Un auto-morphisme bidendriforme de WQSym

Séminaire ULCO

Hugo Mlodecki

Directeurs:
Florent Hivert
Viviane Pons

18 Mars 2021

Exemples d'algèbres de Hopf

- Arbres binaires, **PBT**, Loday-Ronco
- Fonctions symétriques non-commutatives, **Sym**
- Fonctions quasi-symétriques, *QSym*
- Permutations, **FQSym**, Malvenuto-Reutenauer
- Mots tassés, **WQSym**, Hivert

Mots tassés

Définition

Un mot sur l'alphabet $\mathbb{N}_{>0}$ est dit **tassé** si toutes les lettres de 1 à son maximum m apparaissent au moins une fois.

Mots tassés

Définition

Un mot sur l'alphabet $\mathbb{N}_{>0}$ est dit **tassé** si toutes les lettres de 1 à son maximum *m* apparaissent au moins une fois.

Mots tassés de tailles 0, 1, 2 et 3

- ϵ

Mots tassés

Définition

Un mot sur l'alphabet $\mathbb{N}_{>0}$ est dit **tassé** si toutes les lettres de 1 à son maximum m apparaissent au moins une fois.

Mots tassés de tailles 0, 1, 2 et 3

- ϵ
- 1

Mots tassés

Définition

Un mot sur l'alphabet $\mathbb{N}_{>0}$ est dit **tassé** si toutes les lettres de 1 à son maximum m apparaissent au moins une fois.

Mots tassés de tailles 0, 1, 2 et 3

- ϵ
- 1
- 12 21 11

Mots tassés

Définition

Un mot sur l'alphabet $\mathbb{N}_{>0}$ est dit **tassé** si toutes les lettres de 1 à son maximum *m* apparaissent au moins une fois.

Mots tassés de tailles 0, 1, 2 et 3

- ϵ
- 1
- 12 21 11
- 123 132 213 231 312 321
  122 212 221 112 121 211 111

Mots tassés

Définition

Un mot sur l'alphabet $\mathbb{N}_{>0}$ est dit **tassé** si toutes les lettres de 1 à son maximum m apparaissent au moins une fois.

Mots tassés de tailles 0, 1, 2 et 3

- ϵ
- 1
- 12 21 11
- 123 132 213 231 312 321
  122 212 221 112 121 211 111

Mots tassés de taille n [OEIS A000670]

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbf{PW}_n$	1	3	13	75	541	4683	47293	545835

Tassement

Exemple

$24154 \notin \mathbf{PW}$

Tassement

Exemple

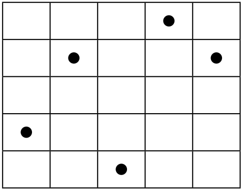
$24154 \notin \mathbf{PW}$ mais $pack(24154) = 23143 \in \mathbf{PW}$

Tassement

Exemple

$24154 \notin \mathbf{PW}$ mais $pack(24154) = 23143 \in \mathbf{PW}$

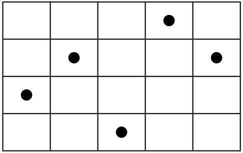
Une représentation : $\#\text{lignes} \leq \#\text{colonnes}$



2 4 1 5 4

retrait lignes vides

$\rightarrow$ pack $\rightarrow$



2 3 1 4 3

Algèbre de Hopf

Exemple

WQSym

- $3112 + 212 - 3\ 212341 - \frac{5}{3}\ 111$

Algèbre de Hopf

Exemple

WQSym

- $\mathbb{R}_{3112} + \mathbb{R}_{212} - 3\mathbb{R}_{212341} - \frac{5}{3}\mathbb{R}_{111}$

Algèbre de Hopf

Exemple

WQSym

- $\mathbb{R}_{3112} + \mathbb{R}_{212} - 3\mathbb{R}_{212341} - \frac{5}{3}\mathbb{R}_{111}$
- $\mathbb{R}_{12}\mathbb{R}_{11} = \mathbb{R}_{1233} + \mathbb{R}_{1323} + \mathbb{R}_{1332} + \mathbb{R}_{3123} + \mathbb{R}_{3132} + \mathbb{R}_{3312}$

Algèbre de Hopf

Exemple

WQSym

- $\mathbb{R}_{3112} + \mathbb{R}_{212} - 3\mathbb{R}_{212341} - \frac{5}{3}\mathbb{R}_{111}$
- $\mathbb{R}_{12}\mathbb{R}_{11} = \mathbb{R}_{1233} + \mathbb{R}_{1323} + \mathbb{R}_{1332} + \mathbb{R}_{3123} + \mathbb{R}_{3132} + \mathbb{R}_{3312}$
- $\Delta(\mathbb{R}_{24231}) = \mathbb{R}_{\epsilon} \otimes \mathbb{R}_{24231} + \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_{21} + \mathbb{R}_{1312} \otimes \mathbb{R}_{1} + \mathbb{R}_{24231} \otimes \mathbb{R}_{\epsilon}$

Algèbre de Hopf

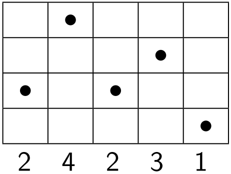
Exemple

WQSym

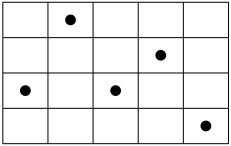
- $\mathbb{R}_{3112} + \mathbb{R}_{212} - 3\mathbb{R}_{212341} - \frac{5}{3}\mathbb{R}_{111}$
- $\mathbb{R}_{12}\mathbb{R}_{11} = \mathbb{R}_{1233} + \mathbb{R}_{1323} + \mathbb{R}_{1332} + \mathbb{R}_{3123} + \mathbb{R}_{3132} + \mathbb{R}_{3312}$
- $\Delta(\mathbb{R}_{24231}) = \mathbb{R}_{\epsilon} \otimes \mathbb{R}_{24231} + \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_{21} + \mathbb{R}_{1312} \otimes \mathbb{R}_{1} + \mathbb{R}_{24231} \otimes \mathbb{R}_{\epsilon}$

- Un produit associatif unitaire $\cdot$
- Un coproduit coassociatif counitaire Δ
- La relation de Hopf $\Delta(a \cdot b) = \Delta(a) \cdot \Delta(b)$

