

Examen - 19 décembre 2013

L'examen dure 3 heures. L'énoncé est composé de 6 pages.

Le barème est indicatif. Toutes les réponses devront être clairement justifiées.

Le seul document autorisé est une page A4 manuscrite recto-verso. Le tableau résumant les règles du système G est donné à la fin du sujet.

Inscrivez votre nom sur chaque copie et numérotez-la.

Cacheter toutes les copies, recopier le numéro d'anonymat sur les intercalaires !

Exercice 1 *Questions de cours (2 points)*

Dire si les affirmations suivantes sont correctes ou non, justifier vos réponses.

1. Soit `valid` un algorithme qui répond vrai pour une formule P si la formule P est valide et faux sinon. À partir de `valid`, il est possible de construire un algorithme `sat` qui répond vrai si son entrée est une formule satisfiable et faux sinon.
2. Il existe un algorithme qui étant donnée une formule du calcul des prédicats répond vrai sur une entrée P si la formule P est satisfiable et faux sinon.

Correction :

- *Vrai* : en effet une formule A est insatisfiable si et seulement si la formule $\neg A$ est valide donc on teste si $\neg A$ est valide auquel cas auquel cas A n'est pas satisfiable sinon A est satisfiable.
- *Faux* : la satisfiabilité dans le calcul des prédicats n'est pas décidable.

Exercice 2 *Logique propositionnelle (7 points)*

On introduit le connecteur $|$ (barre de Sheffer) dont la table de vérité est donnée par

x	y	$x y$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

1. Donner une forme normale conjonctive et une forme normale disjonctive de la formule $x | y$.

Correction : FNC et FND : $(\neg x \vee \neg y)$ autre FND : $(x \wedge \neg y) \vee \neg x$

2. Dire si le connecteur de Sheffer est commutatif ($x | y \equiv y | x$)? et s'il est associatif ($(x | y) | z \equiv x | (y | z)$).

Correction : On a $x | y \equiv y | x$ (la table de vérité est symétrique). Par contre ce n'est pas associatif. Si x et y sont F et z est V on a $(x | y) | z$ est V et donc $(x | y) | z$ est F mais $x | (y | z)$ est V car x est F .

3. Donner les tables de vérité des formules $(x | x)$, $((x | x) | x)$ et $(x | y) | (x | y)$

Correction :

x	y	$x x$	$(x x) x$	$(x y)$	$(x y) (x y)$
V	V	F	V	F	V
F	V	V	V	V	F
V	F			V	F
F	F			V	F

4. Donner des formules équivalentes à \top , \perp , $\neg x$, $x \wedge y$, $x \vee y$ et $x \Rightarrow y$ qui n'utilisent que la barre de Sheffer et possiblement les variables x et y . On pourra justifier le résultat soit par des tables de vérité, soit en utilisant des équivalences avec les formules propositionnelles usuelles.

Correction :

$$\begin{aligned} \perp &\equiv ((x | x) | x) | ((x | x) | x) & \top &\equiv (x | x) | x & \neg x &\equiv x | x \\ (x \wedge y) &\equiv (x | y) | (x | y) & (x \vee y) &\equiv (x | x) | (y | y) & (x \Rightarrow y) &\equiv x | (y | y) \equiv x | (x | y) \end{aligned}$$

5. Définir par des équations récursives une fonction **shef** qui étant donnée une formule propositionnelle construite sur les connecteurs habituels, la transforme en une formule qui ne contient que des variables propositionnelles et la barre de Sheffer.

