RENDEZ-VOUS

LA PHYSIQUE A-T-ELLE BESOIN DES NOMBRES RÉELS ?

L'usage des nombres réels pour représenter des grandeurs physiques semble aller de soi. Pourtant, ces nombres ne sont pas aussi réels que le suggère leur nom, et ils engendrent parfois illusions et faux espoirs.

L'AUTEUR

JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite à l'université de Lille et chercheur au laboratoire Cristal (Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille)

Jean-Paul Delahaye a notamment publié : **Les mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

L'usage des nombres réels en physique et plus généralement dans les sciences a pour origine la géométrie, avec sa conception idéalisée des points d'une droite, d'un plan ou de l'espace. Les nombres réels, dont la structure constitue ce qu'on dénomme « le continu », possèdent de formidables propriétés. En voici quatre.

– Entre deux nombres réels x et y tels que $x < y$, il y a toujours le nombre réel $(x + y)/2$ et une infinité d'autres, dont tous ceux donnés par la formule $(nx + my)/(n + m)$ où n et m sont deux entiers positifs :
$x = (nx + mx)/(n + m)$
$< (nx + my)/(n + m) < (ny + my)/(n + m) = y$.

– Si une suite de nombres réels $x_1, x_2, x_3, \ldots$ est croissante et majorée (tous les x_i sont inférieurs à un nombre fixé M), alors elle converge vers une limite qui est un nombre réel. Cette propriété permet de savoir qu'il existe un nombre réel x dont le carré est 2 ; on le note $\sqrt{2}$. Cette seconde propriété est importante, car la première propriété qu'ont aussi les nombres rationnels (les quotients de deux entiers) ne permet pas de démontrer qu'un tel nombre existe ; d'ailleurs, $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

– Les opérations d'addition et de multiplication entre nombres réels ont des propriétés simples et bien commodes, qui en font ce que les mathématiciens nomment un « corps ». On a ainsi $x + y = y + x$, $x(y + z) = xy + xz$ et bien d'autres égalités utiles.

– La relation d'ordre sur les nombres réels est totale, c'est-à-dire que deux nombres distincts x et y étant donnés, l'un domine l'autre : on a soit $x < y$, soit $y < x$.

Ces propriétés ont servi de base pour le calcul différentiel et les réels constituent un outil commode pour représenter l'espace physique (chaque point est déterminé par trois nombres réels), pour décrire le temps, les masses, les vitesses, et plus généralement les grandeurs physiques : on formule les lois de la nature en utilisant les nombres réels. La plupart des physiciens utilisent ces nombres sans se poser de question. Pourtant, ils créent une situation insatisfaisante sous plusieurs aspects.

LES UNITÉS IGNORÉES ET LA PRÉCISION LIMITÉE

David Ruelle, membre de l'Académie des sciences, dit que les réels du physicien sont différents de ceux du mathématicien à cause de deux points de divergence grave :

« (a) Les nombres utilisés en physique ont une dimension. Cela signifie qu'ils correspondent à une mesure faite en une unité donnée, par exemple le centimètre pour une longueur, le degré Celsius ou le kelvin pour une température, le centimètre par seconde pour une vitesse, etc. [...] Une formule physique qu'un mathématicien considérerait convenable pourrait être fermement rejetée par un physicien pour une incorrection concernant les unités. (b) Les nombres utilisés en physique ne peuvent être définis qu'avec une précision limitée, car ils proviennent de mesures opérées en utilisant une unité qui n'est définie qu'avec une précision limitée et dans le cadre de théories à l'applicabilité

CE QUI N'A PAS DE SENS POUR UN PHYSICIEN

1

Les nombres réels utilisés en physique ont des propriétés que les mathématiciens jugent importantes et qui, pourtant, n'ont pas vraiment de contrepartie physique. En voici quelques illustrations.