Déconcaténation réduite

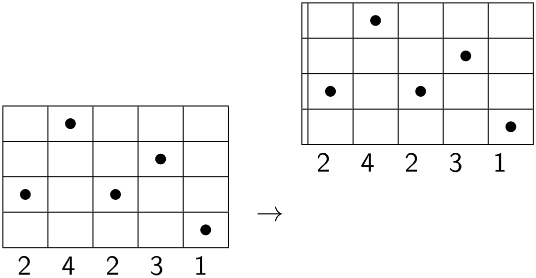


Déconcaténation réduite

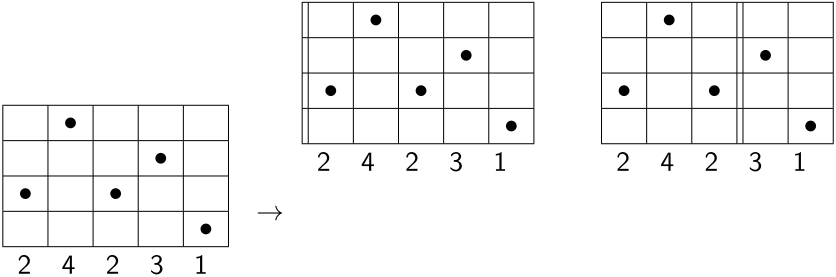


2 4 2 3 1 $\to$

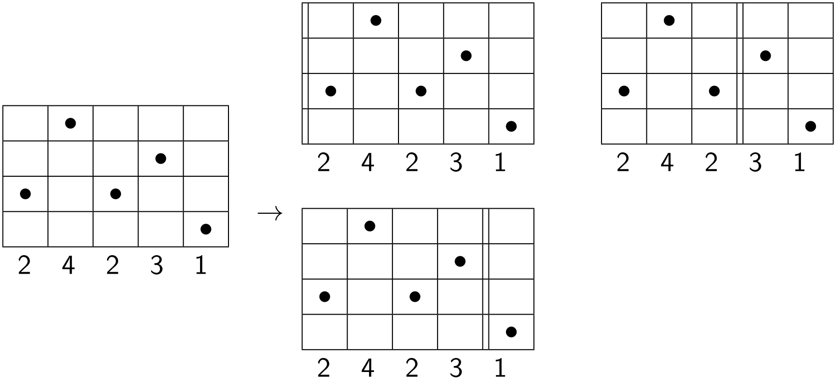
Déconcaténation réduite



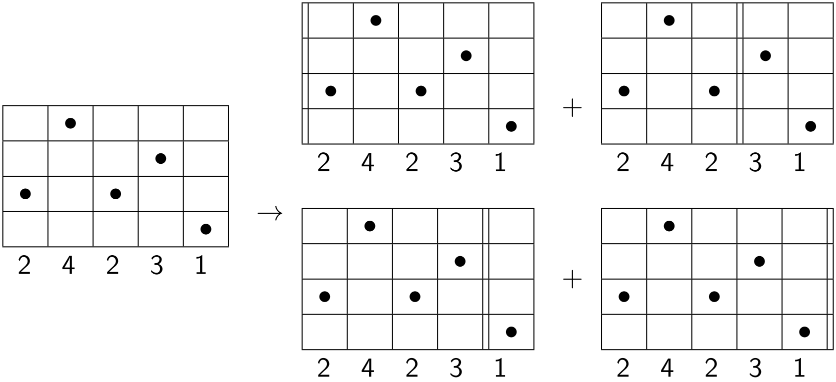
Déconcaténation réduite



Déconcaténation réduite

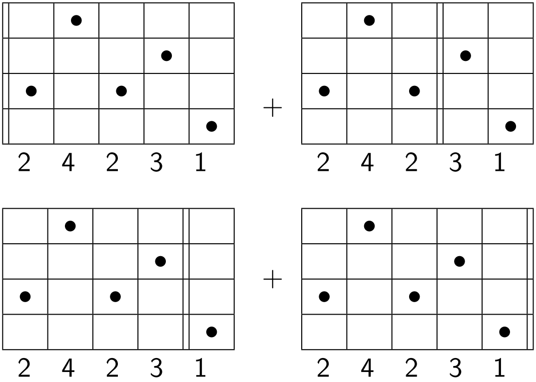


Déconcaténation réduite



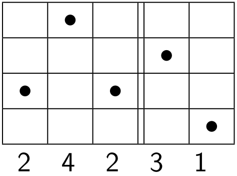
Déconcaténation réduite

$\mathbb{R}_{24231} \to$

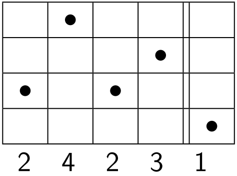


Déconcaténation réduite

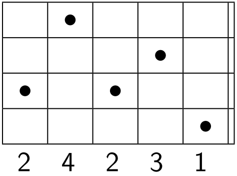
$\mathbb{R}_\epsilon \otimes \mathbb{R}_{24231}$ $+$



$\mathbb{R}_{24231} \xrightarrow{\Delta}$

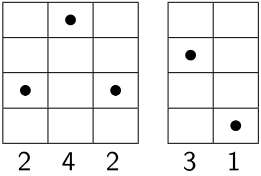


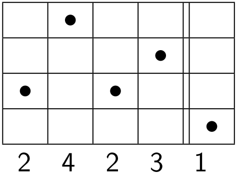
$+$



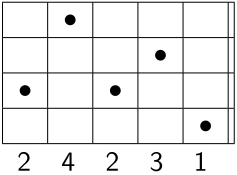
Déconcaténation réduite

$$\mathbb{R}_{24231} \xrightarrow{\Delta} \mathbb{R}_{\epsilon} \otimes \mathbb{R}_{24231} + $$



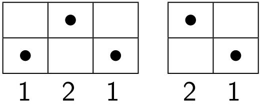


$+$

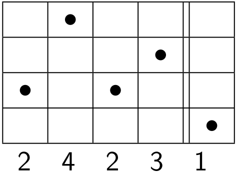


Déconcaténation réduite

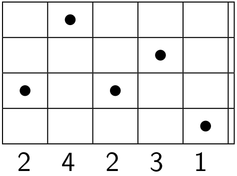
$\mathbb{R}_\epsilon \otimes \mathbb{R}_{24231}$ $+$



$\mathbb{R}_{24231}$ $\overset{\Delta}{\to}$

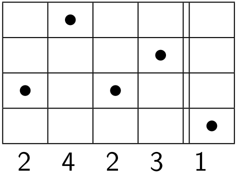


$+$

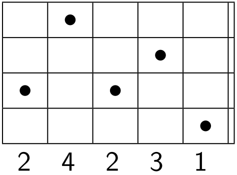


Déconcaténation réduite

$$\mathbb{R}_{24231} \xrightarrow{\Delta} \mathbb{R}_{\epsilon} \otimes \mathbb{R}_{24231} + \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_{21}$$



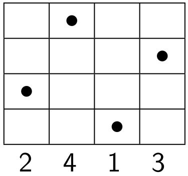
$+$



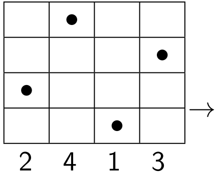
Déconcaténation réduite

$$\mathbb{R}_{24231} \xrightarrow{\Delta} \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\epsilon} \otimes \mathbb{R}_{24231} & + & \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_{21} \\ \mathbb{R}_{1312} \otimes \mathbb{R}_{1} & + & \mathbb{R}_{24231} \otimes \mathbb{R}_{\epsilon} \end{array}$$

