R}_\epsilon \otimes \mathbb{R}_{24231} +$$



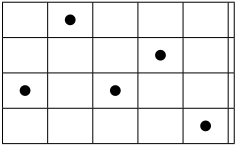
2 4 2 3 1

$+$



2 4 2 3 1

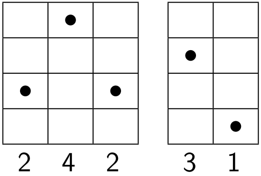
$+$

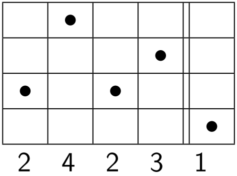


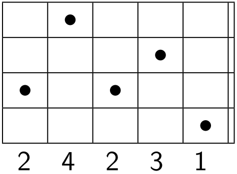
2 4 2 3 1

Déconcaténation

$$\mathbb{R}_{24231} \xrightarrow{\Delta} \mathbb{R}_{\epsilon} \otimes \mathbb{R}_{24231}$$

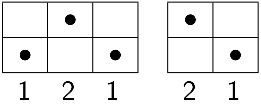
$+$ 

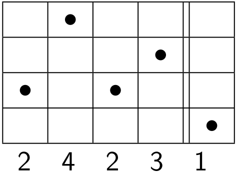


$+$ 

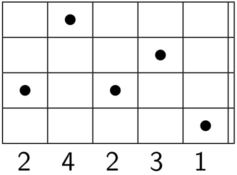
Déconcaténation

$$\mathbb{R}_{24231} \xrightarrow{\Delta} \mathbb{R}_{\epsilon} \otimes \mathbb{R}_{24231} +$$



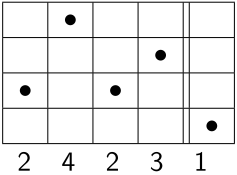


$+$

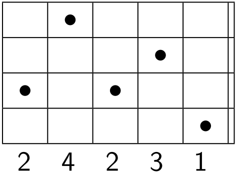


Déconcaténation

$$\mathbb{R}_{24231} \xrightarrow{\Delta} \mathbb{R}_{\epsilon} \otimes \mathbb{R}_{24231} + \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_{21}$$



$+$



Déconcaténation

$$\mathbb{R}_{24231} \xrightarrow{\Delta} \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\epsilon} \otimes \mathbb{R}_{24231} & + & \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_{21} \\ \mathbb{R}_{1312} \otimes \mathbb{R}_{1} & + & \mathbb{R}_{24231} \otimes \mathbb{R}_{\epsilon} \end{array}$$

Sommaire

Demis produits et coproduits

$$ua \sqcup\!\sqcup\, vb = (u \sqcup\!\sqcup\, vb)a + (ua \sqcup\!\sqcup\, v)b$$

$$deconcat(w = w_1 w_2 \ldots w_n) = 1 \otimes w + w_1 \otimes w_2 \ldots w_n + \ldots + w \otimes 1$$

Demis produits et coproduits

$$\begin{aligned} ua \sqcup\!\sqcup\, vb &= (u \sqcup\!\sqcup\, vb)a + (ua \sqcup\!\sqcup\, v)b \\ &= ua \prec vb + ua \succ vb \end{aligned}$$

$$deconcat(w = w_1 w_2 ... w_n) = 1 \otimes w + w_1 \otimes w_2 ... w_n + ... + w \otimes 1$$

Demis produits et coproduits

$$\mathbb{R}_{ua}\mathbb{R}_{vb} = \mathbb{R}_{ua} \prec \mathbb{R}_{vb} + \mathbb{R}_{ua} \succ \mathbb{R}_{vb}$$

$$deconcat(w = w_1 w_2 \ldots w_n) = 1 \otimes w + w_1 \otimes w_2 \ldots w_n + \ldots + w \otimes 1$$

