

Un auto-morphisme bidendriforme de WQSym

Séminaire d'équipe:
Combinatoire et interactions
LaBRI

Nouveau membre du LaBRI
ATER à l'IUT de Bordeaux

Hugo Mlodecki

10 Octobre 2022

Exemples d'algèbres de Hopf

- Arbres binaires, **PBT**, Loday-Ronco
- Fonctions quasi-symétriques, **QSym**, Gessel
- Fonctions symétriques non-commutatives, **NCSF**, Gelfrand
Krog Lascoux Leclerc Retakh Thibon
- Permutations, **FQSym**, Malvenuto-Reutenauer
- Mots tassés, **WQSym**, Hivert

Mots tassés

Définition

Un mot sur l'alphabet $\mathbb{N}_{>0}$ est dit **tassé** si toutes les lettres de 1 à son maximum m apparaissent au moins une fois.

Mots tassés

Définition

Un mot sur l'alphabet $\mathbb{N}_{>0}$ est dit **tassé** si toutes les lettres de 1 à son maximum m apparaissent au moins une fois.

Mots tassés de tailles 0, 1, 2 et 3

- ϵ

Mots tassés

Définition

Un mot sur l'alphabet $\mathbb{N}_{>0}$ est dit **tassé** si toutes les lettres de 1 à son maximum m apparaissent au moins une fois.

Mots tassés de tailles 0, 1, 2 et 3

- ϵ
- 1

Mots tassés

Définition

Un mot sur l'alphabet $\mathbb{N}_{>0}$ est dit **tassé** si toutes les lettres de 1 à son maximum m apparaissent au moins une fois.

Mots tassés de tailles 0, 1, 2 et 3

- ϵ
- 1
- 12 21 11

Mots tassés

Définition

Un mot sur l'alphabet $\mathbb{N}_{>0}$ est dit **tassé** si toutes les lettres de 1 à son maximum m apparaissent au moins une fois.

Mots tassés de tailles 0, 1, 2 et 3

- ϵ
- 1
- 12 21 11
- 123 132 213 231 312 321
122 212 221 112 121 211 111

Mots tassés

Définition

Un mot sur l'alphabet $\mathbb{N}_{>0}$ est dit **tassé** si toutes les lettres de 1 à son maximum m apparaissent au moins une fois.

Mots tassés de tailles 0, 1, 2 et 3

- ϵ
- 1
- 12 21 11
- 123 132 213 231 312 321
 122 212 221 112 121 211 111

Mots tassés de taille n [OEIS A000670]

n	1	2	3	4	5	6	7	8
PW_n	1	3	13	75	541	4683	47293	545835

Tassement

Exemple

24154 \notin **PW**

Tassement

Exemple

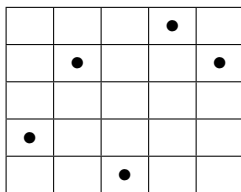
$24154 \notin \mathbf{PW}$ mais $pack(24154) = 23143 \in \mathbf{PW}$

Tassement

Exemple

$24154 \notin \mathbf{PW}$ mais $pack(24154) = 23143 \in \mathbf{PW}$

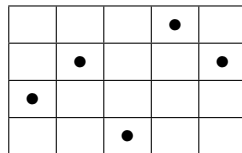
Une représentation : $\#lignes \leq \#colonnes$



2 4 1 5 4

retrait lignes vides

→ pack →



2 3 1 4 3

Algèbre de Hopf

Exemple

WQSym

- $3112 + 212 - 3 \cdot 212341 - \frac{5}{3} \cdot 111$

Algèbre de Hopf

Exemple

WQSym

- $\mathbb{R}_{3112} + \mathbb{R}_{212} - 3\mathbb{R}_{212341} - \frac{5}{3}\mathbb{R}_{111}$

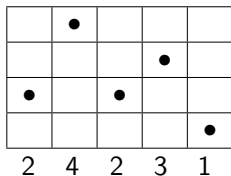
Algèbre de Hopf

Exemple

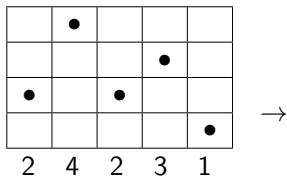
WQSym

- $\mathbb{R}_{3112} + \mathbb{R}_{212} - 3\mathbb{R}_{212341} - \frac{5}{3}\mathbb{R}_{111}$
 - $\mathbb{R}_{12}\mathbb{R}_{11} = \mathbb{R}_{1233} + \mathbb{R}_{1323} + \mathbb{R}_{1332} + \mathbb{R}_{3123} + \mathbb{R}_{3132} + \mathbb{R}_{3312}$
 - $\Delta(\mathbb{R}_{24231}) = \mathbb{R}_\epsilon \otimes \mathbb{R}_{24231} + \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_{21} + \mathbb{R}_{1312} \otimes \mathbb{R}_1 + \mathbb{R}_{24231} \otimes \mathbb{R}_\epsilon$
-
- Un produit associatif unitaire \cdot
 - Un coproduit coassociatif counitaire Δ
 - La relation de Hopf $\Delta(a \cdot b) = \Delta(a) \cdot \Delta(b)$

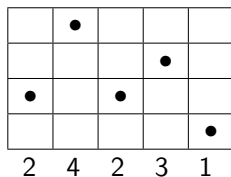
Déconcaténation réduite



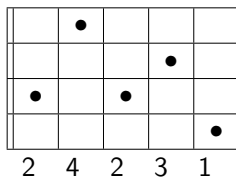
Déconcaténation réduite



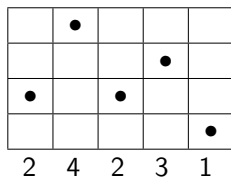
Déconcaténation réduite



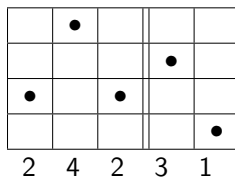
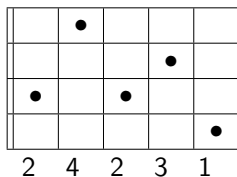
→



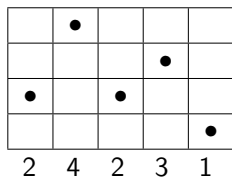
Déconcaténation réduite



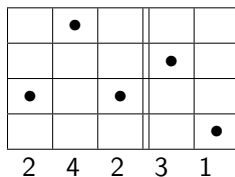
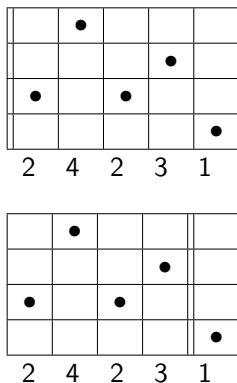
→



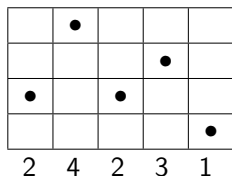
Déconcaténation réduite



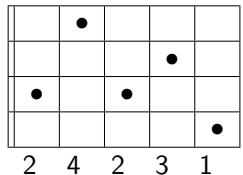
→



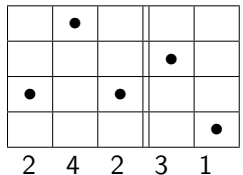
Déconcaténation réduite



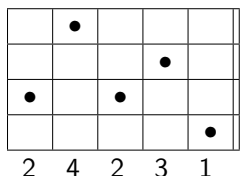
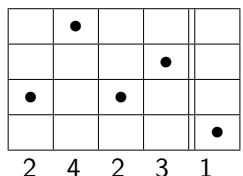
→