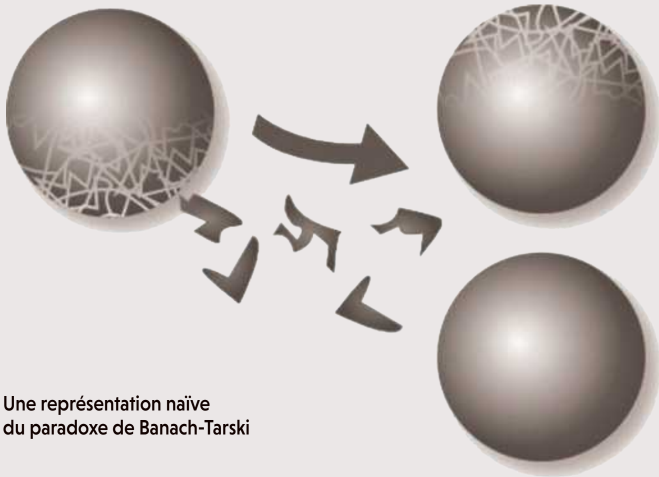
On mesure les distances et les durées avec des nombres réels, alors que ceux-ci ne sont jamais connus qu'avec une précision finie (rarement plus de 10 décimales). Les autres décimales, en quelque sorte cachées, ont-elles un sens ? Ce n'est pas certain, mais alors pourquoi se référer au continu des nombres réels pour parler de distance et de durée ?

L'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable, de même, tout simplement, que l'intervalle des nombres réels entre 0 et 1 : on ne peut pas mettre les entiers en correspondance un à un avec ces nombres. Cette propriété des nombres réels, importante pour les mathématiciens, n'a aucune traduction en physique.

L'axiome du choix indique qu'à toute collection E d'ensembles non vides, par exemple E = {{1, 2}, {*a*, *b*, *c*}, {*z*, *y*}}, correspond au moins un ensemble de choix C ayant un élément commun avec chaque ensemble de E. L'axiome paraît évident, mais il engendre des situations gênantes. Pour notre exemple, C = {2, *b*, *z*} convient. Cependant, à partir de l'idée que l'espace est défini par des triplets de nombres réels, on déduit de l'axiome du choix qu'une boule de rayon 1 se décompose en cinq ensembles de points, que l'on peut déplacer sans les déformer pour recomposer deux boules de rayon 1. Ce paradoxe de la multiplication miraculeuse des boules, nommé « paradoxe de Banach-Tarski » (voir www.madore.org/~david/math/bantar.pdf), n'a évidemment aucune traduction dans le monde physique et il s'oppose à l'intuition la plus élémentaire que nous avons de l'espace et à la loi de conservation de la masse.

L'espace mathématique de la géométrie euclidienne s'étend infiniment loin, alors que les physiciens et cosmologistes n'affirment rien de définitif sur cette question pour l'espace physique.

Stefan Banach (1892-1945) était un mathématicien polonais. Ses travaux ont surtout porté sur l'analyse fonctionnelle, dont il est l'un des fondateurs.



Une représentation naïve du paradoxe de Banach-Tarski

Alfred Tarski (1901-1983) était un logicien et philosophe polonais. Il a vécu et travaillé aux États-Unis depuis le début de la Seconde Guerre mondiale, en 1939.

limitée. Il s'ensuit que l'affirmation mathématique "un nombre réel est rationnel, ou irrationnel" n'a pas de sens pour un physicien.»

Ajoutons qu'un mathématicien accorde une grande importance à l'idée que l'infini des nombres réels est plus grand que l'infini dénombrable des nombres entiers et des nombres rationnels, alors que pour le physicien cela ne correspond à rien de concret.

UNE PHYSIQUE ÉLÉGANTE, MAIS INEXACTE !

Le physicien et mathématicien Roger Penrose, professeur émérite à l'université d'Oxford, exprime aussi ses doutes: «Les nombres réels se réfèrent à une idéalisation mathématique plutôt qu'à une quantité physique objective et réelle. Le système des nombres réels a la propriété, par exemple, qu'entre deux >

> quelconques d'entre eux, si proches soient-ils, il en existe un troisième. Si nous continuions à diviser l'intervalle physique entre deux points, nous atteindrions finalement des échelles si petites que le concept même de distance cesserait d'avoir du sens. On considère qu'à l'échelle de la gravitation quantique, environ $1/10^{20}$ de la taille d'une particule subatomique, ce serait le cas. [...] Les nombres réels sont choisis en physique pour leur utilité mathématique, leur simplicité et leur élégance, et aussi parce qu'ils s'accordent sur un grand intervalle avec les concepts physiques de distance et de temps, [...] mais ils ne sont pas en accord avec les concepts physiques sur toutes les échelles.»

