Licence Informatique, semestre 5 — 2015–16

Eléments de logique pour l'informatique (Info 315)

`http://www.lri.fr/~paulin/Logique`

ANONYMAT :.....................

Examen - 14 décembre 2015

L'examen dure 2 heures. L'énoncé est composé de 5 pages. Toutes les réponses devront être clairement justifiées. Le seul document autorisé est une page A4 manuscripte recto-verso. Le tableau résumant les règles du système G est donné à la fin du sujet.
Inscrivez votre nom sur chaque copie et numérotez-les. Cacheter toutes les copies.
Recopier le numéro d'anonymat sur les intercalaires et sur l'énoncé.
Joindre l'énoncé aux copies avec les réponses du QCM.

Exercice 1 *QCM, 5 points ($+\frac{1}{4}$ par réponse correcte, $-\frac{1}{4}$ par réponse incorrecte)*
Ecrire les réponses sur l'énoncé qui sera rendu avec les copies.
Dire pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse (sans justification).

Affirmation	vrai	faux
$A \vee B = B \vee A$		
$A \vee B \wedge C = (A \vee B) \wedge C$		
$A \vee B \equiv B \vee A$		
$\neg(A \Rightarrow B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$		
$(A \Rightarrow B) \equiv (\neg B \Rightarrow \neg A)$		
$(\forall x, P(x)) \vee (\forall y, Q(y)) \equiv \forall x, (P(x) \vee Q(x))$		
$(\forall x, P(x)) \Rightarrow A \equiv \exists x, (P(x) \Rightarrow A)$		
L'ensemble de formules $\mathcal{E}$ est insatisfiable si		
pour toute interprétation I, il existe $A \in \mathcal{E}$ tel que $\texttt{val}(I, A) = F$		
toute formule $A \in \mathcal{E}$ est insatisfiable		
$A \models B$ si et seulement si $A \Rightarrow B$ est valide		
Soient p, q, et r des variables propositionnelles		
$p \wedge \neg q$ est une clause		
$\neg p \vee q \vee r$ est en forme normale disjonctive		
$\neg p \vee q \vee r$ est en forme normale conjonctive		
R relation binaire, g fonction binaire, f fonction unaire et a constante		
$f(R(a,a))$ est un terme bien formé		
$(\exists y, R(x,y))[x \leftarrow f(y)] = \exists y, R(f(y), y)$		
$g(f(x), g(y,z))$ et $g(f(a), x)$ sont unifiables		
$g(f(x), g(y,z))$ et $g(z, x)$ sont unifiables		
Soit la règle logique $\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}$		
cette règle est correcte		
cette règle est inversible		
Si on peut construire une dérivation de $\perp$ à partir de la forme clausale de la formule $\neg A$, alors la formule A est valide.		
Il existe un algorithme qui décide pour une formule du calcul propositionnel si elle est valide ou pas.		
Soit un prédicat `mange` tel que $\texttt{mange}(x,y)$ est vrai si x mange y. $\forall x\,y\,z, \texttt{mange}(x,y) \wedge \texttt{mange}(x,z) \Rightarrow y = z$ est vrai si toute personne mange exactement une chose.		

Exercice 2 *Résolution (7 points)*

La signature du langage comporte un seul symbole de prédicat binaire R. Soient les formules :

$$\begin{aligned}
A &\stackrel{\text{def}}{=} \forall x, \neg R(x,x)\\
B &\stackrel{\text{def}}{=} \forall x\, y\, z, (R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z))\\
C &\stackrel{\text{def}}{=} \forall x\, y, (R(x,y) \Rightarrow \exists z, R(x,z) \wedge R(z,y))\\
D &\stackrel{\text{def}}{=} \exists x, \exists y, R(x,y)
\end{aligned}$$

1. Donner un modèle de l'ensemble de formules $\{A, B, C\}$ sur le domaine $\mathcal{D} = \{a\}$.
2. Existe-t-il un modèle de l'ensemble de formules $\{A, B, C, D\}$ sur le domaine $\mathcal{D} = \{a, b\}$? Justifier.
3. Donner un modèle de l'ensemble de formules $\{A, B, C, D\}$ sur le domaine des nombres rationnels strictement compris entre 0 et 1.
4. Mettre les formules A, B, C et D en forme clausale, on prendra soin de bien préciser les symboles de Skolem introduits et leur arité.
5. Faire une preuve par réfutation en utilisant la résolution de $B, C, D \models \exists x, \exists y, \exists z, R(x,y) \wedge R(y,z) \wedge R(x,z)$
6. **Question bonus** Dériver dans le système G une preuve du séquent $B, C, D \vdash \exists x, \exists y, \exists z, R(x,y) \wedge R(y,z) \wedge R(x,z)$.