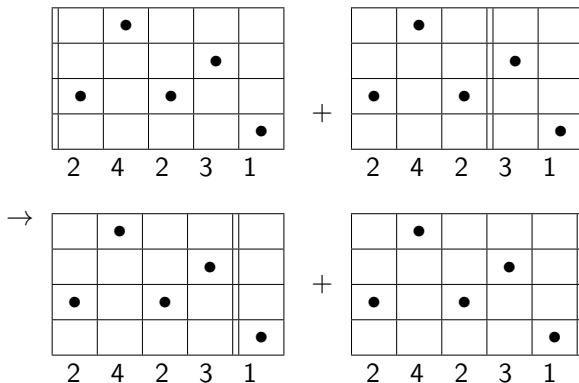
+



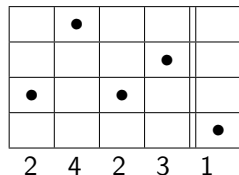
+



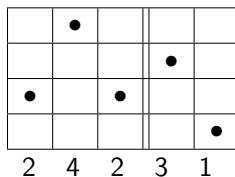
Déconcaténation réduite

 \mathbb{R}_{24231} 

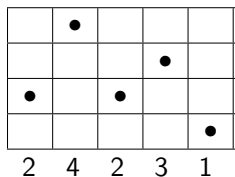
Déconcaténation réduite

 \mathbb{R}_{24231} Δ
 \rightarrow  $\mathbb{R}_\epsilon \otimes \mathbb{R}_{24231}$

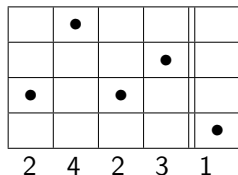
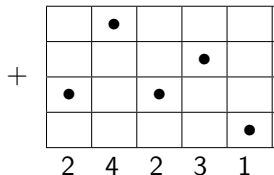
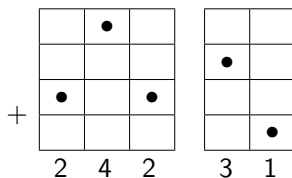
+



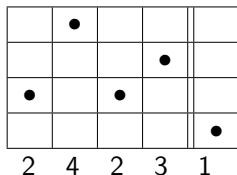
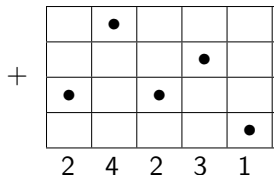
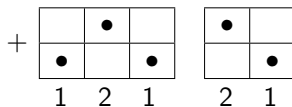
+



Déconcaténation réduite

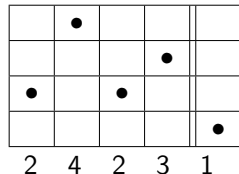
 \mathbb{R}_{24231} Δ
 \rightarrow  $\mathbb{R}_\epsilon \otimes \mathbb{R}_{24231}$ 

Déconcaténation réduite

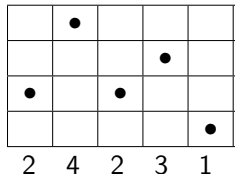
 \mathbb{R}_{24231} Δ
 \rightarrow  $\mathbb{R}_\epsilon \otimes \mathbb{R}_{24231}$ 

Déconcaténation réduite

$$\mathbb{R}_\epsilon \otimes \mathbb{R}_{24231} + \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_{21}$$

 \mathbb{R}_{24231}
 Δ
 \rightarrow


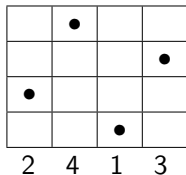
+



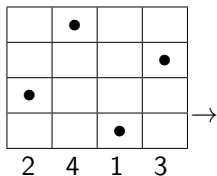
Déconcaténation réduite

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathbb{R}_\epsilon \otimes \mathbb{R}_{24231} \quad + \quad \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_{21} \\
 & & \Delta \\
 \mathbb{R}_{24231} & \rightarrow & \\
 & & \mathbb{R}_{1312} \otimes \mathbb{R}_1 \quad + \quad \mathbb{R}_{24231} \otimes \mathbb{R}_\epsilon
 \end{array}$$