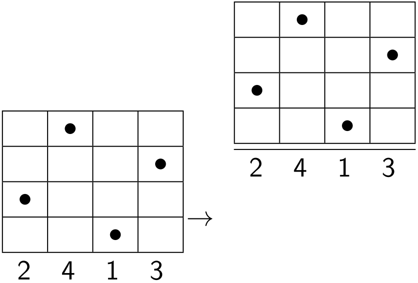
Désassemblage horizontale



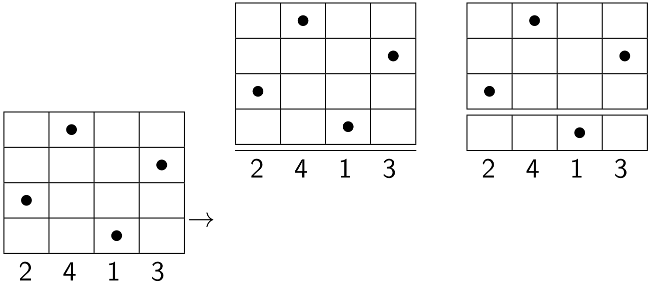
Désassemblage horizontale



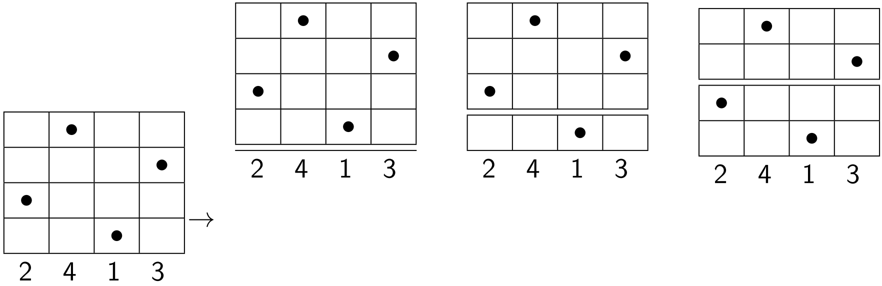
Désassemblage horizontale



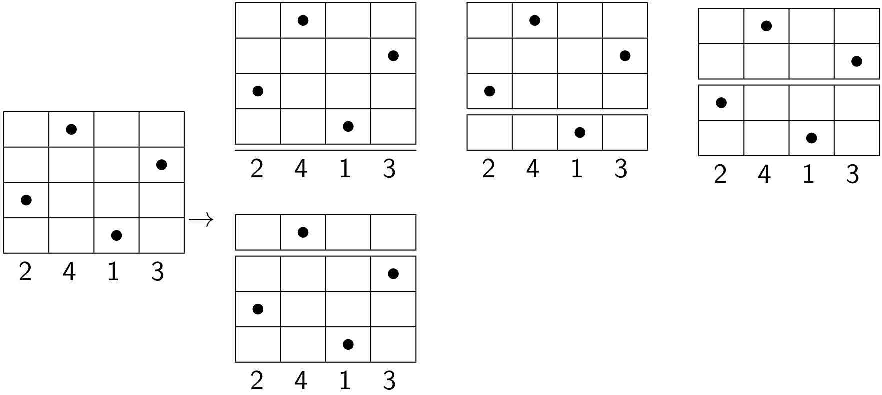
Désassemblage horizontale



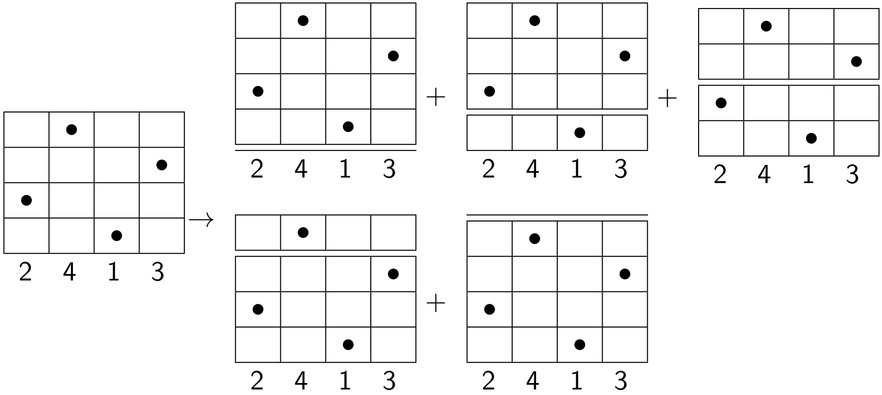
Désassemblage horizontale



Désassemblage horizontale

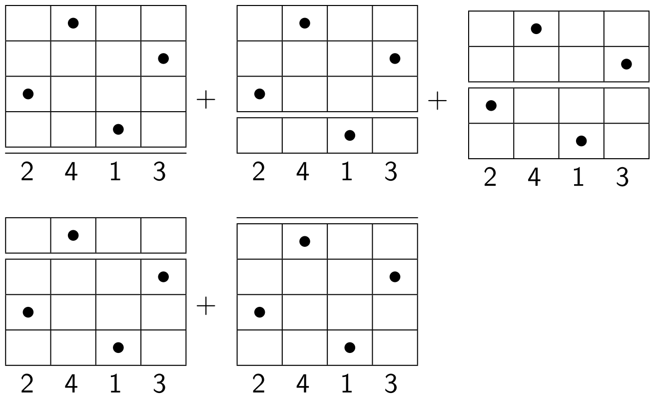


Désassemblage horizontale



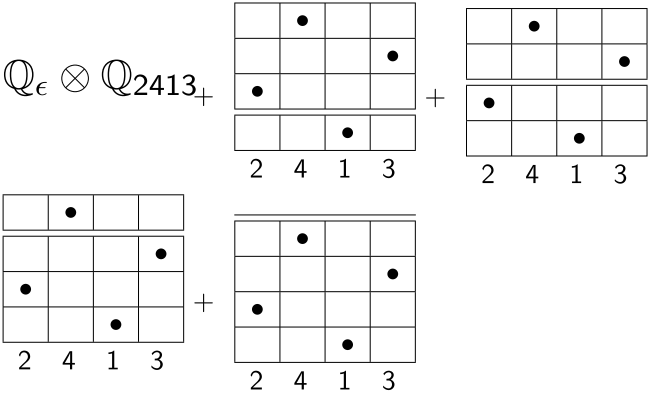
Désassemblage horizontale

$$\mathbb{Q}_{2413} \xrightarrow{\Delta}$$



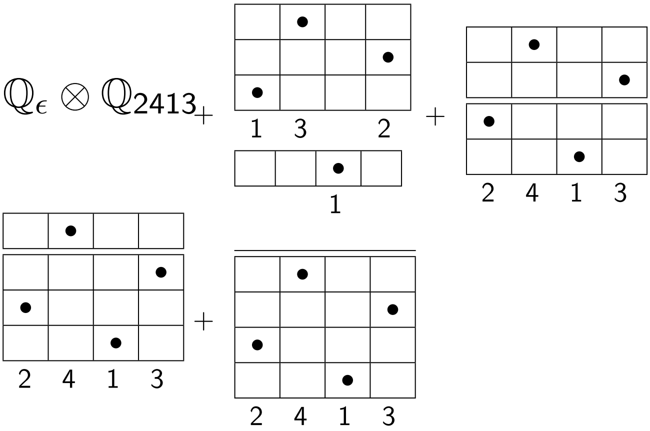
Désassemblage horizontale

$\mathbb{Q}_{2413} \xrightarrow{\Delta}$



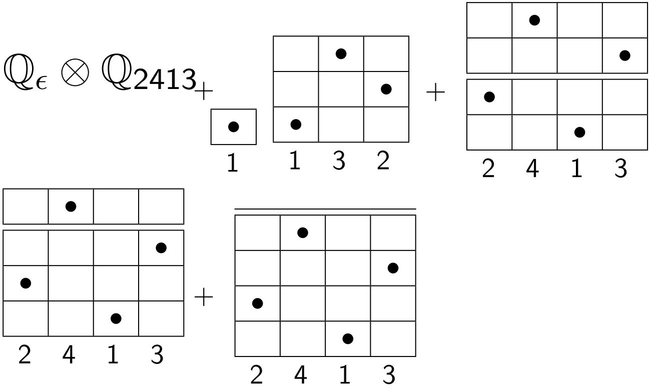
Désassemblage horizontale

$$\mathbb{Q}_{2413} \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Q}_{\epsilon} \otimes \mathbb{Q}_{2413} +$$



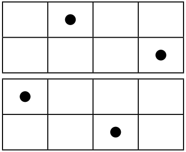
Désassemblage horizontale

$$\mathbb{Q}_{2413} \xrightarrow{\Delta}$$



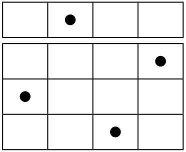
Désassemblage horizontale

$$\mathbb{Q}_{\epsilon} \otimes \mathbb{Q}_{2413} + \mathbb{Q}_{1} \otimes \mathbb{Q}_{132} +$$



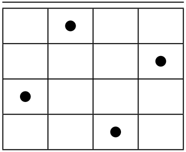
2 4 1 3

$$\mathbb{Q}_{2413} \xrightarrow{\Delta}$$



2 4 1 3

$+$



2 4 1 3

Désassemblage horizontale

$$\mathbb{Q}_{2413} \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Q}_{\epsilon} \otimes \mathbb{Q}_{2413} + \mathbb{Q}_{1} \otimes \mathbb{Q}_{132} + \mathbb{Q}_{21} \otimes \mathbb{Q}_{21} + \mathbb{Q}_{213} \otimes \mathbb{Q}_{1} + \mathbb{Q}_{2413} \otimes \mathbb{Q}_{\epsilon}$$

Auto-dualité

- $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ bases de **WQSym** et **WQSym***