Correction :

$$\begin{aligned} \mathit{shef}(x) &= x & x \text{ variable prop} \\ \mathit{shef}(\perp) &= ((x|x)|x)|((x|x)|x) \\ \mathit{shef}(\top) &= (x|x)|x \\ \mathit{shef}(\neg P) &= (\mathit{shef}(P)|\mathit{shef}(P)) \\ \mathit{shef}(P \wedge Q) &= (\mathit{shef}(P)|\mathit{shef}(Q))|(\mathit{shef}(P)|\mathit{shef}(Q)) \\ \mathit{shef}(P \vee Q) &= (\mathit{shef}(P)|\mathit{shef}(P))|(\mathit{shef}(Q)|\mathit{shef}(Q)) \\ \mathit{shef}(P \Rightarrow Q) &= \mathit{shef}(P)|(\mathit{shef}(Q)|\mathit{shef}(Q)) \end{aligned}$$

6. Donner le résultat de $\mathit{shef}(x \vee (y \vee z))$.

Correction : $\mathit{shef}(x \vee y \vee z) = (x | x) | (((y | y) | (z | z)) | ((y | y) | (z | z)))$

7. Si n est le nombre de connecteurs logiques dans la formule P , quel est l'ordre de grandeur du nombre de barres de Sheffer dans la formule $\mathit{shef}(P)$ en fonction de n .

Correction : La taille de la formule grossit exponentiellement en fonction de la taille de la formule initiale.

8. On veut construire des règles du système G pour la barre de Sheffer. On introduit la règle droite suivante

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A | B, \Delta}$$

- (a) Montrer que cette règle est correcte et inversible, c'est-à-dire que le séquent $\Gamma, A, B \vdash \Delta$ est valide si et seulement si $\Gamma \vdash A | B, \Delta$ l'est.

- (b) En utilisant une forme équivalente à $A \mid B$ à l'aide des connecteurs usuels, proposer une règle gauche pour $A \mid B$, c'est-à-dire de la forme

$$\frac{\dots \quad \dots}{\Gamma, A \mid B \vdash \Delta}$$

qui soit correcte et inversible (indication : il y a deux séquents en prémisse de la règle).

Correction :

- (a) On compare les tables de vérité de $(\Gamma \wedge A \wedge B) \Rightarrow \Delta$ et $\Gamma \Rightarrow (A \mid B) \vee \Delta$ et on vérifie qu'elles sont identiques.

Γ	A	B	Δ	$(\Gamma \wedge A \wedge B) \Rightarrow \Delta$	$\Gamma \Rightarrow (A \mid B) \vee \Delta$
F	-	-	-	V	V
V	-	-	V	V	V
V	F	-	F	V	V
V	V	F	F	V	V
V	V	V	F	F	F

- (b) On a $A \mid B$ équivalent à $\neg A \vee \neg B$, on utilise donc les règles correspondante, on trouve

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma, A \mid B \vdash \Delta}$$

On vérifie que le séquent en conclusion est valide si et seulement si les deux séquents en hypothèses le sont :

Γ	A	B	Δ	$\Gamma \Rightarrow A \vee \Delta$	$\Gamma \Rightarrow B \vee \Delta$	$\Gamma \wedge (A \mid B) \Rightarrow \Delta$
F	-	-	-	V	V	V
V	-	-	V	V	V	V
V	V	V	F	V	V	V
V	F	-	F	F	-	F
V	V	F	F	V	F	F

Exercice 3 Modélisation (4 points).

On cherche à modéliser un plan de table, c'est-à-dire comment les personnes sont installées pour dîner autour de tables. On se donne les prédicats suivants

$\text{voisin}(x, y)$ x est assis à côté de y
 $\text{ami}(x, y)$ x et y sont amis
 $\text{homme}(x)$ x est un homme
 $x = y$ x et y sont la même personne

- Exprimer par des formules logiques sur le langage précédent les formules suivants
 - Les personnes qui sont assises côte à côte sont amis

- (b) Deux hommes ne sont pas assis côte à côte
 - (c) Une femme est assise à côté d'au moins un homme
 - (d) Personne n'est assis tout seul
 - (e) On ne peut être assis à côté de soi-même
 - (f) Personne n'est assis auprès de plus de deux personnes
2. Soit un domaine composé des objets A, B, C, D, E , on suppose que A, B, C sont les seuls hommes. Tout le monde aime tout le monde sauf A et D qui se détestent. Proposer une interprétation de la relation **voisin** telle que les formules précédentes sont toutes vraies.
 3. On se donne un domaine avec un seul objet A , existe-t-il des interprétations des prédicats qui valident toutes les formules de la question 1 ? justifier votre réponse.
 4. On se donne un domaine avec deux objets A et B , donner toutes les interprétations des prédicats **voisin**, **ami** et **homme** qui valident toutes les formules de la question 1. On ne donnera que des modèles dans lesquelles les relations **voisin**, **ami** sont symétriques.