Correction :

1. *On prend comme interprétation de R l'ensemble vide. On a donc $R(a,a)$ qui est faux. Dans cette interprétation, les formules A, B et C sont vraies.*
2. *D'après la formule D en prenant a pour valeur de x, on a qu'il existe une valeur pour y telle que l'interprétation $R(a,y)$ sera vrai. Comme $R(a,a)$ est faux, on a forcément $R(a,b)$ qui est vrai. Et donc d'après la formule C, il existe une valeur pour z telle que l'on aura $R(a,z) \wedge R(z,b)$. Mais z peut valoir a ou b et les deux cas sont impossible car sinon on a $R(a,a)$ ou bien $R(b,b)$ qui est exclu du fait de la formule A.*
3. *On prend comme interprétation de R la relation $x < y$. Elle est irreflexive et transitive (formules A et B). Si on a deux rationnels p et q tels que $0 < p < q < 1$ alors on a $p < \frac{p+q}{2} < q$. La formule C est donc vérifiée avec p comme valeur de x et q comme valeur de y, en prenant pour valeur de z le rationnel $\frac{p+q}{2}$. On a deux rationnels $0 < \frac{1}{3} < \frac{2}{3} < 1$ et donc la propriété D est vraie.*
4. — *A a pour forme clausale $C_1 \stackrel{\text{def}}{=} \neg R(x,x)$*
   — *B a pour forme clausale $C_2 \stackrel{\text{def}}{=} \neg R(x,y) \vee \neg R(y,z) \vee R(x,z)$*
   — *La forme de Skolem de C introduit un symbole de fonction binaire $h(x,y)$, et est équivalente à $\forall x\, y, (\neg R(x,y) \vee (R(x,h(x,y)) \wedge R(h(x,y),y)))$ qui donne deux clauses : $C_3 \stackrel{\text{def}}{=} \neg R(x,y) \vee R(x,h(x,y))$ et $C_4 \stackrel{\text{def}}{=} \neg R(x,y) \vee R(h(x,y),y)$*
   — *La forme de Skolem de D introduit deux constantes a et b et est équivalente à la clause $C_5 \stackrel{\text{def}}{=} R(a,b)$*
5. *On met la formule $\neg\exists x, \exists y, \exists z, R(x,y) \wedge R(y,z) \wedge R(x,z)$ en forme clausale. On a $\neg\exists x, \exists y, \exists z, R(x,y) \wedge R(y,z) \wedge R(x,z) \equiv \forall x\, y\, z, \neg R(x,y) \vee \neg R(y,z) \vee \neg R(x,z)$. On a donc la clause $C_6 \stackrel{\text{def}}{=} \neg R(x,y) \vee \neg R(y,z) \vee \neg R(x,z)$*
   Il faut donc trouver une contradiction à partir des clauses C_2, C_3, C_4, C_5 et C_6.

On commence par dériver la clause $\neg R(x,y) \vee \neg R(y,z)$

$$\dfrac{\dfrac{\neg R(x,y) \vee \neg R(y,z) \vee \neg R(x,z) \qquad R(a,b)}{\neg R(a,y) \vee \neg R(y,b)}\ \text{RES } [x \leftarrow a, z \leftarrow b] \qquad \neg R(x',y') \vee R(h(x',y'),y')}{\neg R(a,h(x',b)) \vee \neg R(x',b)}\ \text{RES } [y' \leftarrow b, y \leftarrow (h(x',b)]$$

$$\dfrac{\dfrac{\neg R(a,h(x',b)) \vee \neg R(x',b) \qquad \neg R(x,y) \vee R(x,h(x,y))}{\neg R(a,b)}\ \text{RES } [x \leftarrow a, y \leftarrow b, x' \leftarrow a] \qquad R(a,b)}{\perp}\ \text{RES}$$

6.

$$()\ A,B,C,D \vdash$$

Exercice 3 *Calcul des prédicats, 3 points*

On se donne une signature avec pour les termes deux constantes a et b, et pour les formules un symbole de prédicat unaire P et un symbole de prédicat binaire R.