Auto-dualité

- $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ bases de **WQSym** et **WQSym***
- 2001 Duchanp-Hivert-Thibon conjecturent l'auto-dualité de **WQSym**

Auto-dualité

- $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ bases de **WQSym** et **WQSym***
- 2001 Duchanp-Hivert-Thibon conjecturent l'auto-dualité de **WQSym**
- 2005 Foissy démontre l'auto-dualité des bigèbre bidendriforme (rigidité)

Auto-dualité

- $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ bases de **WQSym** et **WQSym***
- 2001 Duchanp-Hivert-Thibon conjecturent l'auto-dualité de **WQSym**
- 2005 Foissy démontre l'auto-dualité des bigèbre bidendriforme (rigidité)
- Pas d'isomorphisme explicite

Demis coproduits

Exemple de coproduits gauche et droit

- $\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{24\underline{2}\underline{5}531}) = \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_{\underline{3}321} + \mathbb{R}_{121\underline{3}3} \otimes \mathbb{R}_{21} + \mathbb{R}_{131\underline{4}42} \otimes \mathbb{R}_{1}$

Demis coproduits

Exemple de coproduits gauche et droit

- $\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{24\underline{55}31}) = \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_{\underline{33}21} + \mathbb{R}_{121\underline{33}} \otimes \mathbb{R}_{21} + \mathbb{R}_{131\underline{44}2} \otimes \mathbb{R}_{1}$
- $\Delta_{\prec}(\mathbb{R}_{24\underline{55}31}) = \mathbb{R}_{121\underline{33}} \otimes \mathbb{R}_{21} + \mathbb{R}_{131\underline{44}2} \otimes \mathbb{R}_{1}$
- $\Delta_{\succ}(\mathbb{R}_{24\underline{55}31}) = \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_{\underline{33}21}$

Demis coproduits

Définitions

- $\Delta_{\prec}(\mathbb{R}_u) := \sum^{n-1}_{\substack{i=k \\ \{u_1,\dots,u_i\}\cap\{u_{i+1},\dots,u_n\}=\emptyset \\ u_k=\max(u)}} \mathbb{R}_{pack(u_1\cdots u_i)} \otimes \mathbb{R}_{pack(u_{i+1}\cdots u_n)}$,
- $\Delta_{\succ}(\mathbb{R}_u) := \sum^{k-1}_{\substack{i=1 \\ \{u_1,\dots,u_i\}\cap\{u_{i+1},\dots,u_n\}=\emptyset \\ u_k=\max(u)}} \mathbb{R}_{pack(u_1\cdots u_i)} \otimes \mathbb{R}_{pack(u_{i+1}\cdots u_n)}$

Exemple de coproduits gauche et droit

- $\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{24\underline{2}5\underline{5}31}) = \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_{\underline{3}321} + \mathbb{R}_{121\underline{33}} \otimes \mathbb{R}_{21} + \mathbb{R}_{131\underline{44}2} \otimes \mathbb{R}_{1}$
- $\Delta_{\prec}(\mathbb{R}_{24\underline{2}5\underline{5}31}) = \mathbb{R}_{121\underline{33}} \otimes \mathbb{R}_{21} + \mathbb{R}_{131\underline{44}2} \otimes \mathbb{R}_{1}$
- $\Delta_{\succ}(\mathbb{R}_{24\underline{2}5\underline{5}31}) = \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_{\underline{3}321}$

Bigèbre bidendriforme

Définition

- Raffinement de l'associativité et la coassociativité
  - 3 et 3 équations

Bigèbre bidendriforme

Définition

- Raffinement de l'associativité et la coassociativité
  - 3 et 3 équations
- Raffinement de la relation de Hopf
  - 4 équations

Bigèbre bidendriforme

Définition

- Raffinement de l'associativité et la coassociativité
  - 3 et 3 équations
- Raffinement de la relation de Hopf
  - 4 équations

Théorème [Foissy]

Si A est une bigèbre bidendriforme alors A est généré librement par $\mathrm{TPrim}(A)$ en tant qu'algèbre dendriforme.

Bigèbre bidendriforme

Définition

- Raffinement de l'associativité et la coassociativité
  - 3 et 3 équations
- Raffinement de la relation de Hopf
  - 4 équations

Théorème [Foissy]

Si A est une bigèbre bidendriforme alors A est généré librement par TPrim(A) en tant qu'algèbre dendriforme.

Séries

n	1	2	3	4	5	6	7	8
WQSym$_n$	1	3	13	75	541	4 683	47 293	545 835
TPrim$_n$	1	1	4	28	240	2 384	26 832	337 168

Bigèbre bidendriforme

Définition

- Raffinement de l'associativité et la coassociativité
  - 3 et 3 équations
- Raffinement de la relation de Hopf
  - 4 équations

Théorème [Foissy]

Si A est une bigèbre bidendriforme alors A est généré librement par $\mathrm{TPrim}(A)$ en tant qu'algèbre dendriforme.

Corollaire

WQSym est auto-duale.

Définitions

Élément primitif

P est un éléments primitif $\iff \tilde{\Delta}(P) = 0$

Ex : $\mathbb{R}_{1213} - \mathbb{R}_{2321}$

Définitions

Élément primitif

P est un éléments primitif $\iff$ $\tilde{\Delta}(P) = 0$

Ex : $\mathbb{R}_{1213} - \mathbb{R}_{2321}$

$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{1213}) = \Delta_{\succ}(\mathbb{R}_{1213}) = \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_{1}$

$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{2321}) = \Delta_{\prec}(\mathbb{R}_{2321}) = \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_{1}$

Définitions

Élément primitif

P est un éléments primitif $\iff \tilde{\Delta}(P) = 0$

Ex : $\mathbb{R}_{1213} - \mathbb{R}_{2321}$

$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{1213}) = \Delta_{\succ}(\mathbb{R}_{1213}) = \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_{1}$

$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{2321}) = \Delta_{\prec}(\mathbb{R}_{2321}) = \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_{1}$

Élément totalement primitif

P est une élément totalement primitif $\iff \Delta_{\prec}(P) = \Delta_{\succ}(P) = 0$

Ex : $\mathbb{R}_{12443} - \mathbb{R}_{21443} - \mathbb{R}_{23441} + \mathbb{R}_{32441}$

Définitions

Élément primitif

P est un éléments primitif $\iff \tilde{\Delta}(P) = 0$

Ex : $\mathbb{R}_{1213} - \mathbb{R}_{2321}$

$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{1213}) = \Delta_{\succ}(\mathbb{R}_{1213}) = \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_1$

$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{2321}) = \Delta_{\prec}(\mathbb{R}_{2321}) = \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_1$

Élément totalement primitif

P est une élément totalement primitif $\iff \Delta_{\prec}(P) = \Delta_{\succ}(P) = 0$

Ex : $\mathbb{R}_{12443} - \mathbb{R}_{21443} - \mathbb{R}_{23441} + \mathbb{R}_{32441}$

$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{12443}) = \mathbb{R}_{1233} \otimes \mathbb{R}_1 \quad \mathbb{R}_{12} \otimes \mathbb{R}_{221} + \mathbb{R}_1 \otimes \mathbb{R}_{1332}$

$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{21443}) = \mathbb{R}_{2133} \otimes \mathbb{R}_1 \quad \mathbb{R}_{21} \otimes \mathbb{R}_{221} + \mathbb{R}_1 \otimes \mathbb{R}_{1332}$

$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{23441}) = \mathbb{R}_{1233} \otimes \mathbb{R}_1 \quad \mathbb{R}_{12} \otimes \mathbb{R}_{221} + \mathbb{R}_1 \otimes \mathbb{R}_{2331}$

$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{32441}) = \mathbb{R}_{2133} \otimes \mathbb{R}_1 \quad \mathbb{R}_{21} \otimes \mathbb{R}_{221} + \mathbb{R}_1 \otimes \mathbb{R}_{2331}$