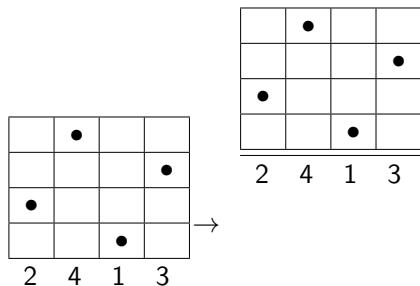
Désassemblage horizontal



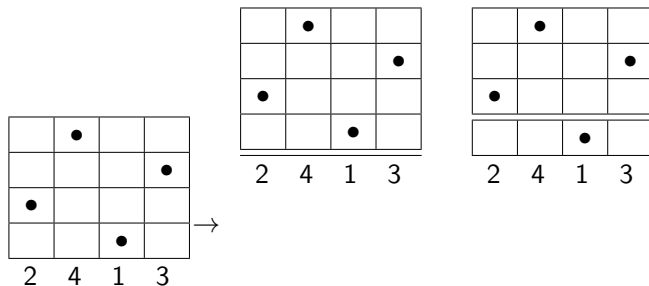
Désassemblage horizontal



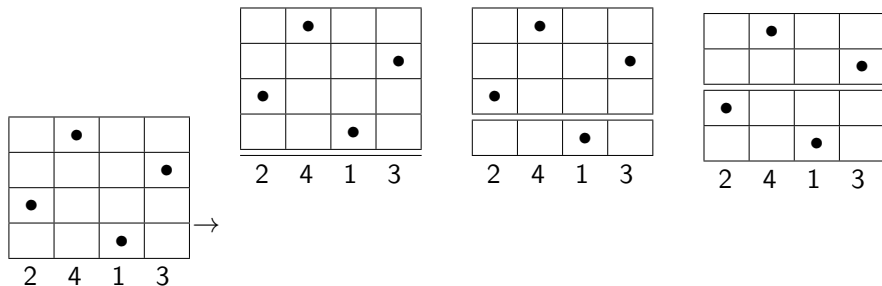
Désassemblage horizontal



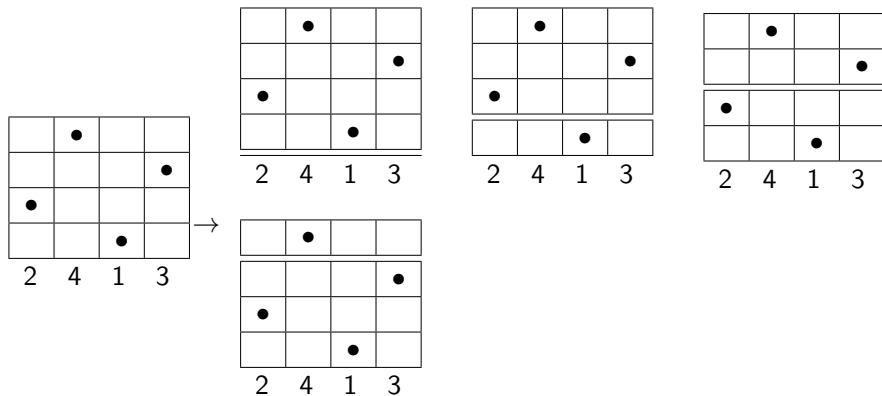
Désassemblage horizontal



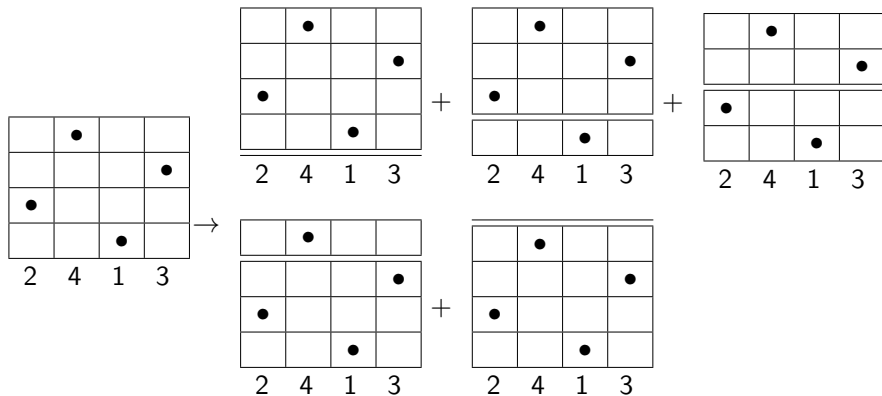
Désassemblage horizontal



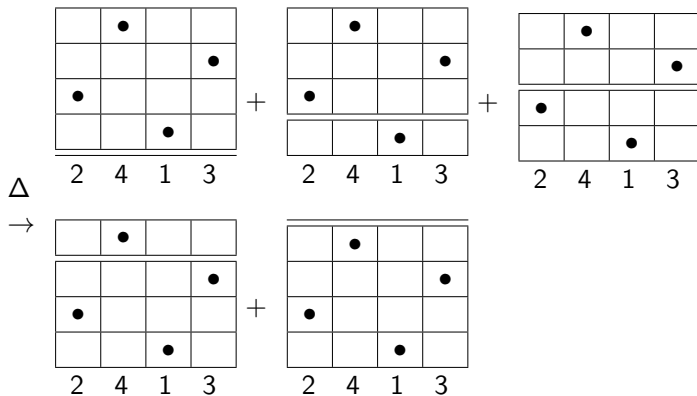
Désassemblage horizontal



Désassemblage horizontal



Désassemblage horizontal

 $\mathbb{Q}2413$


Désassemblage horizontal

$$\mathbb{Q}_{2413} \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Q}_\epsilon \otimes \mathbb{Q}_{2413}_+$$

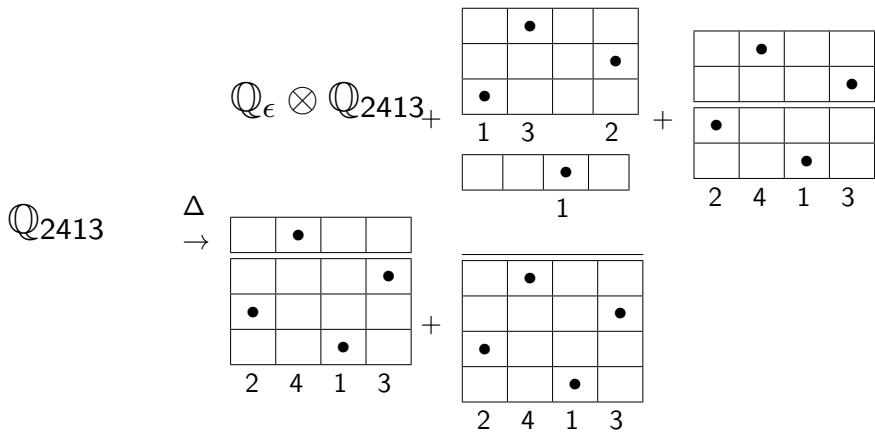
$\mathbb{Q}_\epsilon \otimes \mathbb{Q}_{2413}_+$

$\mathbb{Q}_{2413} \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Q}_\epsilon \otimes \mathbb{Q}_{2413}_+$

\mathbb{Q}_{2413}_+

\mathbb{Q}_{2413}_+

Désassemblage horizontal



Désassemblage horizontal

$$\mathbb{Q}_{2413} \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Q}_\epsilon \otimes \mathbb{Q}_{2413}_+$$

$\mathbb{Q}_\epsilon \otimes \mathbb{Q}_{2413}_+$

$\mathbb{Q}_{2413} \xrightarrow{\Delta}$

Grid 1 (left): $\begin{matrix} \bullet & & & \\ & & & \bullet \\ \bullet & & & \\ & & \bullet & \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{matrix}$

Grid 2 (middle): $\begin{matrix} & & \bullet & \\ & & & \bullet \\ \bullet & & & \\ & & \bullet & \\ 1 & 3 & 2 & \end{matrix}$

Grid 3 (right): $\begin{matrix} & \bullet & & \\ & & & \bullet \\ \bullet & & & \\ & & \bullet & \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{matrix}$

Désassemblage horizontal

$$\begin{array}{c}
 \mathbb{Q}_{2413} \\
 \Delta \\
 \rightarrow
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 & \bullet & & \\
 \hline
 & & & \bullet \\
 \hline
 \bullet & & & \\
 \hline
 & & \bullet & \\
 \hline
 2 & 4 & 1 & 3 \\
 \end{array}
 +
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 & \bullet & & \\
 \hline
 & & & \bullet \\
 \hline
 \bullet & & & \\
 \hline
 & & \bullet & \\
 \hline
 2 & 4 & 1 & 3 \\
 \end{array}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 \mathbb{Q}_\epsilon \otimes \mathbb{Q}_{2413} + \mathbb{Q}_1 \otimes \mathbb{Q}_{132} \\
 + \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 & \bullet & & \\
 \hline
 & & & \bullet \\
 \hline
 \bullet & & & \\
 \hline
 & & \bullet & \\
 \hline
 2 & 4 & 1 & 3 \\
 \end{array}
 \end{array}$$

Désassemblage horizontal

$$\mathbb{Q}_\epsilon \otimes \mathbb{Q}_{2413} + \mathbb{Q}_1 \otimes \mathbb{Q}_{132} + \mathbb{Q}_{21} \otimes \mathbb{Q}_{21}$$

 \mathbb{Q}_{2413}
 Δ
 \rightarrow

$$\mathbb{Q}_{213} \otimes \mathbb{Q}_1 + \mathbb{Q}_{2413} \otimes \mathbb{Q}_\epsilon$$

Auto-dualité

- \mathbb{R} et \mathbb{Q} bases de \mathbf{WQSym}^* et \mathbf{WQSym}

Auto-dualité

- \mathbb{R} et \mathbb{Q} bases de \mathbf{WQSym}^* et \mathbf{WQSym}
- 2001 Duchanp-Hivert-Thibon conjecturent l'auto-dualité de \mathbf{WQSym}

Auto-dualité

- \mathbb{R} et \mathbb{Q} bases de **WQSym**^{*} et **WQSym**
- 2001 Duchanp-Hivert-Thibon conjecturent l'auto-dualité de **WQSym**
- 2005 Foissy démontre l'auto-dualité des bigèbre bidendriforme (rigidité)

Auto-dualité

- \mathbb{R} et \mathbb{Q} bases de **WQSym**^{*} et **WQSym**
- 2001 Duchanp-Hivert-Thibon conjecturent l'auto-dualité de **WQSym**
- 2005 Foissy démontre l'auto-dualité des bigèbre bidendriforme (rigidité)
- Pas d'isomorphisme explicite

Demis coproduits

Exemple de coproduits gauche et droit

- $\tilde{\Delta}(\mathbb{Q}_{12536434}) =$

Demis coproduits

Exemple de coproduits gauche et droit

- $\tilde{\Delta}(\mathbb{Q}_{12536434}) = \mathbb{Q}_1 \otimes \mathbb{Q}_{1425323} + \mathbb{Q}_{12} \otimes \mathbb{Q}_{314212} + \mathbb{Q}_{1233} \otimes \mathbb{Q}_{2311}$
 $+ \mathbb{Q}_{123434} \otimes \mathbb{Q}_{12} + \mathbb{Q}_{1253434} \otimes \mathbb{Q}_1$