On veut transformer une formule close du calcul des prédicats sur la signature précédente en une formule close sans quantificateur qui est équivalente si on se place sur le domaine de Herbrand $\mathcal{D} = \{a,b\}$. On rappelle que pour toute interprétation sur ce domaine, et pour une formule A quelconque on a $(\forall x, A) \Leftrightarrow (A[x \leftarrow a] \wedge A[x \leftarrow b])$ et $(\exists x, A) \Leftrightarrow (A[x \leftarrow a] \vee A[x \leftarrow b])$. La notation $A[x \leftarrow t]$ désigne la formule A dans laquelle on a remplacé les occurences libres de la variable x par le terme t.

1. Appliquer la transformation à la formule $\forall x, \exists y, R(a,y) \wedge R(x,y) \wedge P(y)$ et simplifier la formule obtenue.
2. Définir par des équations récursives une fonction `dom2` qui étant donnée une formule du calcul des prédicats sans variable libre calcule une formule close sans quantificateur, équivalente dans toute interprétation sur un domaine à deux éléments $D = \{a,b\}$ en utilisant la méthode rappelée ci-dessus. On pourra utiliser sans la redéfinir la fonction de substitution $A[x \leftarrow t]$.

   Justifier la terminaison du calcul.

Correction :

1. $\forall x, \exists y, R(a,y) \wedge R(x,y) \wedge P(y)$
$\Leftrightarrow (\exists y, R(a,y) \wedge R(a,y) \wedge P(y)) \wedge (\exists y, R(a,y) \wedge R(b,y) \wedge P(y))$
$\equiv (\exists y, R(a,y) \wedge P(y)) \wedge (\exists y, R(a,y) \wedge R(b,y) \wedge P(y))$
$\Leftrightarrow ((R(a,a) \wedge P(a)) \vee (R(a,b) \wedge P(b))) \wedge ((R(a,a) \wedge R(b,a) \wedge P(a)) \vee (R(a,b) \wedge R(b,b) \wedge P(b)))$
$\equiv (R(a,a) \wedge R(b,a) \wedge P(a)) \vee (R(a,b) \wedge R(b,b) \wedge P(b))$

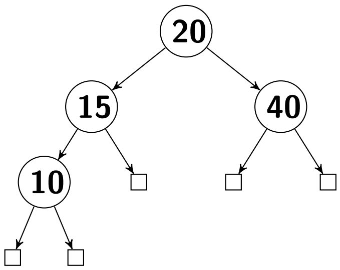
2.

$\texttt{dom2}(p)$	$= p$	*si p est atomique*
$\texttt{dom2}(\neg P)$	$= \neg \texttt{dom2}(P)$	
$\texttt{dom2}(P \circ Q)$	$= \texttt{dom2}(P) \circ \texttt{dom2}(Q)$	$\circ \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$
$\texttt{dom2}(\forall x, P)$	$= \texttt{dom2}(P[x \leftarrow a]) \wedge \texttt{dom2}(P[x \leftarrow b])$	
$\texttt{dom2}(\exists x, P)$	$= \texttt{dom2}(P[x \leftarrow a]) \vee \texttt{dom2}(P[x \leftarrow b])$	

Dans la partie droite des équations, la fonction `dom2` *est appliquée à une formule dont le nombre de connecteurs et de quantificateurs est strictement plus petit que dans le membre droit.*

Exercice 4 *Modélisation (5 points)*

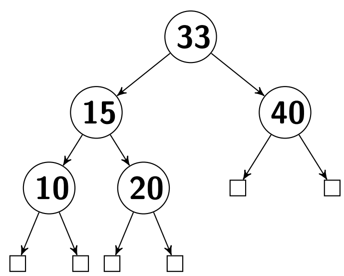
On se donne une signature pour représenter des arbres binaires de recherche avec une constante `nil` qui correspond à une feuille de l'arbre, et un symbole de fonction d'arité 3 : `node`. On introduit également des constantes pour tous les entiers naturels $0, 1, \ldots, 10, \ldots, 15 \ldots$. Dans l'expression $\texttt{node}(l, v, r)$, l représente le sous-arbre gauche, r le sous-arbre droit et v la valeur stockée dans le nœud. On rappelle qu'un arbre binaire de recherche a la propriété que pour chaque nœud interne, les valeurs stockées dans le sous-arbre gauche l sont strictement plus petites que v qui est lui-même strictement plus petit que toutes les valeurs stockées dans le sous-arbre droit r.