Mon but

Isomorphisme bidendriforme explicite entre **WQSym** et sa duale

Mon but

Isomorphisme bidendriforme explicite entre **WQSym** et sa duale

$$\Updownarrow$$

Isomorphisme explicite entre TPrim(**WQSym**) et le dual

Mon but

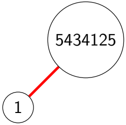
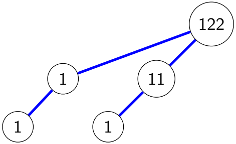
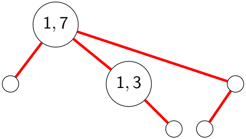
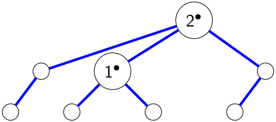
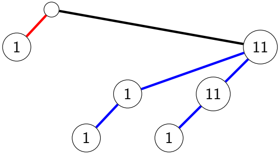
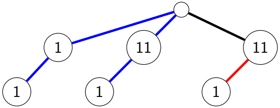
Isomorphisme bidendriforme explicite entre **WQSym** et sa duale

$$\Updownarrow$$

Isomorphisme explicite entre TPrim(**WQSym**) et le dual

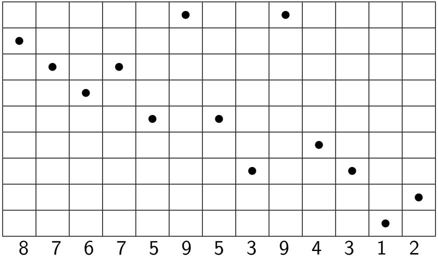
Construction de deux bases de totalement primitif
(dans **WQSym** et **WQSym***)

Forêts biplanes, représentation de décompositions

	Squelettes	
	Arbres tassés	
	Arbres bicolores	

Squelette rouge de 8767595394312

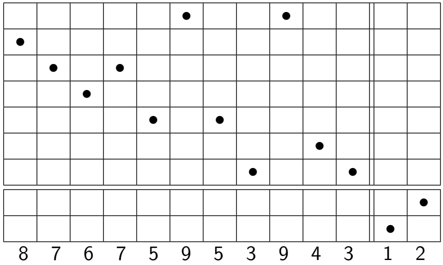
$F_{ske}(8767595394312)$



Squelette rouge de 8767595394312

$F_{ske}(8767595394312)$

Factorisation en descentes globales

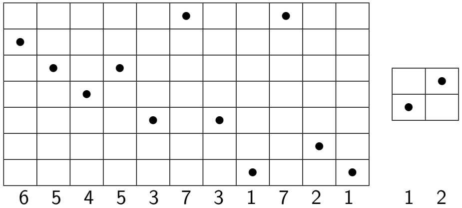


Squelette rouge de 8767595394312

$$F_{ske}(8767595394312) = T_{ske}(65453731721)\,T_{ske}(12)$$

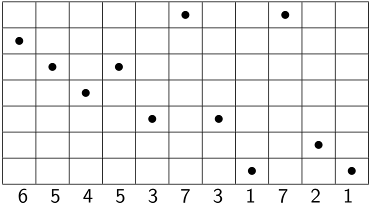
Factorisation en descentes globales

+ tassement



Squelette rouge de 8767595394312

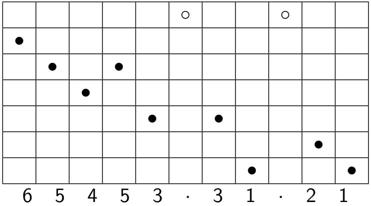
$$F_{ske}(8767595394312) = T_{ske}(65453731721)\,T_{ske}(12)$$



Squelette rouge de 8767595394312

$F_{ske}(8767595394312) =$
$T_{ske}(65453731721)\,T_{ske}(12)$

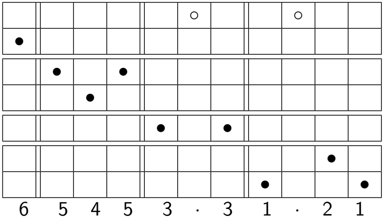
Retrait des lettres de valeur max



Squelette rouge de 8767595394312

$F_{ske}(8767595394312) =$
$T_{ske}(65453731721)\,T_{ske}(12)$

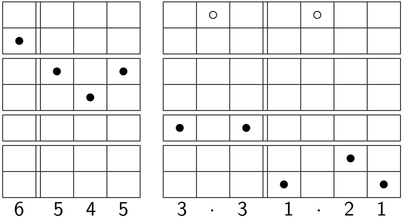
Factorisation en descentes globales



Squelette rouge de 8767595394312

$F_{ske}(8767595394312) = T_{ske}(65453731721)\,T_{ske}(12)$

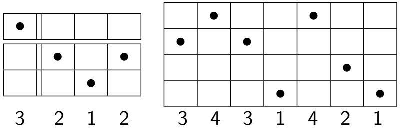
Distinction de deux groupes de facteurs



Squelette rouge de 8767595394312

$F_{ske}(8767595394312) =$
$T_{ske}(65453731721)\,T_{ske}(12)$

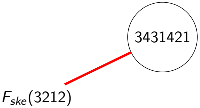
Remise des lettres de valeur max + tassement



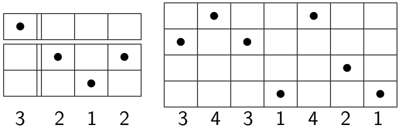
Squelette rouge de 8767595394312

$F_{ske}(8767595394312) =$
$T_{ske}(65453731721)\,T_{ske}(12) =$

3431421 est
Irréductible rouge



$T_{ske}(12)$

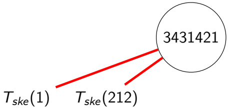


Irréductible rouge

Un mot tassé w est **rouge irréductible** si il n'est pas décomposable par cet algorithme.

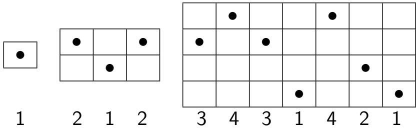
Squelette rouge de 8767595394312

$F_{ske}(8767595394312) =$
$T_{ske}(65453731721)\, T_{ske}(12) =$



$T_{ske}(12)$

On boucle

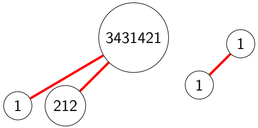


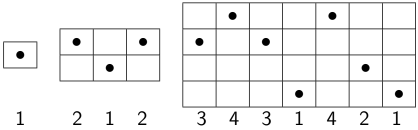
Irréductible rouge

Un mot tassé w est **rouge irréductible** si il n'est pas décomposable par cet algorithme.

Squelette rouge de 8767595394312

$F_{ske}(8767595394312) =$





Irréductible rouge

Un mot tassé w est **rouge irréductible** si il n'est pas décomposable par cet algorithme.

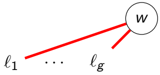
$\forall n, RougeIrréductible_n = \mathrm{TPrim}_n.$

Le début de la base $\mathbb{P}$

$$\mathbb{P}_{1} := \mathbb{R}_1,$$

$$\mathbb{P}_{t_1,\dots,t_k} := (\dots(\mathbb{P}_{t_k} \prec \dots) \prec \mathbb{P}_{t_2}) \prec \mathbb{P}_{t_1},$$

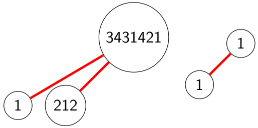
$\mathbb{P}$



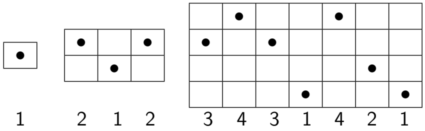
$$:= \langle \mathbb{P}_{\ell_1}, \mathbb{P}_{\ell_2}, \dots, \mathbb{P}_{\ell_g}; \mathbb{P}_{T(w)} \rangle.$$

Forêt rouge de 8767595394312

$F(8767595394312) =$

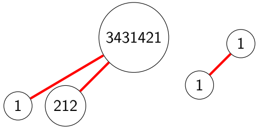


La partie droite!