Demis produits et coproduits

$$\mathbb{R}_{ua}\mathbb{R}_{vb} = \mathbb{R}_{ua} \prec \mathbb{R}_{vb} + \mathbb{R}_{ua} \succ \mathbb{R}_{vb}$$

$$\begin{aligned} deconcat(w = w_1 w_2 \dots w_n) =& 1 \otimes w + w_1 \otimes w_2 \dots w_n + \dots + w \otimes 1 \\ =& \sum_{\substack{i \in [|0,k|], \\ w_k = fst(max(w))}} w_1 \dots w_i \otimes w_{i+1} \dots w_n + \\ & \sum_{\substack{i \in [|k'+1,n|], \\ w_{k'} = last(max(w))}} w_1 \dots w_i \otimes w_{i+1} \dots w_n \\ =& deconcat(w_1 \dots w_k) + deconcat(w_{k'+1} \dots w_n) \end{aligned}$$

Demis produits et coproduits

$$\mathbb{R}_{ua}\mathbb{R}_{vb} = \mathbb{R}_{ua} \prec \mathbb{R}_{vb} + \mathbb{R}_{ua} \succ \mathbb{R}_{vb}$$

$$\Delta(\mathbb{R}_w) = 1 \otimes \mathbb{R}_w + \Delta_{\prec}(\mathbb{R}_w) + \Delta_{\succ}(\mathbb{R}_w) + \mathbb{R}_w \otimes 1$$
$$\bar{\Delta}(\mathbb{R}_w) = \Delta_{\prec}(\mathbb{R}_w) + \Delta_{\succ}(\mathbb{R}_w)$$

Définitions

Élément primitif

P est un élément primitif $\iff \bar{\Delta}(P) = 0$

Ex : $\mathbb{R}_{1213} - \mathbb{R}_{2321}$

Élément totalement primitif

P est un élément totalement primitif $\iff \Delta_{\prec}(P) = \Delta_{\succ}(P) = 0$

Ex : $\mathbb{R}_{1232} - \mathbb{R}_{1231} + \mathbb{R}_{2132} - \mathbb{R}_{2131}$

Notations

Soit A une algèbre bidendriforme

$$Prim(A) = Ker(\tilde{\Delta}),$$

$$Prim_{tot}(A) = Ker(\Delta_{\prec}) \bigcap Ker(\Delta_{\succ}),$$

$$F(z) = \sum_{n=1}^{+\inf} dim(A) z^n,$$

$$T(z) = \sum_{n=1}^{+\inf} dim(Prim((A)_n)) z^n,$$

$$P(z) = \sum_{n=1}^{+\inf} dim(Prim_{tot}((A)_n)) z^n.$$

Théorèmes

Théorème Carier Milnor-Moore version bidendriforme

Soit A une algèbre de Hopf bidendriforme. A est généré librement par $Prim_{tot}(A)$ en tant que bigèbre bidendriforme. De plus nous avons les égalités suivantes sur les séries :

$$T(z) = \frac{F(z)}{F(z)+1}, \qquad P(z) = \frac{F(z)}{(F(z)+1)^2}.$$

Remarques

Ces relations peuvent aussi s'écrire de la magnière suivante :

$$F(z) = \frac{T(z)}{1-T(z)}, \qquad T(z) = P(z)(1+F(z)).$$

Théorèmes

Corolaire du Théorème Carier Milnor-Moore version dendriforme

Soit A une algèbre de Hopf bidendriforme. $Prim(A)$ est généré librement par $Prim_{tot}(A)$ en tant que algèbre de brace avec l'opération n-multilinéaire suivante :

$$< p_1, ..., p_{n-1}; p_n >= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-1-i}$$

$$(p_1 \prec (p_2 \prec (... \prec p_i)...) \succ p_n \prec (...(p_{i+1} \succ p_{i+2}) \succ ...) \succ p_{n-1}).$$

Théorèmes

Corolaire du Théorème Carier Milnor-Moore version dendriforme

Soit A une algèbre de Hopf bidendriforme. $Prim(A)$ est généré librement par $Prim_{tot}(A)$ en tant que algèbre de brace avec l'opération n-multilinéaire suivante :

$$< p_1, ..., p_{n-1}; p_n >= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-1-i}$$