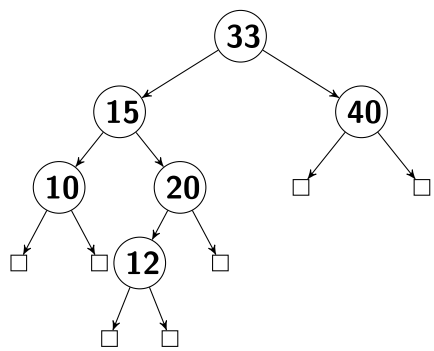


est un arbre binaire de recherche qui correspond au terme
`node(node(node(nil,10,nil),15,nil),20,node(nil,40,nil))`.

Les symboles de prédicats sont $=$, $<$ et $\in$ d'arité 2, ils sont notés de manière infixe. La relation $x = y$ représente l'égalité des objets x et y, $x < y$ représente le fait que x est strictement plus petit que y et la relation $v \in t$ représente le fait que la valeur v apparaît dans un des nœuds de l'arbre t.

1. Dire si les arbres suivants sont bien des arbres binaires de recherche sur les entiers avec l'ordre standard.





   Si c'est un arbre binaire de recherche, ecrire le terme de la logique correspondant. Sinon justifier pourquoi.

2. Ecrire en utilisant les prédicats de la signature une formule logique avec deux variables libres t et n qui exprime le fait que n est la valeur maximum dans l'arbre t.

3. On suppose vérifiées les propriétés suivantes

   (a) $\forall x, \neg(x \in \texttt{nil})$

   (b) $\forall x\, l\, v\, r, (x \in \texttt{node}(l, v, r) \Leftrightarrow x \in l \vee x = v \vee x \in r)$

   (c) $\forall t_1\, t_2, \exists t, \forall x, (x \in t \Leftrightarrow x \in t_1 \wedge x \in t_2)$

   Expliquer chacune de ces propriétés en langage naturel, utiliser une phrase compréhensible (réponse en anglais acceptée).

4. On ajoute à la signature un prédicat unaire `abr`. On veut que $\texttt{abr}(t)$ représente la propriété que t est un arbre binaire de recherche.

En vous inspirant de la question précédente, proposer deux propriétés du prédicat `abr` (l'une dans le cas $t = \texttt{nil}$ et l'autre dans le cas $t = \texttt{node}(l, v, r)$) qui caractérisent le fait que l'arbre t vérifie les propriétés des arbres binaires de recherche.

5. On ajoute à la signature une fonction binaire `union`. Ecrire une propriété qui spécifie que si t et u sont des arbres binaires de recherche alors $\texttt{union}(t, u)$ est un arbre binaire de recherche qui contient *exactement* les éléments de t et les éléments de u.

Rappel des règles logiques

hypothèse	$(\textsc{Hyp})\dfrac{}{A, \Gamma \vdash \Delta, A}$	
	gauche	droite
$\bot$	$\dfrac{}{\bot, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \bot}$
$\top$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\top, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{}{\Gamma \vdash \Delta, \top}$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$
$\wedge$	$\dfrac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}$
$\vee$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \Rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}$
$\forall$	$\dfrac{P[x \leftarrow t], (\forall x, P), \Gamma \vdash \Delta}{(\forall x, P), \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, P \qquad x \notin \mathsf{Vl}(\Gamma, \Delta)}{\Gamma \vdash \Delta, (\forall x, P)}$
$\exists$	$\dfrac{P, \Gamma \vdash \Delta \qquad x \notin \mathsf{Vl}(\Gamma, \Delta)}{(\exists x, P), \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, (\exists x, P), P[x \leftarrow t]}{\Gamma \vdash \Delta, (\exists x, P)}$