Demis coproduits

Exemple de coproduits gauche et droit

- $\tilde{\Delta}(\mathbb{Q}_{12536434}) = \mathbb{Q}_1 \otimes \mathbb{Q}_{1425323} + \mathbb{Q}_{12} \otimes \mathbb{Q}_{314212} + \mathbb{Q}_{1233} \otimes \mathbb{Q}_{2311} + \mathbb{Q}_{123434} \otimes \mathbb{Q}_{12} + \mathbb{Q}_{1253434} \otimes \mathbb{Q}_1$
- $\Delta_{\succeq}(\mathbb{Q}_{12536434}) = \mathbb{Q}_1 \otimes \mathbb{Q}_{1425323} + \mathbb{Q}_{12} \otimes \mathbb{Q}_{314212} + \mathbb{Q}_{1233} \otimes \mathbb{Q}_{2311},$
- $\Delta_{\preceq}(\mathbb{Q}_{12536434}) = \mathbb{Q}_{123434} \otimes \mathbb{Q}_{12} + \mathbb{Q}_{1253434} \otimes \mathbb{Q}_1.$

Demis coproduits

Définitions

- $\Delta_{\succeq}(Q_u) := \sum_{i=1}^{u_n-1} Q_{u|_{\leq i}} \otimes Q_{\text{pack}(u|_{> i})}$,
- $\Delta_{\preceq}(Q_u) := \sum_{i=u_n}^{\max(u)-1} Q_{u|_{\leq i}} \otimes Q_{\text{pack}(u|_{> i})}$.

Exemple de coproduits gauche et droit

- $\tilde{\Delta}(Q_{12536434}) = Q_1 \otimes Q_{1425323} + Q_{12} \otimes Q_{314212} + Q_{1233} \otimes Q_{2311}$
 $+ Q_{123434} \otimes Q_{12} + Q_{1253434} \otimes Q_1$
- $\Delta_{\succeq}(Q_{12536434}) = Q_1 \otimes Q_{1425323} + Q_{12} \otimes Q_{314212} + Q_{1233} \otimes Q_{2311}$,
- $\Delta_{\preceq}(Q_{12536434}) = Q_{123434} \otimes Q_{12} + Q_{1253434} \otimes Q_1$.

Bigèbre bidendriforme

Définition

- Raffinement de l'associativité et la coassociativité
 - 3 et 3 équations
- Raffinement de la relation de Hopf
 - 4 équations

Bigèbre bidendriforme

$$\begin{aligned}(a \succ b) \succ c &= a \succ (b \succ c + b \succ c), \\ (a \succ b) \succ c &= a \succ (b \succ c), \\ (a \succ b + a \succ b) \succ c &= a \succ (b \succ c).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Delta_{\succ} \otimes \text{Id}) \circ \Delta_{\succ}(a) &= (\text{Id} \otimes \Delta_{\succ} + \text{Id} \otimes \Delta_{\succ}) \circ \Delta_{\succ}(a), \\ (\Delta_{\succ} \otimes \text{Id}) \circ \Delta_{\succ}(a) &= (\text{Id} \otimes \Delta_{\succ}) \circ \Delta_{\succ}(a), \\ (\Delta_{\succ} \otimes \text{Id} + \Delta_{\succ} \otimes \text{Id}) \circ \Delta_{\succ}(a) &= (\text{Id} \otimes \Delta_{\succ}) \circ \Delta_{\succ}(a).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{\succ}(a \succ b) &= a' b'_{\succ} \otimes a'' \succ b''_{\succ} + b'_{\succ} \otimes a \succ b''_{\succ} + a b'_{\succ} \otimes b''_{\succ} + a' \otimes a'' \succ b + a \otimes b, \\ \Delta_{\succ}(a \prec b) &= a' b'_{\succ} \otimes a'' \prec b''_{\succ} + b'_{\succ} \otimes a \prec b''_{\succ} + a' \otimes a'' \prec b, \\ \Delta_{\prec}(a \succ b) &= a' b'_{\prec} \otimes a'' \succ b''_{\prec} + b'_{\prec} \otimes a \succ b''_{\prec} + a b'_{\prec} \otimes b''_{\prec}, \\ \Delta_{\prec}(a \prec b) &= a' b'_{\prec} \otimes a'' \prec b''_{\prec} + b'_{\prec} \otimes a \prec b''_{\prec} + a' b \otimes a'' + b \otimes a.\end{aligned}$$

Bigèbre bidendriforme

Définition

- Raffinement de l'associativité et la coassociativité
 - 3 et 3 équations
- Raffinement de la relation de Hopf
 - 4 équations

Théorème [Foissy]

Si A est une bigèbre bidendriforme alors A est généré librement par $\text{TPrim}(A)$ en tant qu'algèbre dendriforme.

Bigèbre bidendriforme

Définition

- Raffinement de l'associativité et la coassociativité
 - 3 et 3 équations
- Raffinement de la relation de Hopf
 - 4 équations

Théorème [Foissy]

Si A est une bigèbre bidendriforme alors A est généré librement par $\text{TPrim}(A)$ en tant qu'algèbre dendriforme.

Séries

n	1	2	3	4	5	6	7	8
WQSym_n	1	3	13	75	541	4 683	47 293	545 835
TPrim _n	1	1	4	28	240	2 384	26 832	337 168

Bigèbre bidendriforme

Définition

- Raffinement de l'associativité et la coassociativité
 - 3 et 3 équations
- Raffinement de la relation de Hopf
 - 4 équations

Théorème [Foissy]

Si A est une bigèbre bidendriforme alors A est généré librement par $\text{TPrim}(A)$ en tant qu'algèbre dendriforme.

Corollaire

WQSym est auto-duale.

Définitions

Élément primitif

P est un éléments primitif $\iff \tilde{\Delta}(P) = 0$

Ex : $\mathbb{R}_{1213} - \mathbb{R}_{2321}$

Définitions

Élément primitif

P est un éléments primitif $\iff \tilde{\Delta}(P) = 0$

Ex : $\mathbb{R}_{1213} - \mathbb{R}_{2321}$

$$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{1213}) = \Delta_{\succ}(\mathbb{R}_{1213}) = \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_1$$

$$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{2321}) = \Delta_{\prec}(\mathbb{R}_{2321}) = \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_1$$

Définitions

Élément primitif

P est un éléments primitif $\iff \tilde{\Delta}(P) = 0$

Ex : $\mathbb{R}_{1213} - \mathbb{R}_{2321}$

$$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{1213}) = \Delta_{\succ}(\mathbb{R}_{1213}) = \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_1$$

$$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{2321}) = \Delta_{\prec}(\mathbb{R}_{2321}) = \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_1$$

Élément totalement primitif

P est une élément totalement primitif $\iff \Delta_{\prec}(P) = \Delta_{\succ}(P) = 0$

Ex : $\mathbb{R}_{12443} - \mathbb{R}_{21443} - \mathbb{R}_{23441} + \mathbb{R}_{32441}$

Définitions

Élément primitif

P est un éléments primitif $\iff \tilde{\Delta}(P) = 0$

Ex : $\mathbb{R}_{1213} - \mathbb{R}_{2321}$

$$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{1213}) = \Delta_{\succ}(\mathbb{R}_{1213}) = \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_1$$

$$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{2321}) = \Delta_{\prec}(\mathbb{R}_{2321}) = \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_1$$

Élément totalement primitif

P est une élément totalement primitif $\iff \Delta_{\prec}(P) = \Delta_{\succ}(P) = 0$

