Correction Feuille 5 - Calcul des séquents

Exercice 1 Séquents valides.

Donner pour chacun des séquents suivants la formule associée. Dire si les séquents sont valides.

1. $(p \vee q \Rightarrow r), \neg(p \wedge z) \vdash \neg p, \neg z$
2. $\vdash (r \wedge s), q$
3. $(p \vee q) \Rightarrow r, \neg(p \vee z) \vdash$
4. $\vdash$
5. $\perp \vdash$

Correction :

La formule associée est obtenue en remplaçant les virgules à gauche par des $\wedge$ et celles de droite par des $\vee$. Le $\vdash$ est remplacé par un $\Rightarrow$. Le vide à gauche correspond à $\top$ et à droite à $\perp$.

La validité du séquent est équivalente à la validité de la formule associée, mais il est souvent plus direct de travailler directement sur le séquent. Un séquent est valide si toute interprétation qui rend vraies les formules de gauche rend vraie au moins une formule à droite. Elle n'est pas valide dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsqu'il existe une interprétation qui rend vraies toutes les formules de gauche et fausses toutes les formules de droites.

On n'utilisera pas de preuve mais on s'appuiera sur des équivalences entre formules pour montrer la validité et sur des contre-exemples pour la non-validité.

1. la formule associée est $(p \vee q \Rightarrow r) \wedge \neg(p \wedge z) \Rightarrow \neg p \vee \neg z$. le séquent est valide car $\neg(p \wedge z) \equiv \neg p \vee \neg z$ donc toute interprétation qui rend vraie l'hypothèse $\neg(p \wedge z)$ rend vraie $\neg p \vee \neg z$ et donc rend vraie au moins une des conclusions $\neg p$ ou $\neg z$
2. la formule associée $\top \Rightarrow (r \wedge s) \vee q$ c'est à dire $(r \wedge s) \vee q$ qui est non valide (prendre r et q faux)
3. La formule associée est $((p \vee q) \Rightarrow r) \wedge \neg(p \vee z) \Rightarrow \perp$. Le séquent est non valide car on peut rendre les hypothèses vraies dans l'interprétation où r est vraie et p et z sont faux et que la conclusion est toujours fausse.
4. la formule associée $\top \Rightarrow \perp$ qui est toujours fausse donc le séquent est non valide
5. la formule associée est $\perp \Rightarrow \perp$ qui est toujours vraie donc le séquent est valide

Exercice 2 Preuve de séquents.

On se donne les séquents suivants

- $S_1 : r, s \vdash (r \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)) \wedge ((q \vee \neg p) \Rightarrow r)$
- $S_2 : \vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge \neg q) \Rightarrow (r \wedge \neg r)$
- $S_3 : q, r \Rightarrow p \vdash \neg(p \Rightarrow q) \wedge r, \neg q \Rightarrow \neg r, p \wedge q \wedge (\neg p \vee q)$

Pour chacun des séquents précédents :

1. Ecrire la formule logique associée.
2. En utilisant le système G , déterminer si le séquent est valide. Que peut-on en conclure pour la formule logique associée? Si la formule n'est pas valide, donner une interprétation dans laquelle la formule est évaluée à faux.

Correction :

1. On remplace les virgules à gauche par des $\wedge$ et à droite par des $\vee$. Le $\vdash$ est remplacé par un $\Rightarrow$. Attention à bien parenthéser les formules lorsqu'on supprime les virgules.

- $S_1 : r \wedge s \Rightarrow (r \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)) \wedge ((q \vee \neg p) \Rightarrow r)$
- $S_2 : (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge \neg q) \Rightarrow (r \wedge \neg r)$
- $S_3 : q \wedge (r \Rightarrow p) \Rightarrow (\neg(p \Rightarrow q) \wedge r) \vee (\neg q \Rightarrow \neg r) \vee (p \wedge q \wedge (\neg p \vee q))$

2. On suit les règles du système G pour construire un arbre de preuve dont la racine est le séquent à prouver. On regarde ensuite si toutes les feuilles correspondent ou non à la règle hypothèse.
- Attention : il n'est pas autorisé de "simplifier" une formule du séquent en utilisant des équivalences, on travaille sur la syntaxe des formules en appliquant les règles de dérivation du système G en fonction des connecteurs logiques présents dans les formules.