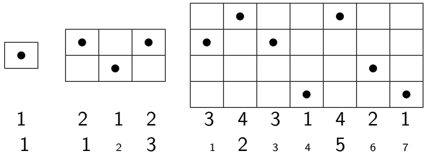


Forêt rouge de 8767595394312

$F(8767595394312) =$

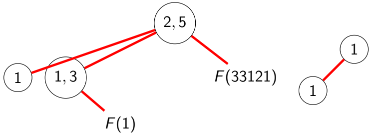


Positions des max

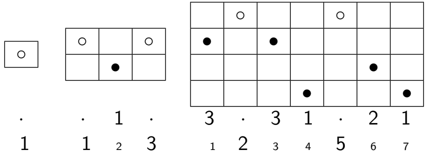


Forêt rouge de 8767595394312

$F(8767595394312) =$



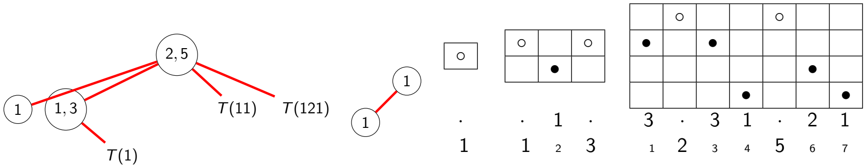
Fils droits



Forêt rouge de 8767595394312

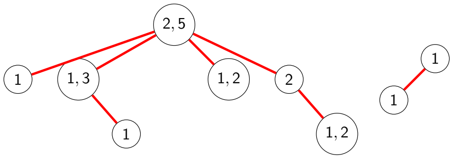
On reboucle

$F(8767595394312) =$



Forêt rouge de 8767595394312

$F(8767595394312) =$

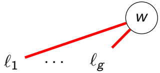


La base $\mathbb{P}$

$$\mathbb{P}_{1} := \mathbb{R}_1,$$

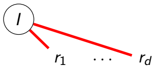
$$\mathbb{P}_{t_1,\dots,t_k} := (\dots(\mathbb{P}_{t_k} \prec \dots) \prec \mathbb{P}_{t_2}) \prec \mathbb{P}_{t_1},$$

$\mathbb{P}$



$$:= \langle \mathbb{P}_{\ell_1}, \mathbb{P}_{\ell_2}, \dots, \mathbb{P}_{\ell_g} ; \mathbb{P}_{T(w)} \rangle,$$

$\mathbb{P}$



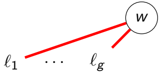
$$:= \Phi_I(\mathbb{P}_{r_1,\dots,r_d}).$$

La base $\mathbb{P}$

$$\mathbb{P}_{\textcircled{1}} := \mathbb{R}_1,$$

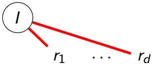
$$\mathbb{P}_{t_1,\dots,t_k} := (\dots(\mathbb{P}_{t_k} \prec \dots) \prec \mathbb{P}_{t_2}) \prec \mathbb{P}_{t_1},$$

$\mathbb{P}$



$$:= \langle \mathbb{P}_{\ell_1}, \mathbb{P}_{\ell_2}, \dots, \mathbb{P}_{\ell_g}; \mathbb{P}_{T(w)} \rangle,$$

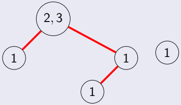
$\mathbb{P}$



$$:= \Phi_I(\mathbb{P}_{r_1,\dots,r_d}).$$

Exemple

$\mathbb{P}$



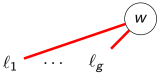
$$= \mathbb{R}_{235541} - \mathbb{R}_{245531} - \mathbb{R}_{244531} - \mathbb{R}_{245431} - \mathbb{R}_{254431} + \mathbb{R}_{325541} - \mathbb{R}_{425531} - \mathbb{R}_{524431} + \mathbb{R}_{352541} - \mathbb{R}_{452531} + \mathbb{R}_{355241} - \mathbb{R}_{455231} + \mathbb{R}_{344521} + \mathbb{R}_{345421} + \mathbb{R}_{354421} + \mathbb{R}_{534421}$$

La base $\mathbb{P}$

$$\mathbb{P}_{1} := \mathbb{R}_1,$$

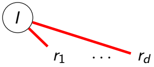
$$\mathbb{P}_{t_1,\dots,t_k} := (\dots(\mathbb{P}_{t_k} \prec \dots) \prec \mathbb{P}_{t_2}) \prec \mathbb{P}_{t_1},$$

$\mathbb{P}$



$$:= \langle \mathbb{P}_{\ell_1}, \mathbb{P}_{\ell_2}, \dots, \mathbb{P}_{\ell_g}; \mathbb{P}_{T(w)} \rangle,$$

$\mathbb{P}$



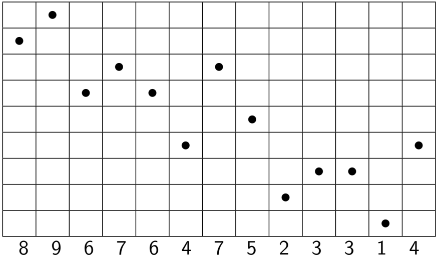
$$:= \Phi_I(\mathbb{P}_{r_1,\dots,r_d}).$$

Théorème [M.]

- $(\mathbb{P}_f)_{f\in\mathfrak{F}_n}$ est une base de $\textbf{WQSym}_n$,
- $(\mathbb{P}_t)_{t\in\mathfrak{T}_n}$ est une base de Prim_n,
- $(\mathbb{P}_t)_{t\in\mathfrak{P}_n}$ est une base de TPrim_n.

Squelette bleu de 8967647523314

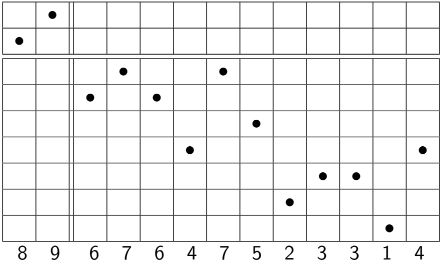
$F^*_{ske}(8967647523314)$



Squelette bleu de 8967647523314

$F^{*}_{ske}(8967647523314)$

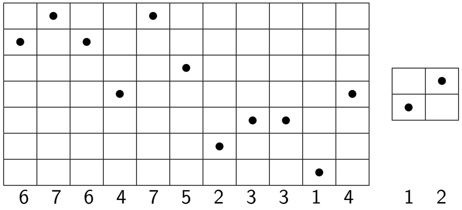
Factorisation en descentes globales



Squelette bleu de 8967647523314

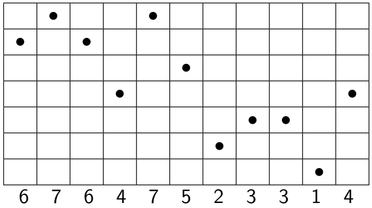
$F^*_{ske}(8967647523314) =$
$T^*_{ske}(67647523314)\, T^*_{ske}(12)$

Factorisation en descentes globales
+ tassement + échange



Squelette bleu de 8967647523314

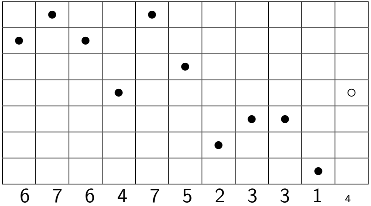
$$F^*_{ske}(8967647523314) =$$
$$T^*_{ske}(67647523314)\,T^*_{ske}(12)$$