2

LA CARTE N'EST PAS LE TERRITOIRE

Toutefois, pour le physicien et philosophe des sciences français Hervé Zwirn, la difficulté est levée quand on distingue ce que l'on représente et ce qui est représenté: le modèle mathématique n'est pas la réalité modélisée. Il ajoute: «Les nombres réels ne sont pas des objets physiques qui existent dans l'espace, ils ne sont que des modes de représentation qui permettent de se référer à des objets physiques.» Pour lui, il n'y a donc pas de problème grave lié à l'utilisation des nombres réels en physique.

Cependant, en utilisant les nombres réels en physique, on opère une surreprésentation de la réalité: les concepts mathématiques utilisés sont bien plus riches en informations que ne l'est la réalité visée. D'habitude, c'est le contraire! On modélisera par exemple un réseau routier par un graphe mathématique qui contient moins d'informations que le réseau véritable. De même, les neurones formels sont des simplifications discrètes et finies de la complexité biologique des neurones biologiques.

Récemment, Nicolas Gisin, physicien à l'université de Genève, a dénoncé l'une des conséquences de l'utilisation des nombres réels en physique.

On oppose souvent la mécanique classique et la mécanique quantique en affirmant que la première est déterministe alors que la seconde

LA QUESTION DU DÉTERMINISME

La mécanique classique est généralement considérée comme déterministe. L'idée de ce déterminisme a été magistralement exprimée par Pierre-Simon de Laplace dans son essai sur les probabilités de 1814 : « Nous devons envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur, et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, seraient présents à ses yeux. »

Selon Nicolas Gisin, ce déterminisme provient d'une utilisation trompeuse des nombres réels. Ce physicien de l'université de Genève propose de considérer que les nombres réels décrivant l'état initial d'un système physique ne sont fixés que partiellement (c'est-à-dire avec quelques chiffres significatifs) et que ce n'est que plus tard, au cours de l'évolution du système, que les chiffres donnant plus de précisions se déterminent progressivement, et cela d'une manière aléatoire. Cette version non déterministe de la mécanique classique est empiriquement équivalente à sa version usuelle. Symétriquement, Nicolas Gisin insiste sur l'existence de versions déterministes non réfutées de la mécanique quantique, théorie que l'on considère en général comme intrinsèquement indéterministe. Finalement, pour lui et d'autres philosophes des sciences, la question du déterminisme n'est pas une question scientifique.

Pierre-Simon, marquis de Laplace (1749-1827), portrait de Jean-Baptiste Paulin Guérin.

3

TOUS LES CHIFFRES IMPORTENT

En physique classique, on utilise des nombres réels pour représenter les variables physiques. On considérera par exemple la fonction continue f vérifiant $f(x) = 2x$ si x est compris entre 0 et 1/2, et $f(x) = 2(1 - x)$ si x est compris entre 1/2 et 1, pour représenter l'évolution de la coordonnée longitudinale d'un point quand on applique la transformation du boulanger à une pâte qui est allongée puis repliée en deux sur elle-même de manière répétée (on itère l'application de la fonction f à la coordonnée initiale).

L'étude de cette transformation déterministe illustre l'importance de tous les chiffres du nombre réel x donnant la coordonnée d'un point initial quand on suit sa position lors de la manipulation répétée du boulanger. On observe le phénomène de la « montée des chiffres » : les chiffres les plus loin dans le développement en base 2 de x prennent progressivement de plus en plus d'importance en s'approchant de la virgule. Prenons par exemple pour coordonnée initiale le nombre x_0 qui, écrit en base 2, est :

$x_0 = 0{,}01001000100001000001000000100000001\ldots$

La suite des nombres $x_n = f(x_{n-1})$ donnant sa position quand on applique successivement la transformation du boulanger est représentée ci-dessous.

$$x_0 = 0{,}01001000100001000001000000100000001\ldots$$
$$x_1 = 0{,}1001000100001000001000000100000001\ldots$$
$$x_2 = 0{,}110111011110111110111111011111110\ldots$$
$$x_3 = 0{,}01000100001000001000000100000001\ldots$$
$$x_4 = 0{,}1000100001000001000000100000001\ldots$$
$$x_5 = 0{,}111011110111110111111011111110\ldots$$
$$x_6 = 0{,}0010000100000100000010000000 1\ldots$$
$$x_7 = 0{,}010000100000100000010000000 1\ldots$$
$$x_8 = 0{,}10000100000100000010000000 1\ldots$$

est indéterministe. Pour Nicolas Gisin, il s'agit là d'une illusion, et elle est due à l'usage des nombres réels pris trop au sérieux et de la confusion déjà évoquée entre modèle et réalité.