— S_1

$$\begin{array}{c} (\neg g) \frac{r, s \vdash q, p}{r, s, \neg p \vdash q} \\ (\Rightarrow d) \frac{r, s \vdash \neg p \Rightarrow q}{r, s \vdash r \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)} \quad (\text{HYP}) \frac{}{r, s, (q \vee \neg p) \vdash r} \\ (\Rightarrow d) \frac{r, s \vdash r \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)}{r, s \vdash (q \vee \neg p) \Rightarrow r} \\ (\wedge d) \frac{}{r, s \vdash (r \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)) \wedge ((q \vee \neg p) \Rightarrow r)} \end{array}$$

Une des feuilles est le séquent $r, s \vdash q, p$ qui n'est pas valide : prendre l'interprétation dans laquelle r et s sont vrais mais q et p sont faux. On en déduit que le séquent S_1 est faux dans cette même interprétation et donc n'est pas valide.

- S_2 : attention à bien parenthéser la formules ($A \Rightarrow B \Rightarrow C = A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$). Il ne faut pas se laisser influencer par le fait que la conclusion du séquent $r \wedge \neg r$ est insatisfiable (toujours fausse). Le séquent peut néanmoins être valide s'il y a une contradiction dans les hypothèses. Par contre il est inutile de chercher à montrer séparément r et $\neg r$.

$$\begin{array}{c} (\text{HYP}) \frac{}{q, p \vdash q, (r \wedge \neg r)} \\ (\neg g) \frac{q, p \vdash q, (r \wedge \neg r)}{q, p, \neg q \vdash (r \wedge \neg r)} \quad (\text{HYP}) \frac{}{p, \neg q \vdash (r \wedge \neg r), p} \\ (\Rightarrow g) \frac{p \Rightarrow q, p, \neg q \vdash (r \wedge \neg r)}{p \Rightarrow q, (p \wedge \neg q) \vdash (r \wedge \neg r)} \\ (\wedge g) \frac{}{p \Rightarrow q, (p \wedge \neg q) \vdash (r \wedge \neg r)} \\ (\Rightarrow d) \frac{}{p \Rightarrow q \vdash (p \wedge \neg q) \Rightarrow (r \wedge \neg r)} \\ (\Rightarrow d) \frac{}{\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge \neg q) \Rightarrow (r \wedge \neg r)} \end{array}$$

L'arbre de preuve est complet : toutes les feuilles correspondent à une règle hypothèse, le séquent est donc valide.

- S_3 : Dans ce séquent, il y a plusieurs règles qui s'appliquent suivant la formule choisie. On peut avoir l'intuition de pourquoi le séquent est valide. L'hypothèse nous dit que q est vrai. Donc $\neg q$ est faux et donc $\neg q \Rightarrow \neg r$ est vrai. Il est donc plus rapide de travailler sur cette formule. Néanmoins toute autre stratégie donnera le même résultat mais avec un arbre de preuve plus gros...

$$\begin{array}{c} (\text{HYP}) \frac{}{q, r \Rightarrow p \vdash \neg(p \Rightarrow q) \wedge r, \neg r, p \wedge q \wedge (\neg p \vee q), q} \\ (\neg g) \frac{q, r \Rightarrow p \vdash \neg(p \Rightarrow q) \wedge r, \neg r, p \wedge q \wedge (\neg p \vee q), q}{q, \neg q, r \Rightarrow p \vdash \neg(p \Rightarrow q) \wedge r, \neg r, p \wedge q \wedge (\neg p \vee q)} \\ (\Rightarrow d) \frac{}{q, r \Rightarrow p \vdash \neg(p \Rightarrow q) \wedge r, \neg q \Rightarrow \neg r, p \wedge q \wedge (\neg p \vee q)} \end{array}$$

L'arbre de preuve est complet : toutes les feuilles correspondent à une règle hypothèse, le séquent est donc valide.

Exercice 3 Correction des règles du système G .

Les règles pour la négation dans le système G sont :

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta} \quad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$$

Montrer que ces deux règles sont correctes et réversibles, c'est-à-dire qu'une interprétation rend vrai la conclusion (séquent "sous la barre") si et seulement si elle rend vrai la ou les prémisses (séquent "au-dessus" de la barre).

Correction : une interprétation I rend vrai un séquent si et seulement si elle rend faux l'une des hypothèses (à gauche du signe $\vdash$) ou bien elle rend vrai une des formules conclusion (à droite du signe $\vdash$).

Même si Γ et Δ sont des ensembles de formules, on peut toujours se ramener au cas où c'est une seule formule en prenant la conjonction des formules de Γ et la disjonction des formules de Δ . On peut alors faire une table de vérité et vérifier qu'il y a bien concordance des valeurs de vérité des prémisses et des conclusions de chaque règle.

Γ	Δ	A	$\Gamma \vdash \Delta, A$	$\neg A, \Gamma \vdash \Delta$	$A, \Gamma \vdash \Delta$	$\Gamma \vdash \Delta, \neg A$
V	V	$\bar{-}$	V	V	V	V
V	F	$\bar{V}$	V	V	F	F
V	F	F	F	F	V	V
F	$-$	$-$	V	V	V	V