Ex : $\mathbb{R}_{12443} - \mathbb{R}_{21443} - \mathbb{R}_{23441} + \mathbb{R}_{32441}$

$$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{12443}) = \mathbb{R}_{1233} \otimes \mathbb{R}_1 \quad \mathbb{R}_{12} \otimes \mathbb{R}_{221} + \mathbb{R}_1 \otimes \mathbb{R}_{1332}$$

$$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{21443}) = \mathbb{R}_{2133} \otimes \mathbb{R}_1 \quad \mathbb{R}_{21} \otimes \mathbb{R}_{221} + \mathbb{R}_1 \otimes \mathbb{R}_{1332}$$

$$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{23441}) = \mathbb{R}_{1233} \otimes \mathbb{R}_1 \quad \mathbb{R}_{12} \otimes \mathbb{R}_{221} + \mathbb{R}_1 \otimes \mathbb{R}_{2331}$$

$$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{32441}) = \mathbb{R}_{2133} \otimes \mathbb{R}_1 \quad \mathbb{R}_{21} \otimes \mathbb{R}_{221} + \mathbb{R}_1 \otimes \mathbb{R}_{2331}$$

Mon but

Isomorphisme bidendriforme explicite entre **WQSym** et sa duale

Mon but

Isomorphisme bidendriforme explicite entre **WQSym** et sa duale
 \Updownarrow
Isomorphisme explicite entre $\text{TPrim}(\mathbf{WQSym})$ et le dual

Mon but

Isomorphisme bidendriforme explicite entre **WQSym** et sa duale

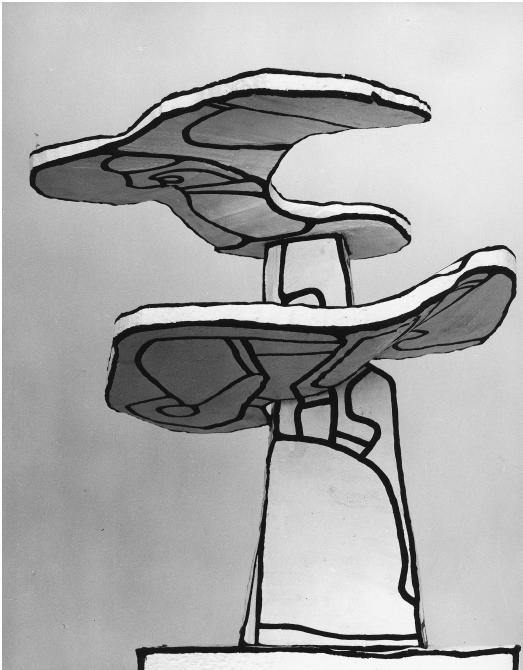


Isomorphisme explicite entre $\text{TPrim}(\mathbf{WQSym})$ et le dual

Construction de deux bases de totalement primitif
(dans **WQSym** et **WQSym***)


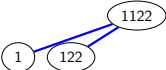
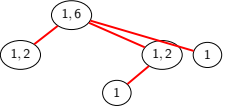
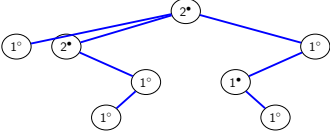
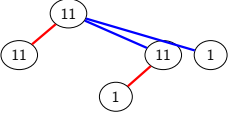
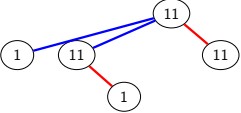
Jean Dubuffet, Arbre biplan (version I)

août 1968, époxy peint au polyuréthane (1ère épreuve), 72 x 61 x 48 cm,
coll. Fondation Dubuffet/© A.D.A.G.P. Paris



Forêts biplanes, représentation de décompositions

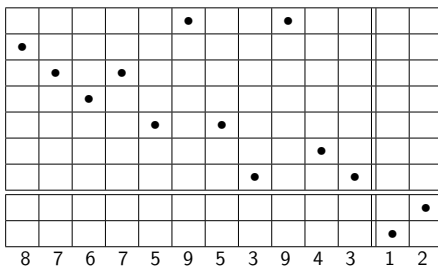
44523315

	Squelettes	
	Arbres tassés	
	Arbres bicolores	

Squelette rouge de 8767595394312

 $F_{\text{Rske}}(8767595394312)$

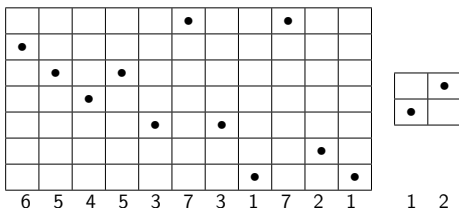
Factorisation en descentes globales



Squelette rouge de 8767595394312

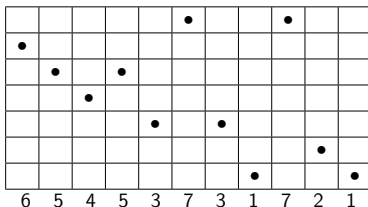
$$F_{\text{Rske}}(8767595394312) = \\ T_{\text{Rske}}(65453731721) T_{\text{Rske}}(12)$$

Factorisation en descentes globales
+ tassement



Squelette rouge de 8767595394312

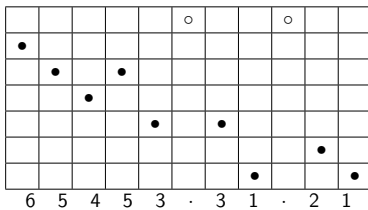
$$F_{\text{Rske}}(8767595394312) = \\ T_{\text{Rske}}(65453731721) T_{\text{Rske}}(12)$$



Squelette rouge de 8767595394312

$$F_{\text{Rske}}(8767595394312) = \\ T_{\text{Rske}}(65453731721) T_{\text{Rske}}(12)$$

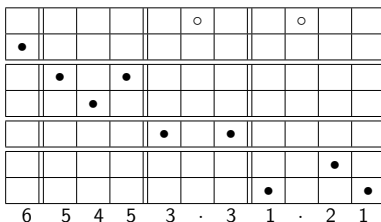
Retrait des lettres de valeur max



Squelette rouge de 8767595394312

$$F_{\text{Rske}}(8767595394312) = \\ T_{\text{Rske}}(65453731721) T_{\text{Rske}}(12)$$

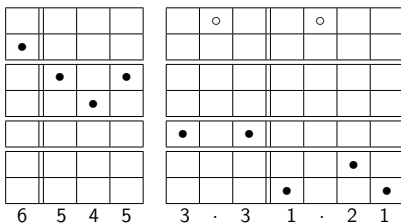
Factorisation en descentes globales



Squelette rouge de 8767595394312

$$F_{\text{Rske}}(8767595394312) = \\ T_{\text{Rske}}(65453731721) T_{\text{Rske}}(12)$$

Distinction de deux groupes de facteurs

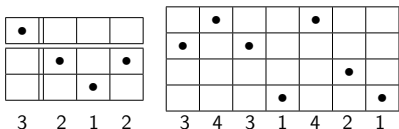


Squelette rouge de 8767595394312

$$F_{R_{\text{ske}}}(8767595394312) =$$

$$T_{R_{\text{ske}}}(65453731721) T_{R_{\text{ske}}}(12)$$

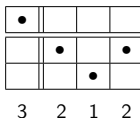
Remise des lettres de valeur max + tassement



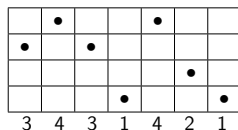
Squelette rouge de 8767595394312

$$F_{R_{\text{ske}}}(8767595394312) = T_{R_{\text{ske}}}(65453731721) T_{R_{\text{ske}}}(12) =$$

$$F_{\text{ske}}(3212) \quad \text{3431421} \quad T_{R_{\text{ske}}}(12)$$



3431421 est
Irréductible rouge



Irréductible rouge

Un mot tassé w est **rouge irréductible** si il n'est pas décomposable par cet algorithme.