Pour Nicolas Gisin, « la physique classique n'est déterministe que si l'on attribue à l'outil que sont les nombres réels une signification physique. Dès que l'on réalise que les nombres réels mathématiques ne sont "pas vraiment réels", c'est-à-dire qu'ils n'ont aucune signification physique, il s'ensuit que la physique classique n'est pas déterministe. »

En effet, quand on considère l'évolution d'un système physique, par exemple quelques particules ponctuelles à partir d'une situation initiale donnée, elle n'est effectivement déterminée de manière unique et calculable instant après instant qu'à la condition que les données initiales (les positions et vitesses des particules) soient connues avec une précision infinie. Cela revient à prendre au sérieux que les variables physiques sont bien équivalentes à des nombres réels comportant une infinité de décimales.

UNE MÉCANIQUE QUI NE SUPPOSE PAS D'INFORMATIONS INACCESSIBLES

Nicolas Gisin a imaginé une théorie équivalente à la mécanique classique dans laquelle on considère que le système initial dont on étudie l'évolution n'est connu qu'avec une précision limitée, et que ce n'est qu'une fois que le système physique évolue et lorsque c'est nécessaire que les décimales non connues au départ sont fixées, cela de manière différée et aléatoire. Il défend que « cette alternative à la mécanique classique est plus naturelle, car elle ne suppose pas d'informations inaccessibles. » Tout ce qu'est capable de prévoir la mécanique classique est prévu de la même façon par la mécanique alternative de Gisin, et nous avons autant de raisons de croire en cette mécanique non déterministe que nous en avons de croire en la mécanique classique déterministe.

Nicolas Gisin en déduit que la question : « La physique classique est-elle déterministe ? » n'est pas une question scientifique.

Pour compléter sa démonstration, il revient sur la théorie de De Broglie-Bohm de la mécanique quantique qui, en utilisant l'idée qu'existeraient des variables cachées, propose une version déterministe de la mécanique quantique. Bien que cette théorie ait peu de défenseurs, elle n'a pas été réfutée et on peut donc affirmer que, pas plus que la mécanique classique ne décrit vraiment un monde déterministe, la mécanique quantique n'en décrit un vraiment indéterministe.

La mécanique classique et la mécanique quantique sont chacune, au choix, déterministe ou non déterministe et il n'existe pas de moyen empirique pour départager les options. Hervé Zwirn est d'accord avec Nicolas Gisin sur ce point de vue : « La question de savoir si la nature est déterministe ou pas est une fausse question épistémologique qui n'a pas de solution. Elle semble grammaticalement poser une question qui concerne la nature elle-même alors qu'en fait, elle concerne nos moyens de description. »

Une autre raison doit nous rendre méfiants vis-à-vis des nombres réels utilisés en physique. Elle est liée à l'existence des principes de finitude : de même qu'il existe un principe physique fondamental stipulant qu'aucun objet réel et qu'aucune information ne peut voyager >

> plus vite que la lumière, il semble que les physiciens soient prêts à reconnaître qu'un volume fini d'espace ne peut pas contenir une quantité infinie d'informations.

Les informaticiens Pablo Arrighi, de l'université d'Aix-Marseille et Gilles Dowek, de l'Inria et de l'ENS Paris-Saclay, défendent cette idée d'un principe de densité finie d'information et considèrent qu'il devrait être affirmé clairement, comme celui de la vitesse limitée.