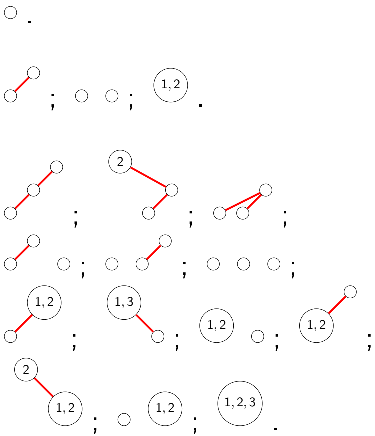
$$(p_1 \prec (p_2 \prec (... \prec p_i)...) \succ p_n \prec (...(p_{i+1} \succ p_{i+2}) \succ ...) \succ p_{n-1}).$$

$$\begin{aligned} < R_1, R_{12} - R_{21}, R_1; R_{11} > = & (R_1 \prec ((R_{12} - R_{21}) \prec R_1)) \succ R_{11} \\ & - (R_1 \prec (R_{12} - R_{21})) \succ R_{11} \prec R_1 \\ & + R_1 \succ R_{11} \prec ((R_{12} - R_{21}) \succ R_1) \\ & - R_{11} \prec (R_1 \succ ((R_{12} - R_{21}) \succ R_1)) \end{aligned}$$

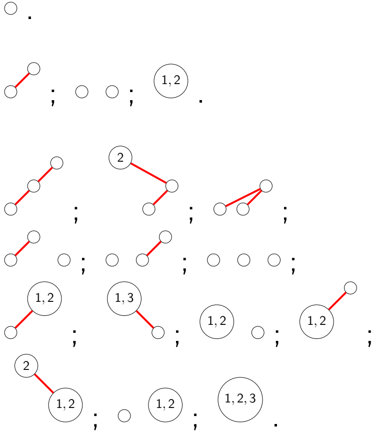
Sommaire

La suite au tableau !

Les premiers arbres



Les premiers arbres



1

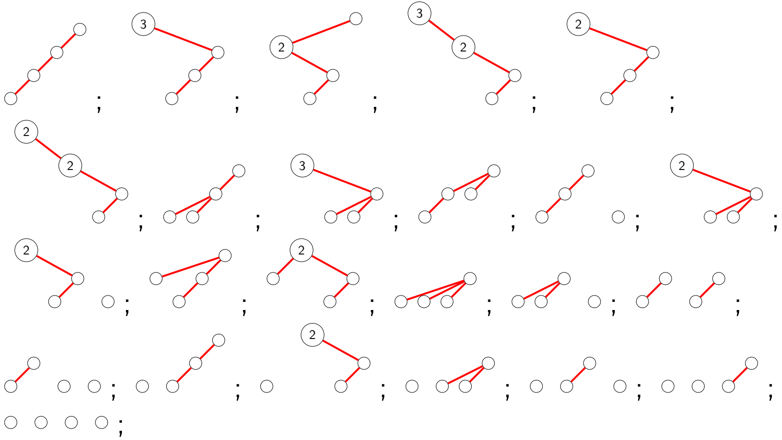
12; 21; 11

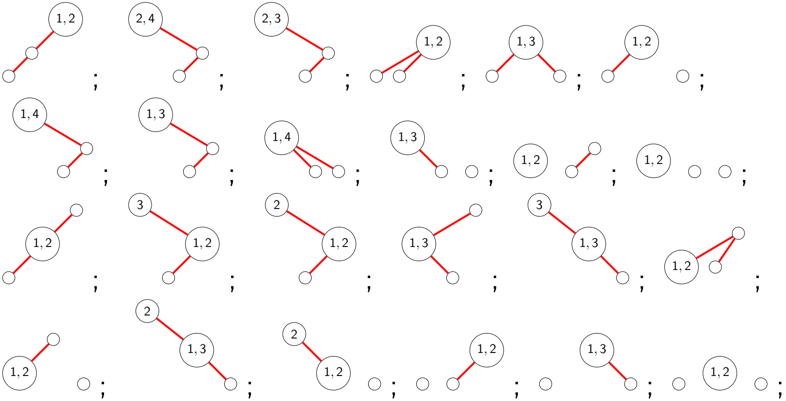
123; 132; 213;