Correction :

1. (a) $\forall xy, \text{voisin}(x, y) \Rightarrow \text{ami}(x, y)$
 (b) $\forall xy, \text{voisin}(x, y) \Rightarrow \neg \text{homme}(x) \vee \neg \text{homme}(y)$
 (c) $\forall x, \neg \text{homme}(x) \Rightarrow \exists y, \text{voisin}(x, y) \wedge \text{homme}(y)$
 (d) $\forall x, \exists y, \text{voisin}(x, y)$
 (e) $\forall xy, \text{voisin}(x, y) \Rightarrow \neg x = y$
 (f) $\forall xy_1y_2y_3, \text{voisin}(x, y_1) \wedge \text{voisin}(x, y_2) \wedge \text{voisin}(x, y_3) \wedge \neg y_1 = y_2 \Rightarrow y_3 = y_1 \vee y_3 = y_2$
2. On a deux femmes et 3 hommes, comme deux hommes ne peuvent être côte à côte, on alterne homme-femme-homme-femme-homme. Comme A et D se détestent, la femme D doit être entre B et C on a donc

$$\text{voisin} = \{(A, E), (E, B), (B, D), (D, C), (E, A), (B, E), (D, B), (C, D)\}$$

3. Non il n'y a pas de modèle avec un seul élément car toute personne doit être assise à côté de quelqu'un (propriété (d)), il faudrait donc **voisin(a, a)** qui est exclu (propriété (e)).
- 4.

$$\begin{array}{ll} \text{voisin} = \{(A, B), (B, A)\} & \text{seule solution} \\ \text{ami} = \{(A, B), (B, A)\} \cup X & X \in \{\emptyset, \{(A, A)\}, \{(B, B)\}, \{(A, A), (B, B)\}\} \text{ quatre solutions} \\ \text{homme} = \{A\} & \text{un homme-une femme} \\ \text{homme} = \{B\} & \text{un homme-une femme} \end{array}$$

Exercice 4 Modèles et Résolution (2 points).

On se place dans un langage avec deux symboles de prédicat unaires P et Q . Soit la formule

$$F \stackrel{\text{def}}{=} \exists x, \forall y, \forall z, ((P(y) \Rightarrow Q(z)) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow Q(x)))$$

1. On étend le langage avec deux constantes a et b , donner une formule propositionnelle équivalente pour les modèles avec au plus deux éléments. On utilisera la notation $R(x, y, z)$ pour représenter la formule $(P(y) \Rightarrow Q(z)) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow Q(x))$.
2. Mettre la formule $\neg F$ sous forme clausale.
3. Utiliser la résolution pour déduire la clause vide.
4. Que peut-on en déduire sur la validité de F ?

Correction :

1. $(R(a, a, a) \wedge R(a, a, b) \wedge R(a, b, a) \wedge R(a, b, b)) \vee (R(b, a, a) \wedge R(b, a, b) \wedge R(b, b, a) \wedge R(b, b, b))$
2. – forme normale de négation : $\neg F \equiv \forall x, \exists y, \exists z, (\neg P(y) \vee Q(z)) \wedge P(x) \wedge \neg Q(x)$
 – skolemisation : $\forall x, (\neg P(f(x)) \vee Q(g(x))) \wedge P(x) \wedge \neg Q(x)$
 – forme clausale $C_1 : \neg P(f(x)) \vee Q(g(x))$ $C_2 : P(x)$ $C_3 : \neg Q(x)$
3. $C_4 : Q(g(x))$ par résolution de C_1 et C_2 , puis avec C_3 on obtient la clause vide
4. la formule $\neg F$ est insatisfiable donc la formule F est valide

Exercice 5 Résolution (5 points)