Squelette bleu de 8967647523314

$$F^*_{ske}(8967647523314) = T^*_{ske}(67647523314)\,T^*_{ske}(12)$$

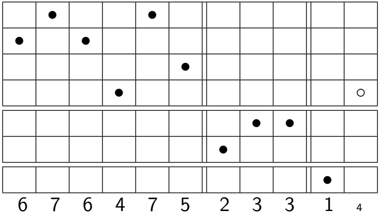
Retrait de la dernière lettre



Squelette bleu de 8967647523314

$$F^*_{ske}(8967647523314) = T^*_{ske}(67647523314)\,T^*_{ske}(12)$$

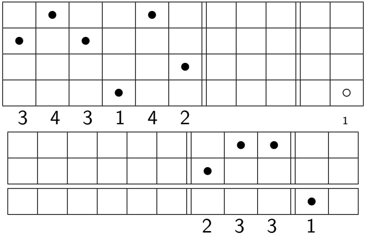
Factorisation en descentes globales



Squelette bleu de 8967647523314

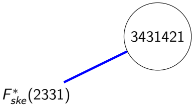
$F^*_{ske}(8967647523314) = T^*_{ske}(67647523314)\,T^*_{ske}(12)$

Distinction de deux groupes de facteurs



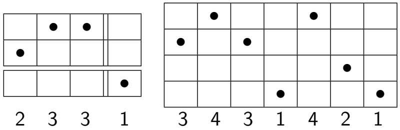
Squelette bleu de 8967647523314

$F^*_{ske}(8967647523314) =$
$T^*_{ske}(67647523314)\, T^*_{ske}(12) =$



$T^*_{ske}(12)$

3431421 est
Irréductible bleu

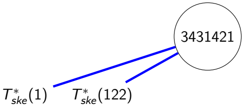


Irréductible bleu

Un mot tassé w est **bleu irréductible** si il n'est pas décomposable par cet algorithme.

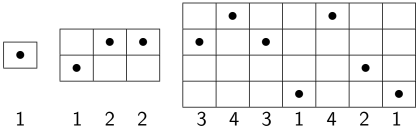
Squelette bleu de 8967647523314

$F^*_{ske}(8967647523314) =$
$T^*_{ske}(67647523314)\,T^*_{ske}(12) =$



$T^*_{ske}(12)$

On boucle

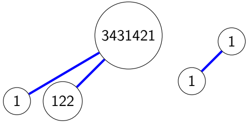


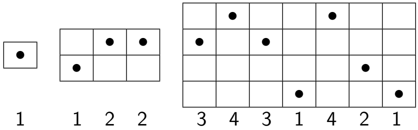
Irréductible bleu

Un mot tassé w est **bleu irréductible** si il n'est pas décomposable par cet algorithme.

Squelette bleu de 8967647523314

$$F^*_{ske}(8967647523314) =$$





Irréductible bleu

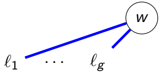
Un mot tassé w est **bleu irréductible** si il n'est pas décomposable par cet algorithme.

$\forall n, BleuIrréductible_n = RougeIrréductible_n = \mathrm{TPrim}_n$.

Le début de la base $\mathbb{O}$

$$\mathbb{O}_{1} := \mathbb{Q}_1,$$

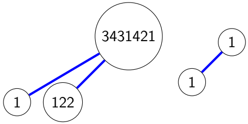
$$\mathbb{O}_{t_1,\dots,t_k} := (\dots(\mathbb{O}_{t_k} \prec \dots) \prec \mathbb{O}_{t_2}) \prec \mathbb{O}_{t_1},$$

$\mathbb{O}$ 

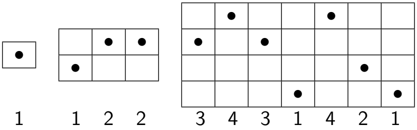
$$:= \langle \mathbb{O}_{\ell_1}, \mathbb{O}_{\ell_2}, \dots, \mathbb{O}_{\ell_g}; \mathbb{O}_{T^*(w)} \rangle.$$

Forêt bleu de 8967647523314

$F^*(8967647523314) =$

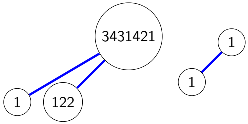


La partie droite!



Forêt bleu de 8967647523314

$F^*(8967647523314) =$



La dernière lettre est-elle présente dans le reste du mot ?

○
1

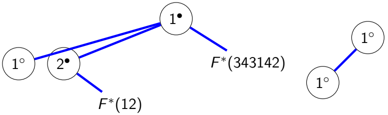
	★	○
•		
1	2	2

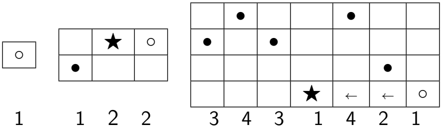
	•			•		
•		•				
					•	
			★	←	←	○
3	4	3	1	4	2	1

Forêt bleu de 8967647523314

Fils droits

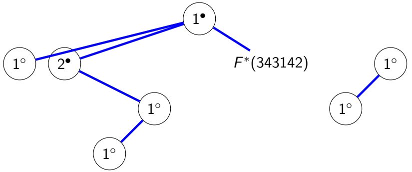
$F^*(8967647523314) =$

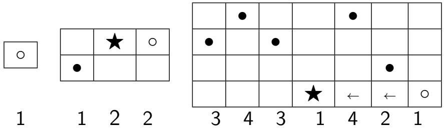




Forêt bleu de 8967647523314

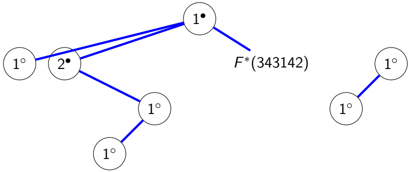
$F^*(8967647523314) =$

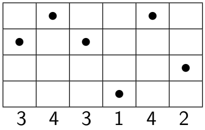




Forêt bleu de 8967647523314

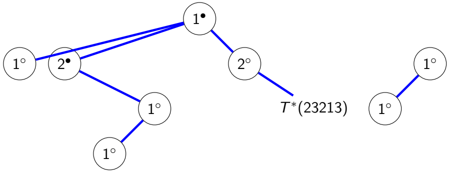
$$F^*(8967647523314) =$$





Forêt bleu de 8967647523314

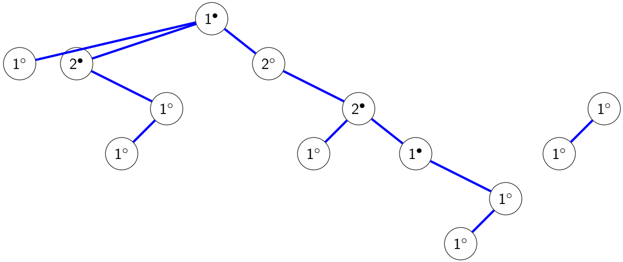
$$F^*(8967647523314) =$$



	$\bullet$			$\bullet$	
$\bullet$		$\bullet$			
$\times$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\circ$
			$\bullet$		
3	4	3	1	4	2

Forêt bleu de 8967647523314

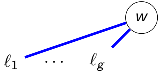
$F^*(8967647523314) =$



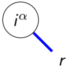
La base $\mathbb{O}$

$$\mathbb{O}_{\textcircled{1}} := \mathbb{Q}_1,$$

$$\mathbb{O}_{t_1,\dots,t_k} := (\dots(\mathbb{O}_{t_k} \prec \dots) \prec \mathbb{O}_{t_2}) \prec \mathbb{O}_{t_1},$$

$\mathbb{O}$ 

$$:= \langle \mathbb{O}_{\ell_1}, \mathbb{O}_{\ell_2}, \dots, \mathbb{O}_{\ell_g}; \mathbb{O}_{T^*(w)} \rangle,$$

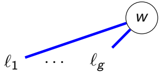
$\mathbb{O}$ 

$$:= \Psi_i^\alpha(\mathbb{O}_r).$$

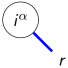
La base $\mathbb{O}$

$$\mathbb{O}_{1} := \mathbb{Q}_1,$$

$$\mathbb{O}_{t_1,\ldots,t_k} := (\ldots(\mathbb{O}_{t_k} \prec \ldots) \prec \mathbb{O}_{t_2}) \prec \mathbb{O}_{t_1},$$