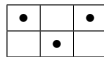
Squelette rouge de 8767595394312

$$F_{R_{ske}}(8767595394312) = \text{On boucle}$$

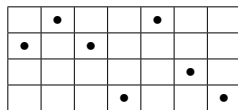
$$T_{R_{ske}}(65453731721) T_{R_{ske}}(12) =$$


$$T_{R_{ske}}(12)$$


1



2 1 2



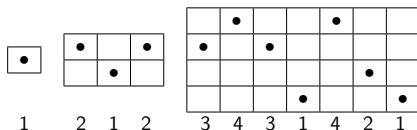
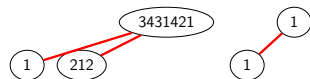
3 4 3 1 4 2 1

Irréductible rouge

Un mot tassé w est **rouge irréductible** si il n'est pas décomposable par cet algorithme.

Squelette rouge de 8767595394312

$$F_{\text{Rske}}(8767595394312) = ((1/212) \blacktriangleright 3431421) / (1 \blacktriangleright 1)$$



Irréductible rouge

Un mot tassé w est **rouge irréductible** si il n'est pas décomposable par cet algorithme.

$$\forall n, \text{RougeIrréductible}_n = \text{TPrim}_n.$$

Le début de la base \mathbb{P}

$$\mathbb{P}_{\circledast 1} := \mathbb{R}_1,$$

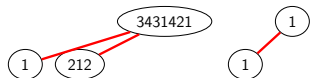
$$\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_k} := (\dots (\mathbb{P}_{t_k} \prec \dots) \prec \mathbb{P}_{t_2}) \prec \mathbb{P}_{t_1},$$

$$\mathbb{P} := \langle \mathbb{P}_{\ell_1}, \mathbb{P}_{\ell_2}, \dots, \mathbb{P}_{\ell_g}; \mathbb{P}_{T(w)} \rangle.$$

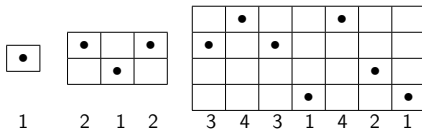
The diagram illustrates a node v (circled) in a tree structure. Below it, a bracket groups the labels ℓ_1, \dots, ℓ_g , which are identified as $F_{Rske}(u)$. Red lines connect the node v to the labels ℓ_1 and ℓ_g .

Forêt rouge de 8767595394312

$$F_{\mathbb{R}}(8767595394312) =$$

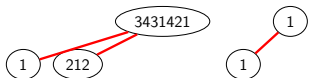


La partie droite!

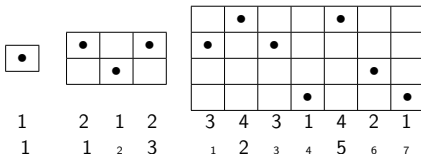


Forêt rouge de 8767595394312

$$F_R(8767595394312) =$$

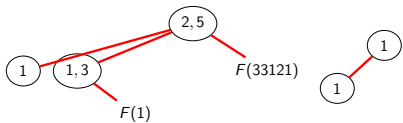


Positions des max

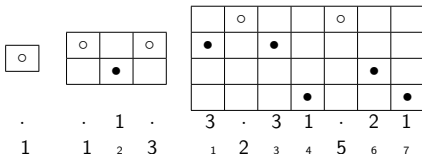


Forêt rouge de 8767595394312

$$F_R(8767595394312) =$$

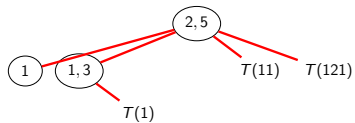


Fils droits

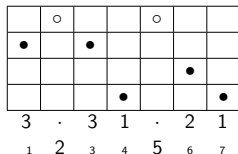
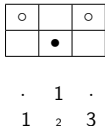
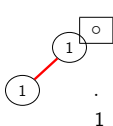


Forêt rouge de 8767595394312

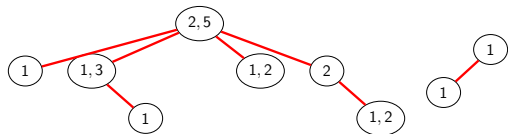
$$F_R(8767595394312) =$$



On reboucle



Forêt rouge de 8767595394312

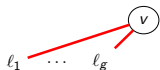
 $F_{\mathbb{R}}(8767595394312) =$ 

La base \mathbb{P}

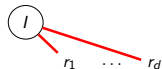
$$\mathbb{P}_{\textcircled{1}} := \mathbb{R}_1,$$

$$\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_k} := (\dots (\mathbb{P}_{t_k} \prec \dots) \prec \mathbb{P}_{t_2}) \prec \mathbb{P}_{t_1},$$

$$\mathbb{P} := \langle \mathbb{P}_{\ell_1}, \mathbb{P}_{\ell_2}, \dots, \mathbb{P}_{\ell_g}; \mathbb{P}_{T(w)} \rangle,$$



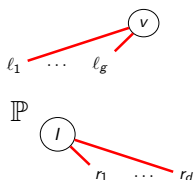
$$\mathbb{P} := \Phi_I(\mathbb{P}_{r_1, \dots, r_d}).$$



La base \mathbb{P}

$$\mathbb{P}_{\textcircled{1}} := \mathbb{R}_1,$$

$$\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_k} := (\dots (\mathbb{P}_{t_k} \prec \dots) \prec \mathbb{P}_{t_2}) \prec \mathbb{P}_{t_1},$$

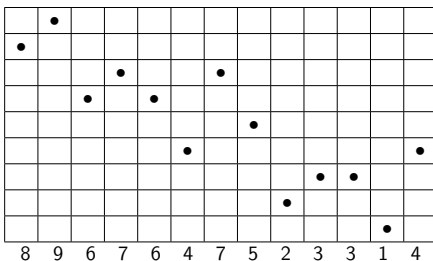
$$\mathbb{P} := \langle \mathbb{P}_{\ell_1}, \mathbb{P}_{\ell_2}, \dots, \mathbb{P}_{\ell_g}; \mathbb{P}_{T(w)} \rangle,$$


$$\mathbb{P} := \Phi_l(\mathbb{P}_{r_1, \dots, r_d}).$$

Théorème [M.]

- $(\mathbb{P}_f)_{f \in \mathfrak{F}_{R_n}}$ est une base de \mathbf{WQSym}_n^* ,
- $(\mathbb{P}_t)_{t \in \mathfrak{T}_{R_n}}$ est une base de Prim_n^* ,
- $(\mathbb{P}_t)_{t \in \mathfrak{M}_{R_n}}$ est une base de TPrim_n^* .