UNE DENSITÉ FINIE D'INFORMATION

Bien sûr, un tel principe empêcherait de croire que la position d'une particule et sa vitesse soient déterminées par des nombres réels dont l'infinité de décimales contient potentiellement une infinité d'informations. Pablo Arrighi et Gilles Dowek proposent une expérience de pensée: « Imaginons une quantité infinie d'informations exprimée sous la forme d'une suite illimitée de 0 et de 1; nous pouvons voir cette séquence comme les chiffres d'un nombre réel et écarter les mâchoires d'un pied à coulisse d'une distance correspondant à ce nombre. Cela placerait une quantité infinie d'informations dans un volume fini. Bien sûr, nous avons tous appris que cette idée est absurde et que la distance entre les mâchoires d'un pied à coulisse est fixée avec une précision finie de trois ou quatre chiffres. Il est surprenant que l'affirmation qu'une grandeur physique est toujours définie avec une précision finie n'ait jamais reçu le statut de principe en physique. »

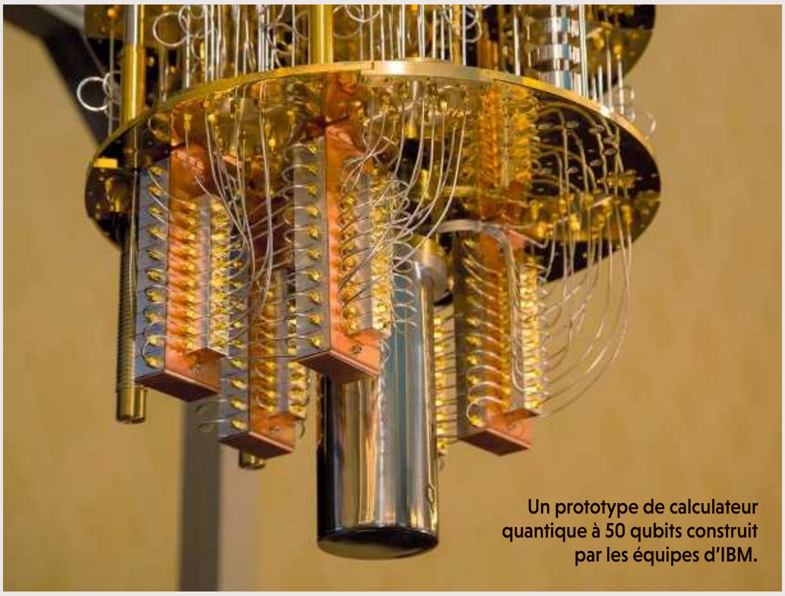
L'idée de ce principe de densité finie d'information, si on savait le rendre précis, aurait une incidence sur les pronostics que l'on fait concernant les capacités futures des ordinateurs quantiques. Le mode de fonctionnement de ces ordinateurs sur lesquels des recherches se poursuivent depuis plus de vingt-cinq ans est la superposition quantique: on obtient dans un volume fini d'espace une grande puissance de calcul en superposant les états quantiques d'un système qu'on fait calculer et qui mène plusieurs calculs en parallèle. Cette possibilité de superposer les calculs est envisagée sans limite et conduirait en théorie à pouvoir dépasser les capacités de calcul des systèmes fondés sur la physique classique.

On sait ainsi comment s'y prendre pour tirer de la mécanique quantique un algorithme fonctionnant en temps polynomial (c'est-à-dire rapidement) pour factoriser les nombres entiers. Cet algorithme conçu par l'Américain Peter Shor en 1995 n'a pas d'équivalent classique connu. Certains systèmes cryptographiques, dont le système RSA notamment utilisé pour les cartes bancaires, s'appuient sur la difficulté de la factorisation. On craint donc que leur sécurité soit mise prochainement en danger.

Pourtant, dès 2003, le logicien Leonid Levin, professeur à l'université de Boston, a exprimé

4

LES CALCULATEURS QUANTIQUES



Un prototype de calculateur quantique à 50 qubits construit par les équipes d'IBM.

Depuis vingt-cinq ans, on mène des travaux sur les systèmes de calcul quantique. Ceux-ci, en théorie, seraient capables de calculer plus rapidement que les ordinateurs classiques. Ils utilisent des bits quantiques, ou qubits, au lieu de bits. L'idée repose sur la possibilité de mener, grâce à la superposition quantique, des calculs parallèles en grand nombre et revient à considérer qu'il n'y a pas de limite à l'exactitude de la théorie quantique, même quand elle contredit le principe de densité finie de l'information, lui-même lié à la méfiance que les nombres réels doivent nous inspirer.