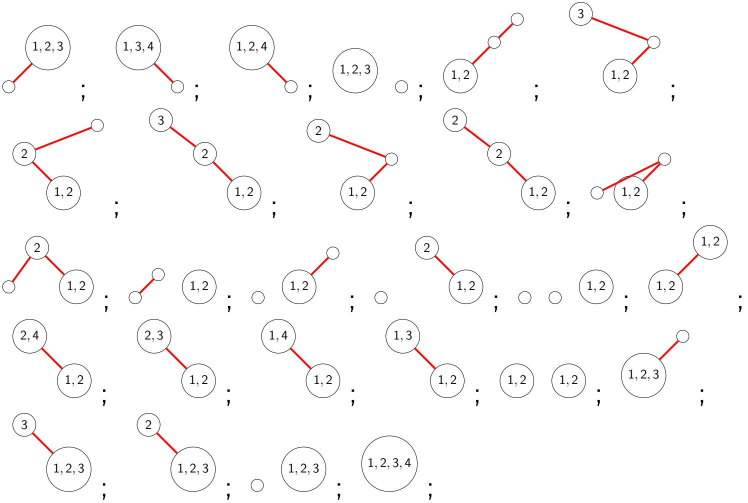
231; 312; 321;

122; 212; 221; 112;

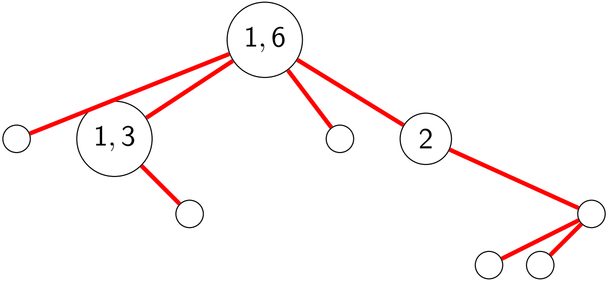
121; 211; 111.




1, 2 ; 2, 4 ; 2, 3 ; 1, 2 ; 1, 3 ; 1, 2 ;
1, 4 ; 1, 3 ; 1, 4 ; 1, 3 ; 1, 2 ; 1, 2 ;
1, 2 ; 3 1, 2 ; 2 1, 2 ; 1, 3 ; 3 1, 3 ; 1, 2 ;
1, 2 ; 2 1, 3 ; 2 1, 2 ; 1, 2 ; 1, 3 ; 1, 2 ;


1, 2, 3 ; 1, 3, 4 ; 1, 2, 4 ; 1, 2, 3 ; 1, 2 ; 3 1, 2 ;
2 1, 2 ; 3 2 1, 2 ; 2 1, 2 ; 2 2 1, 2 ; 1, 2 ;
2 1, 2 ; 1, 2 ; 1, 2 ; 2 1, 2 ; 1, 2 ; 1, 2 1, 2 ;
2, 4 1, 2 ; 2, 3 1, 2 ; 1, 4 1, 2 ; 1, 3 1, 2 ; 1, 2 1, 2 ; 1, 2, 3 ;
3 1, 2, 3 ; 2 1, 2, 3 ; 1, 2, 3 ; 1, 2, 3, 4 ;

Un exemple

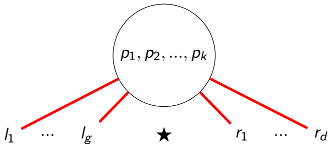


Changement de base

$$\mathbb{P}_{\bigcirc} := \mathbb{R}_1,$$

$$\mathbb{P}_{t_1,\dots,t_k} := (\dots(\mathbb{P}_{t_k} \prec \dots) \prec \mathbb{P}_{t_2}) \prec \mathbb{P}_{t_1},$$

$\mathbb{P}$



$$:=< \mathbb{P}_{l_1}, \mathbb{P}_{l_2}, \dots, \mathbb{P}_{l_k}; \Phi_{p_1,\dots,p_k}(\mathbb{P}_{r_1,\dots,r_d}) > .$$

$\Phi_{p_1,\dots,p_k}(\mathbb{R}_u) = \mathbb{R}_{u_1 \dots u_{p_1-1} m u_{p_1} \dots u_{p_2-2} m u_{p_2-1} \dots \dots u_{p_k-k} m u_{p_k-k+1}}$ où
$m = max(u) + 1$