On se place sur un langage avec un prédicat binaire $S(x, y)$, une constante $\mathbf{1}$ et deux symboles de fonction unaires \mathbf{b}_0 et \mathbf{b}_1 . On introduit les formules suivantes

$$\begin{aligned} S_0 &: S(\mathbf{1}, \mathbf{b}_0(\mathbf{1})) \\ S_1 &: \forall x, S(\mathbf{b}_0(x), \mathbf{b}_1(x)) \\ S_2 &: \forall x, S(x, y) \Rightarrow S(\mathbf{b}_1(x), \mathbf{b}_0(y)) \end{aligned}$$

1. Soit une interprétation I dont le domaine D est formé des entiers naturels non nuls et dans laquelle les symboles sont interprétés de la manière suivante $\mathbf{1}_I = 1$ $(\mathbf{b}_0)_I(x) = 2 \times x$ $(\mathbf{b}_1)_I(x) = 2 \times x + 1$.

Donner deux interprétations différentes de la relation S qui satisfont les trois formules S_0, S_1 et S_2 .

2. Pour chacun des couples de formules suivantes dire si elles sont unifiables et si oui donner l'unificateur principal :

$$\begin{aligned} 1 &: S(\mathbf{b}_1(x), y) \stackrel{?}{=} S(z, \mathbf{b}_0(x)) \\ 2 &: S(\mathbf{b}_1(x), y) \stackrel{?}{=} S(x, \mathbf{b}_0(z)) \\ 3 &: S(\mathbf{b}_1(x), \mathbf{1}) \stackrel{?}{=} \neg S(\mathbf{b}_1(\mathbf{1}), z) \\ 4 &: S(\mathbf{b}_1(x), \mathbf{1}) \stackrel{?}{=} S(\mathbf{b}_1(\mathbf{b}_0(y)), x) \end{aligned}$$

3. En utilisant le système G , montrer le séquent $S_0, S_1, S_2 \vdash \forall y, \exists x, S(x, \mathbf{b}_1(\mathbf{b}_0(y)))$.
4. Mettre les formules S_0, S_1 et S_2 en forme clausale.
5. En utilisant la méthode de résolution, montrer que la formule $\exists x, S(x, \mathbf{b}_0(\mathbf{b}_1(\mathbf{1})))$ est une conséquence logique des formules S_0, S_1 et S_2 .
6. Toto se demande s'il peut prouver la formule $\exists x, S(x, \mathbf{1})$ par résolution à partir de S_0, S_1 et S_2 . Il essaie d'utiliser la même méthode, que constate-t-il ?
7. La formule $(S_0 \wedge S_1 \wedge S_2) \Rightarrow \exists x, S(x, \mathbf{1})$ est-elle valide ? est-elle satisfiable ?

Correction :

1. On peut prendre $S_I = \{(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid y = x + 1\}$ en effet, dans cette interprétation les formules deviennent $S_0 : 2 \times 1 = 1 + 1$, $S_1 : \forall x, 2x + 1 = 2x + 1$, $S_2 : \forall xy, y = x + 1 \Rightarrow (2 \times y) = 2x + 1 + 1$ qui sont toutes vraies. Un autre modèle évident est si $S = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire que $S(x, y)$ est vrai pour tous les entiers non nuls.

2. (a) unifiable $\{y \leftarrow \mathbf{b}_0(x); z \leftarrow \mathbf{b}_1(x)\}$

(b) pas unifiable car il faudrait $x \stackrel{?}{=} \mathbf{b}_1(x)$ qui n'a pas de solution

(c) pas unifiable (formule et sa négation)

(d) pas unifiable car il faudrait $x \stackrel{?}{=} \mathbf{l}$ et $x \stackrel{?}{=} \mathbf{b}_0(y)$

3.