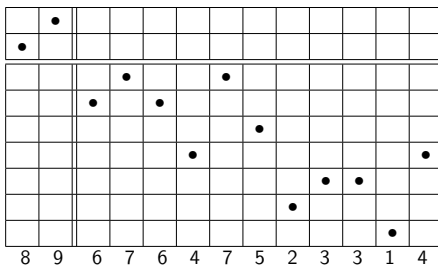
Squelette bleu de 8967647523314

 $F_{\text{Bske}}(8967647523314)$ 

Squelette bleu de 8967647523314

 $F_{\text{Bske}}(8967647523314)$

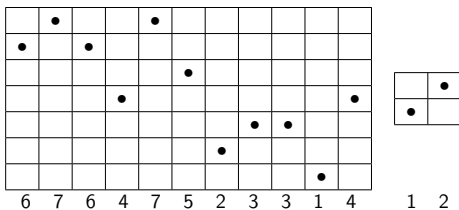
Factorisation en descentes globales



Squelette bleu de 8967647523314

$$F_{\text{Bske}}(8967647523314) = \\ T_{\text{Bske}}(67647523314) T_{\text{Bske}}(12)$$

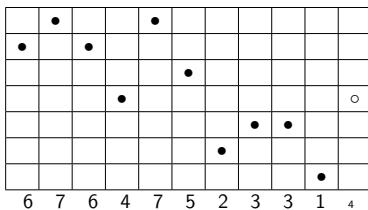
Factorisation en descentes globales
+ tassement + échange



Squelette bleu de 8967647523314

$$F_{\text{Bske}}(8967647523314) = \\ T_{\text{Bske}}(67647523314) T_{\text{Bske}}(12)$$

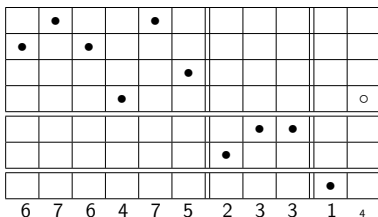
Retrait de la dernière lettre



Squelette bleu de 8967647523314

$$F_{\text{Bske}}(8967647523314) = \\ T_{\text{Bske}}(67647523314) T_{\text{Bske}}(12)$$

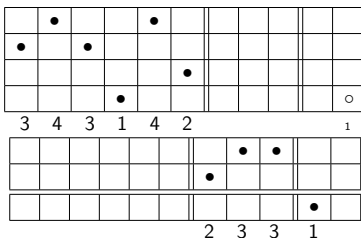
Factorisation en descentes globales



Squelette bleu de 8967647523314

$$F_{\text{Bske}}(8967647523314) = \\ T_{\text{Bske}}(67647523314) T_{\text{Bske}}(12)$$

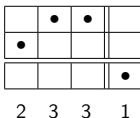
Distinction de deux groupes de facteurs



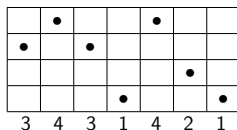
Squelette bleu de 8967647523314

$$F_{\text{Bske}}(8967647523314) = T_{\text{Bske}}(67647523314) T_{\text{Bske}}(12) =$$

$$F_{\text{ske}}^*(2331) \begin{matrix} \text{3431421} \\ \text{---} \end{matrix} T_{\text{Bske}}(12)$$



3431421 est
Irréductible bleu

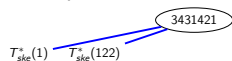
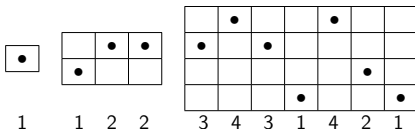


Irréductible bleu

Un mot tassé w est **bleu irréductible** si il n'est pas décomposable par cet algorithme.

Squelette bleu de 8967647523314

 $F_{\text{Bske}}(8967647523314) =$ On boucle

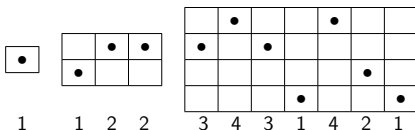
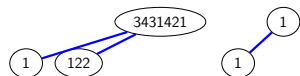
 $T_{\text{Bske}}(67647523314) T_{\text{Bske}}(12) =$

 $T_{\text{Bske}}(12)$


Irréductible bleu

Un mot tassé w est **bleu irréductible** si il n'est pas décomposable par cet algorithme.

Squelette bleu de 8967647523314

$$F_{\text{Bske}}(8967647523314) = ((1/122) \blacktriangle 3431421) / (1 \blacktriangle 1)$$



Irréductible bleu

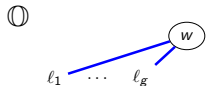
Un mot tassé w est **bleu irréductible** si il n'est pas décomposable par cet algorithme.

$$\forall n, \text{BleuIrréductible}_n = \text{RougeIrréductible}_n = \text{TPrim}_n.$$

Le début de la base \mathbb{O}

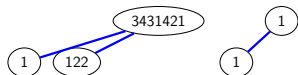
$$\mathbb{O}_{\circledast 1} := \mathbb{Q}_1,$$

$$\mathbb{O}_{t_1, \dots, t_k} := (\dots (\mathbb{O}_{t_k} \prec \dots) \prec \mathbb{O}_{t_2}) \prec \mathbb{O}_{t_1},$$

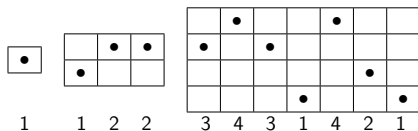
$$\mathbb{O}_{\ell_1, \dots, \ell_g; \mathbb{O}_{T^*(w)}} := \langle \mathbb{O}_{\ell_1}, \mathbb{O}_{\ell_2}, \dots, \mathbb{O}_{\ell_g}; \mathbb{O}_{T^*(w)} \rangle.$$


Forêt bleu de 8967647523314

$$F_B(8967647523314) =$$

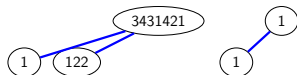


La partie droite!

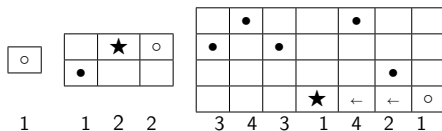


Forêt bleu de 8967647523314

$$F_B(8967647523314) =$$

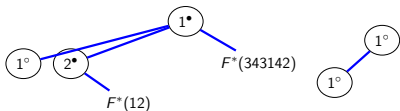


La dernière lettre est-elle présente dans le reste du mot ?

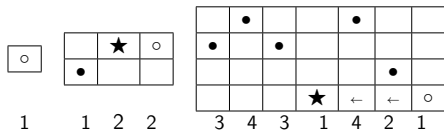


Forêt bleu de 8967647523314

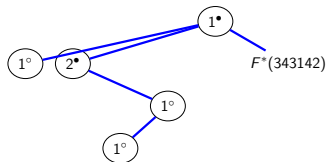
$$F_B(8967647523314) =$$



Fils droits



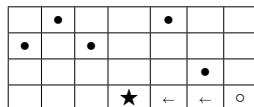
Forêt bleu de 8967647523314

$$F_B(8967647523314) =$$


1



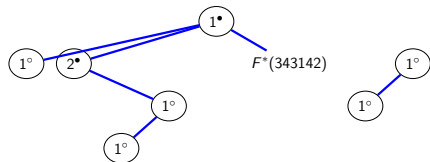
1 2 2



3 4 3 1 4 2 1

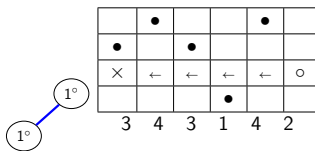
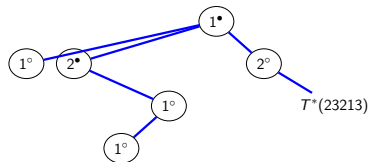
Forêt bleu de 8967647523314

$$F_B(8967647523314) =$$

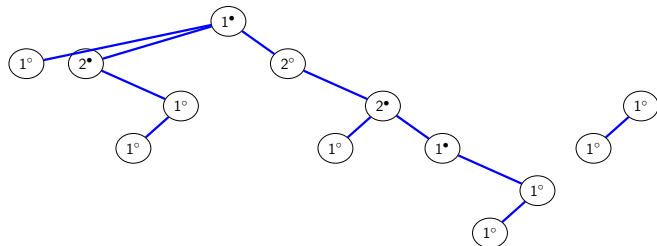


	•			•	
•		•			
					•
			•		
3	4	3	1	4	2

Forêt bleu de 8967647523314

$$F_B(8967647523314) =$$


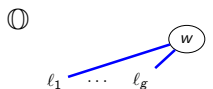
Forêt bleu de 8967647523314

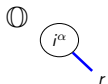
$$F_B(8967647523314) =$$


La base \mathbb{O}

$$\mathbb{O}_{\textcircled{1}} := \mathbb{Q}_1,$$

$$\mathbb{O}_{t_1, \dots, t_k} := (\dots (\mathbb{O}_{t_k} \prec \dots) \prec \mathbb{O}_{t_2}) \prec \mathbb{O}_{t_1},$$