L'objectif de la « suprématie quantique » est de mener avec un ordinateur quantique un calcul infaisable avec un ordinateur classique. Il aurait récemment été atteint par Google, mais l'exploit est contesté par les chercheurs d'IBM. Même si l'objectif est atteint, des chercheurs font remarquer que les méthodes envisagées ne produiront rien d'utile, car elles concernent des calculs spécialisés de densités de probabilité qui n'ont pas d'intérêt pratique. Nul n'a prouvé que les recherches concernant les ordinateurs quantiques n'aboutiront pas, mais divers spécialistes, dont Sabine Hossenfelder, physicienne théoricienne à l'institut d'études avancées de Francfort, expliquent qu'il faut rester prudent. Elle écrit : « Quand verrons-nous un ordinateur quantique avec des millions de qubits ? Personne ne sait. Le problème est qu'il est peu probable que les approches dominantes à l'heure actuelle puissent s'adapter pour changer d'échelle. [...] On ne sait pas comment dépasser quelques centaines de qubits. C'est à la fois un problème d'ingénierie et un problème de coût. Cela explique pourquoi, ces dernières années, on a beaucoup parlé des ordinateurs NISQ *(noisy intermediate scale quantum computers)*. Il s'agit en réalité d'un terme inventé pour faire croire aux investisseurs que l'informatique quantique aura des applications pratiques au cours des prochaines décennies. Même s'il est possible qu'on sache prochainement faire fonctionner des NISQ, personne ne sait en tirer quelque chose d'utile. Je ne suis pas très optimiste sur le fait que les ordinateurs quantiques auront bientôt des applications pratiques. Je crains que l'informatique quantique ressemble à la fusion nucléaire ; c'est-à-dire qu'elle reste toujours prometteuse, mais ne fonctionne jamais vraiment. »

des réserves sur ce que l'on peut attendre des ordinateurs quantiques. Pour lui, croire aux pouvoirs colossaux des ordinateurs quantiques, c'est croire à la possibilité de la manipulation physique de nombres comportant une très grande quantité de décimales, et c'est donc presque croire à l'existence physique des nombres réels et à la capacité de placer dans un espace fini une quantité illimitée d'informations.

À propos de la mise en œuvre de l'algorithme de Shor, Leonid Levin écrivait: «Le problème majeur réside dans l'idée que les équations quantiques de base restent valides avec plusieurs centaines, voire plusieurs millions, de décimales, car c'est là que résident les chiffres significatifs des amplitudes quantiques pertinentes. Or nous n'avons jamais vu de loi physique valable sur plus d'une dizaine de décimales et, en physique, la prise en compte de nouvelles décimales supplémentaires exige en général de repenser en profondeur les concepts de base d'une théorie.»

Pablo Arrighi insiste au sujet de la mécanique quantique sur la séparation en deux du principe de densité finie d'information: il y a d'un côté l'idée qu'il serait impossible que trop de qubits (bits quantiques) soient présents dans un même dispositif contenu dans un volume fini, et il y a de l'autre l'affirmation des limites aux nombres de décimales des nombres réels utilisés par nos théories (y compris la mécanique quantique).

Aujourd'hui, la réalisation d'ordinateurs quantiques progresse et on réussit avec eux à factoriser des entiers de 7 chiffres. Le nombre 56153 a ainsi été factorisé par un système quantique, avec pour résultat 233×241. Le record atteint en 2018 semble être 4088459 = 2017×2027. Reste que les ordinateurs classiques sont pour l'instant bien supérieurs aux ordinateurs quantiques; par exemple, ils factorisent assez facilement des entiers de 100 chiffres. Les lents progrès du côté quantique ne font guère craindre pour la cryptographie dans l'immédiat. Un rapport de l'Académie des sciences des États-Unis paru en 2019 (*voir la bibliographie*) décrit la situation des recherches en calcul quantique; il est venu refroidir l'enthousiasme excessif des médias en indiquant par exemple qu'il n'y a rien à craindre en cryptographie, au moins pour les dix années à venir.

Même si l'on ne peut pas statuer sur l'objection de Leonid Levin, peut-être faut-il s'interroger sur le principe de densité finie d'information: concerne-t-il la mécanique quantique et sous quelle forme précisément?