$$\begin{array}{c} \text{HYP} \frac{\frac{(\forall G(S_1, x = \mathbf{B}_1(y))) \quad (\exists D(x = \mathbf{B}_0(\mathbf{B}_0(y))))}{S_0, S_1, S(\mathbf{b}_0(\mathbf{b}_0(y)), \mathbf{b}_1(\mathbf{b}_0(y))), S_2 \vdash S(\mathbf{b}_0(\mathbf{b}_0(y)), \mathbf{b}_1(\mathbf{b}_0(y)))}}{S_0, S_1, S_2 \vdash S(\mathbf{b}_0(\mathbf{b}_0(y)), \mathbf{b}_1(\mathbf{b}_0(y)))}}{S_0, S_1, S_2 \vdash \exists x, S(x, \mathbf{b}_1(\mathbf{b}_0(y)))}}{(\forall D) \frac{S_0, S_1, S_2 \vdash \exists x, S(x, \mathbf{b}_1(\mathbf{b}_0(y)))}{S_0, S_1, S_2 \vdash \forall y, \exists x, S(x, \mathbf{b}_1(\mathbf{b}_0(y)))}} \end{array}$$

4.

$$C_0 : S(\mathbf{l}, \mathbf{b}_0(\mathbf{l})) \quad C_1 : S(\mathbf{b}_0(x), \mathbf{b}_1(x)) \quad C_2 : \neg S(x, y) \vee S(\mathbf{b}_1(x), \mathbf{b}_0(y))$$

5. soit la formule $F \stackrel{\text{def}}{=} \exists x, S(x, \mathbf{b}_0(\mathbf{b}_1(\mathbf{l})))$

– On met $\neg F$ en forme clausale on a $\neg F \equiv \forall x, \neg S(x, \mathbf{b}_0(\mathbf{b}_1(\mathbf{l})))$ et donc $C_3 : \neg S(z, \mathbf{b}_0(\mathbf{b}_1(\mathbf{l})))$

– On unifie C_2 et C_3 , avec $\{y \leftarrow \mathbf{b}_1(\mathbf{l}); z \leftarrow \mathbf{b}_1(x); x \leftarrow x'\}$ on obtient $C_4 : \neg S(x', \mathbf{b}_1(\mathbf{l}))$ on unifie C_4 avec C_1 avec $\{x \leftarrow \mathbf{l}; x' \leftarrow \mathbf{b}_0(\mathbf{l})\}$ et on obtient la clause vide.

6. Lorsque l'on met la formule $\neg \exists x, S(x, \mathbf{l})$ en forme clausale, on obtient $\neg S(x, \mathbf{l})$, cette clause ne s'unifie à aucune des clauses positives de C_0, C_1, C_2 , il n'y a donc pas moyen de dériver la clause vide en utilisant C_3 . Comme on a vu que les formules S_0, S_1, S_2 avaient un modèle, il n'y a pas non plus de manière de dériver la clause vide à partir de C_0, C_1 et C_2 .

7. La formule $(S_0 \wedge S_1 \wedge S_2) \Rightarrow \exists x, S(x, \mathbf{l})$ n'est pas valide (sinon on aurait une contradiction dans l'étape précédente ou encore il y aurait un modèle de $(S_0 \wedge S_1 \wedge S_2)$ (celui du successeur) qui ne valide pas $\exists x, S(x, \mathbf{l})$, par contre cette formule est satisfiable si on prend le modèle dans lequel S est vrai partout.

Rappel des règles logiques

hypothèse	(HYP) $\frac{\quad}{A, \Gamma \vdash \Delta, A}$	
	gauche	droite
\perp	$\frac{\quad}{\perp, \Gamma \vdash \Delta}$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \perp}$
\top	$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\top, \Gamma \vdash \Delta}$	$\frac{\quad}{\Gamma \vdash \Delta, \top}$
\neg	$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta}$	$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$
\wedge	$\frac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}$
\vee	$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$
\Rightarrow	$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \Rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}$
\forall	$\frac{P[x \leftarrow t], (\forall x, P), \Gamma \vdash \Delta}{(\forall x, P), \Gamma \vdash \Delta}$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta, P \quad x \notin \text{VI}(\Gamma, \Delta)}{\Gamma \vdash \Delta, (\forall x, P)}$
\exists	$\frac{P, \Gamma \vdash \Delta \quad x \notin \text{VI}(\Gamma, \Delta)}{(\exists x, P), \Gamma \vdash \Delta}$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta, (\exists x, P), P[x \leftarrow t]}{\Gamma \vdash \Delta, (\exists x, P)}$