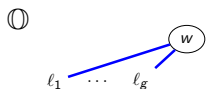
$$\mathbb{O}_{l_1, \dots, l_g; \mathbb{O}_{T^*(w)}} := \langle \mathbb{O}_{l_1}, \mathbb{O}_{l_2}, \dots, \mathbb{O}_{l_g}; \mathbb{O}_{T^*(w)} \rangle,$$


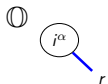
$$\mathbb{O}_{i^\alpha} := \Psi_i^\alpha(\mathbb{O}_r).$$


La base \mathbb{O}

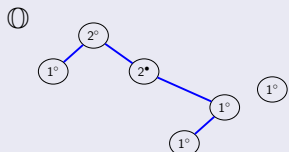
$$\mathbb{O}_{(1)} := Q_1,$$

$$\mathbb{O}_{t_1, \dots, t_k} := (\dots (\mathbb{O}_{t_k} \prec \dots) \prec \mathbb{O}_{t_2}) \prec \mathbb{O}_{t_1},$$

$$\mathbb{O}_{\langle \mathbb{O}_{l_1}, \mathbb{O}_{l_2}, \dots, \mathbb{O}_{l_g}; \mathbb{O}_{T^*(w)} \rangle},$$


$$\mathbb{O}_{i^\alpha} := \Psi_i^\alpha(\mathbb{O}_r).$$


Exemple



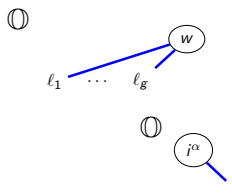
$$= Q_{531442} + Q_{521443} + Q_{512443} -$$

$$Q_{534142} - Q_{524143} - Q_{514243} -$$

$$Q_{514432} - Q_{524431} - Q_{514423} +$$

$$Q_{541432} + Q_{542431} + Q_{541423}$$

La base O

$$\begin{aligned} \mathbb{O}_{\textcircled{1}} &:= \mathbb{Q}_1, \\ \mathbb{O}_{t_1, \dots, t_k} &:= (\dots (\mathbb{O}_{t_k} \prec \dots) \prec \mathbb{O}_{t_2}) \prec \mathbb{O}_{t_1}, \\ \mathbb{O}_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_g; \mathbb{O}_{T^*(w)}} &:= \langle \mathbb{O}_{\ell_1}, \mathbb{O}_{\ell_2}, \dots, \mathbb{O}_{\ell_g}; \mathbb{O}_{T^*(w)} \rangle, \\ \mathbb{O}_{i^\alpha} &:= \Psi_i^\alpha(\mathbb{O}_r). \end{aligned}$$


Théorème [M.]

- $(\mathbb{O}_f)_{f \in \mathfrak{F}_{B_n}}$ est une base de \mathbf{WQSym}_n ,
- $(\mathbb{O}_t)_{t \in \mathfrak{T}_{B_n}}$ est une base de Prim_n ,
- $(\mathbb{O}_t)_{t \in \mathfrak{N}_{B_n}}$ est une base de TPrim_n .

Théorèmes [M.]

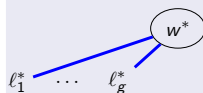
Théorème [M.]

- $(\mathbb{O}_f)_{f \in \mathfrak{F}_{B_n}}$ base de \mathbf{WQSym}_n ,
- $(\mathbb{O}_t)_{t \in \mathfrak{T}_{B_n}}$ base de \mathbf{Prim}_n ,
- $(\mathbb{O}_t)_{t \in \mathfrak{N}_{B_n}}$ base de \mathbf{TPrim}_n .

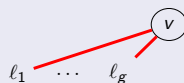
Théorème [M.]

- $(\mathbb{P}_f)_{f \in \mathfrak{F}_{R_n}}$ base de \mathbf{WQSym}_n^* ,
- $(\mathbb{P}_t)_{t \in \mathfrak{T}_{R_n}}$ base de \mathbf{Prim}_n^* ,
- $(\mathbb{P}_t)_{t \in \mathfrak{N}_{R_n}}$ base de \mathbf{TPrim}_n^* .

Rigidité

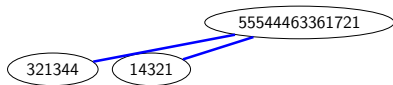


\forall bijection entre les mots
irréductibles bleus et rouges,
recoloration des squelettes

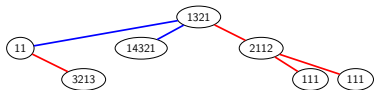


Forêts bicolores à travers un exemple

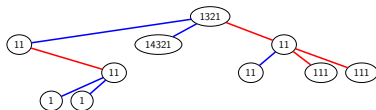
$$T_{\text{Bske}}(DDCCCEBBE9FA587653213449) =$$



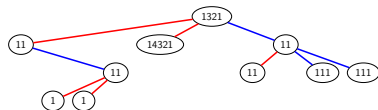
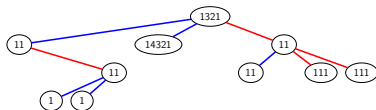
Forêts bicolores à travers un exemple

 $T_{BR}(DDDCCEBBE9FA587653213449)$


Forêts bicolores à travers un exemple

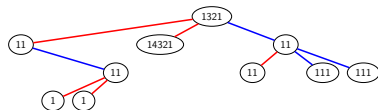
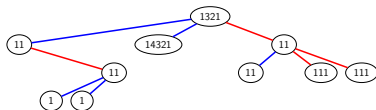
 $T_{BR}(DDDCCCEBBE9FA587653213449) =$


Forêts bicolores à travers un exemple

$$T_{BR}(DDDCCCEBBE9FA587653213449) =$$


Forêts bicolores à travers un exemple

$$T_{BR}(DDDCCEBBE9FA587653213449) = T_{RB}(DCBDDE7A9875F633422211145) =$$



Théorèmes [M.]

Théorème [M.]

- $(\mathbb{O}_f)_{f \in \mathfrak{F}_{B_n}}$ base de \mathbf{WQSym}_n ,
- $(\mathbb{O}_t)_{t \in \mathfrak{T}_{B_n}}$ base de \mathbf{Prim}_n ,
- $(\mathbb{O}_t)_{t \in \mathfrak{N}_{B_n}}$ base de \mathbf{TPrim}_n .

Théorème [M.]

- $(\mathbb{P}_f)_{f \in \mathfrak{F}_{R_n}}$ base de \mathbf{WQSym}_n^* ,
- $(\mathbb{P}_t)_{t \in \mathfrak{T}_{R_n}}$ base de \mathbf{Prim}_n^* ,
- $(\mathbb{P}_t)_{t \in \mathfrak{N}_{R_n}}$ base de \mathbf{TPrim}_n^* .

Bijection [M.]

Involution grâce aux forêts bicolores.

Isomorphisme bidendriforme entre \mathbf{WQSym} et \mathbf{WQSym}^* .