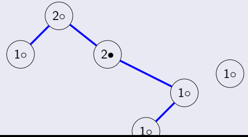
$\mathbb{O}$ 

$$:= \langle \mathbb{O}_{\ell_1}, \mathbb{O}_{\ell_2}, \ldots, \mathbb{O}_{\ell_g}; \mathbb{O}_{T^*(w)} \rangle,$$

$\mathbb{O}$ 

$$:= \Psi_i^{\alpha}(\mathbb{O}_r).$$

Exemple

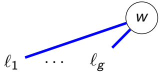
$\mathbb{O}$ 

$$= \mathbb{Q}_{531442} + \mathbb{Q}_{521443} + \mathbb{Q}_{512443} - \mathbb{Q}_{534142} - \mathbb{Q}_{524143} - \mathbb{Q}_{514243} - \mathbb{Q}_{514432} - \mathbb{Q}_{524431} - \mathbb{Q}_{514423} + \mathbb{Q}_{541432} + \mathbb{Q}_{542431} + \mathbb{Q}_{541423}$$

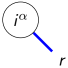
La base $\mathbb{O}$

$$\mathbb{O}_{1} := \mathbb{Q}_1,$$

$$\mathbb{O}_{t_1,\dots,t_k} := (\dots(\mathbb{O}_{t_k} \prec \dots) \prec \mathbb{O}_{t_2}) \prec \mathbb{O}_{t_1},$$

$\mathbb{O}$ 

$$:= \langle \mathbb{O}_{\ell_1}, \mathbb{O}_{\ell_2}, \dots, \mathbb{O}_{\ell_g}; \mathbb{O}_{T^*(w)} \rangle,$$

$\mathbb{O}$ 

$$:= \Psi_i^\alpha(\mathbb{O}_r).$$

Théorème [M.]

- $(\mathbb{O}_f)_{f \in \mathfrak{F}^*{}_n}$ est une base de $\mathbf{WQSym}_n^*$,
- $(\mathbb{O}_t)_{t \in \mathfrak{T}^*{}_n}$ est une base de Prim_n^*,
- $(\mathbb{O}_t)_{t \in \mathfrak{P}^*{}_n}$ est une base de TPrim_n^*.

Théorèmes [M.]

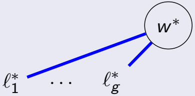
Théorème [M.]

- $(\mathbb{O}_f)_{f\in\mathfrak{F}_n^*}$ base de $\mathbf{WQSym}_n^*$,
- $(\mathbb{O}_t)_{t\in\mathfrak{T}_n^*}$ base de Prim_n^*,
- $(\mathbb{O}_t)_{t\in\mathfrak{P}_n^*}$ base de TPrim_n^*.

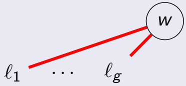
Théorème[M.]

- $(\mathbb{P}_f)_{f\in\mathfrak{F}_n}$ base de $\mathbf{WQSym}_n$,
- $(\mathbb{P}_t)_{t\in\mathfrak{T}_n}$ base de Prim_n,
- $(\mathbb{P}_t)_{t\in\mathfrak{P}_n}$ base de TPrim_n.

Rigidité

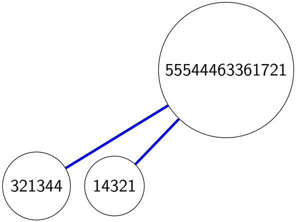


$\forall$ bijection entre les mots irréductibles bleus et rouges, recoloration des squelettes



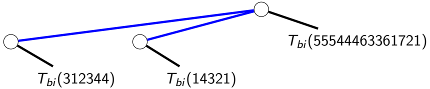
Forêts bicolores à travers un exemple

$$T^*_{ske}(13, 13, 13, 12, 12, 12, 14, 11, 11, 14, 9, 15, 10, 5, 8, 7, 6, 5, 3, 2, 1, 3, 4, 4, 9) =$$



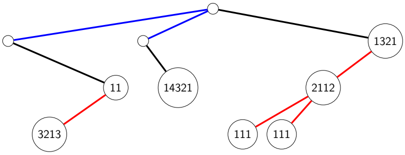
Forêts bicolores à travers un exemple

$$T^*_{bi}(13, 13, 13, 12, 12, 12, 14, 11, 11, 14, 9,$$
$$15, 10, 5, 8, 7, 6, 5, 3, 2, 1, 3, 4, 4, 9)$$



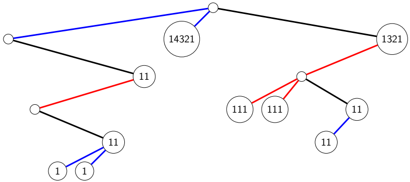
Forêts bicolores à travers un exemple

$T^*_{bi}(13, 13, 13, 12, 12, 12, 14, 11, 11, 14, 9,$
$15, 10, 5, 8, 7, 6, 5, 3, 2, 1, 3, 4, 4, 9)$



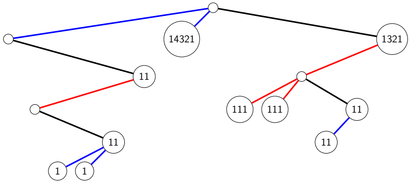
Forêts bicolores à travers un exemple

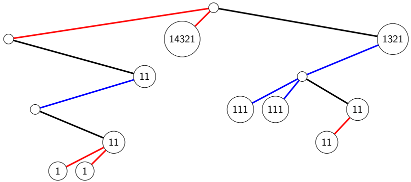
$$T^*_{bi}(13, 13, 13, 12, 12, 12, 14, 11, 11, 14, 9,$$
$$15, 10, 5, 8, 7, 6, 5, 3, 2, 1, 3, 4, 4, 9) =$$



Forêts bicolores à travers un exemple

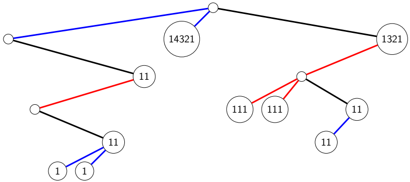
$$T^*_{bi}(13, 13, 13, 12, 12, 12, 14, 11, 11, 14, 9, 15, 10, 5, 8, 7, 6, 5, 3, 2, 1, 3, 4, 4, 9) =$$



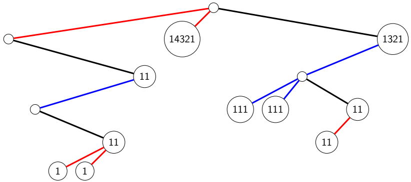


Forêts bicolores à travers un exemple

$$T^*_{bi}(13, 13, 13, 12, 12, 12, 14, 11, 11, 14, 9, 15, 10, 5, 8, 7, 6, 5, 3, 2, 1, 3, 4, 4, 9) =$$



$$T_{ske}(14, 12, 11, 13, 13, 14, 7, 10, 9, 8, 7, 5, 15, 6, 3, 3, 4, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 4, 5) =$$



Théorèmes [M.]

Théorème [M.]

- $(\mathbb{O}_f)_{f\in\mathfrak{F}_n^*}$ base de $\mathbf{WQSym}_n^*$,
- $(\mathbb{O}_t)_{t\in\mathfrak{T}_n^*}$ base de Prim_n^*,
- $(\mathbb{O}_t)_{t\in\mathfrak{P}_n^*}$ base de TPrim_n^*.

Théorème [M.]

- $(\mathbb{P}_f)_{f\in\mathfrak{F}_n}$ base de $\mathbf{WQSym}_n$,
- $(\mathbb{P}_t)_{t\in\mathfrak{T}_n}$ base de Prim_n,
- $(\mathbb{P}_t)_{t\in\mathfrak{P}_n}$ base de TPrim_n.

Bijection [M.]

Involution grâce aux forêts bicolores.
Isomorphisme bidendriforme entre **WQSym** et **WQSym***.