Puisque les nombres réels utilisés en physique sont dangereux et sources d'illusions, comment les éviter?

Du côté des mathématiques, plusieurs options se présentent. Plutôt que d'utiliser les nombres réels, on pourrait n'utiliser que les nombres rationnels (nombres quotients de deux entiers). Il serait gênant cependant de ne plus avoir le nombre $\sqrt{2}$!

On pourrait agrandir un peu cet ensemble de nombres en y ajoutant tous les nombres algébriques, qui sont les solutions d'équations polynomiales à coefficients entiers. Notre $\sqrt{2}$ serait alors un nombre acceptable… mais pas le nombre π qui est non algébrique (transcendant). On pourrait considérer tous les nombres calculables, c'est-à-dire définissables par algorithmes. Cette fois, π serait dans le corps de ces nombres calculables, qui est dénombrable: il a autant d'éléments qu'il y a de nombres entiers. Le corps des nombres calculables a d'assez bonnes propriétés et on a étudié sérieusement l'idée d'en faire une base pour la physique, par exemple dans le livre *Computability in Analysis and Physics*, de Marian Pour-El et Ian Richards (Cambridge University Press, 1989 et 2017).

Hélas, avec ces approches, il reste vrai qu'entre deux nombres, il y en a toujours une infinité d'autres. Il n'y a pas non plus de limite à la quantité d'informations contenue dans ces nombres. De plus, l'analyse mathématique que l'on construit avec eux est sensiblement plus compliquée que l'analyse classique. D'où un faible intérêt de la part des physiciens.

LIMITER L'USAGE DES NOMBRES RÉELS?

Du côté des physiciens, diverses approches qui limitent l'usage des nombres réels ont été tentées. La plus importante est sans doute la théorie de la gravitation quantique à boucles, dont Carlo Rovelli, à l'université de Marseille, est un promoteur (*voir* Pour la Science *de juin 2019*). La théorie résulte de la volonté de concilier la notion d'espace-temps de la relativité générale et la mécanique quantique. Elle propose avec sérieux l'idée d'un espace discret. Le formalisme mathématique des réseaux de spin, des graphes portant localement une information finie et dont les nœuds forment l'espace, évite en un sens les volumes finis ayant une densité infinie d'information. Il constitue donc un bon début de réponse aux problèmes évoqués, même si ce n'est pas le but principal de la théorie.

Une conséquence de cette conception de l'espace est qu'en se contractant, les trous noirs finiraient, à cause de la non-divisibilité infinie de l'espace, par rebondir et devenir des trous blancs (*voir* Pour la Science *d'août 2019*), que l'on tente aujourd'hui d'observer.

Disposerons-nous bientôt d'une théorie utilisable et efficace, proposant des outils mathématiques raisonnables pour modéliser la réalité physique et évitant les pièges des modèles à contenus excessifs d'informations? Nous l'ignorons, mais ce n'est pas impossible. Et dans ce cas, cela prouverait le bien-fondé des soucis que ressentent de nombreux physiciens et philosophes. ■

BIBLIOGRAPHIE

Quantum computing. Progress and prospects, *National Academies Press*, 2019 (https://doi.org/10.17226/25196)

N. Gisin, **Indeterminism in physics, classical chaos and Bohmian mechanics. Are real numbers really real ?**, *David Bohm Centennial Symposium, London, Oct. 2017*, 2019 (https://arxiv.org/pdf/1803.06824.pdf).

P. Arrighi et G. Dowek, **The principle of a finite density of information**, dans H. Zenil, *Irreducibility and Computational Equivalence*, Springer, pp. 127-134, 2015.

C. Rovelli et F. Vidotto, **Covariant loop quantum gravity : An elementary introduction to quantum gravity and spinfoam theory**, Cambridge University Press, 2014.

D. Ruelle, **Are real numbers the same for physicists and mathematicians ?**, 2012 (https://bit.ly/31rJ3SW).

L. Levin, **Polynomial time and extravagant models**, *Problems of Information Transmission*, vol. 39(1), pp. 92-103, 2003.

R. Penrose, **L'esprit, l'ordinateur et les lois de la physique**, Dunod, 1997.