Licence Informatique, semestre 5 2016–17
Eléments de logique pour l'informatique (Info 315)
http://www.lri.fr/~paulin/Logique

ANONYMAT :.....................

Examen - 14 décembre 2016

L'examen dure 2 heures. L'énoncé est composé de 3 pages. Toutes les réponses devront être clairement justifiées. Le seul document autorisé est une page A4 manuscripte recto-verso. Le tableau résumant les règles du système G est donné à la fin du sujet.
Inscrivez votre nom sur chaque copie et numérotez-les. Cacheter toutes les copies. Recopier le numéro d'anonymat sur les intercalaires et sur l'énoncé.
Joindre l'énoncé aux copies avec les réponses du QCM.

Exercice 1 *QCM (entre 0 et 5 points)* ($+\frac{1}{3}$ par réponse correcte, $-\frac{1}{3}$ par réponse incorrecte)
Ecrire les réponses sur l'énoncé qui sera rendu avec les copies.
Dire pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse (sans justification).

Affirmation	vrai	faux
$A \Leftrightarrow B = B \Leftrightarrow A$		
$A \Rightarrow B \Rightarrow C = (A \Rightarrow B) \Rightarrow C$		
$A \wedge B \Rightarrow C = (A \wedge B) \Rightarrow C$		
$A \Rightarrow B \Rightarrow C \equiv (A \wedge B) \Rightarrow C$		
$(A \Rightarrow B) \equiv (\neg A \Rightarrow \neg B)$		
$(\exists x, P(x)) \vee (\exists y, Q(y)) \equiv \exists x, (P(x) \vee Q(x))$		
$\neg(\forall x, P(x)) \equiv \exists x, P(x)$		
L'ensemble de formules $\mathcal{E}$ est satisfiable si et seulement si		
pour toute interprétation I, et toute formule $A \in \mathcal{E}$, on a $\texttt{val}(I, A) = V$		
il existe une interprétation I, telle que pour tout $A \in \mathcal{E}$, on a $\texttt{val}(I, A) = V$		
toute formule $A \in \mathcal{E}$ est satisfiable		
$A \models \neg B$ si et seulement si $B \Rightarrow \neg A$ est valide		
Soient p, q, et r des variables propositionnelles		
$p \wedge \neg q$ est une clause		
$\neg p \wedge q \wedge r$ est en forme normale disjonctive		
$\neg p \wedge q \vee r$ est en forme normale conjonctive		
R relation binaire, g fonction binaire, f fonction unaire et a constante		
$R(f(a), a)$ est un terme bien formé		
$R(f(a), a)$ est une formule atomique bien formée		
la variable x est libre dans $(\forall y, R(x, y)) \vee (\exists x, R(a, x))$		
la variable x est liée dans $(\forall y, R(x, y)) \vee (\exists x, R(a, x))$		
$(\forall y, R(x, y))[y \leftarrow f(a)] = \forall y, R(x, f(a))$		
$g(x, x)$ et $g(f(y), f(z))$ sont unifiables		
$g(x, x)$ et $g(y, f(y))$ sont unifiables		
Soit la règle logique $\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}$		
cette règle est correcte		
cette règle est inversible		
Si on peut construire une dérivation de $\perp$ à partir de la forme clausale de la formule A, alors la formule A est insatisfiable.		
Il existe un algorithme qui décide pour un ensemble de clauses du calcul des prédicats s'il est satisfiable ou pas.		

Exercice 2 *Résolution (8 points)*

Soit l'énoncé suivant :

1. Les personnes qui ont la grippe doivent prendre du Tamiflu.
2. Les personnes qui ont de la fièvre et qui toussent ont la grippe.
3. Les personnes qui ont une température supérieure à 38 ont de la fièvre.
4. Pierre tousse et a une température supérieure à 38.
5. Pierre doit prendre du Tamiflu.

On se donne un langage avec trois constantes `38`, `Pierre` et `Tamiflu` ainsi que les prédicats unaires et binaires suivants :

— `grippe`(x) : x a la grippe
— `fièvre`(x) : x a de la fièvre
— `tousse`(x) : x tousse
— `prendre`(x, y) : x doit prendre y
— `temp`(x, t) : x a la température t
— `sup`(x, y) : x est supérieur à y

1. Ecrire les formules du calcul des prédicats qui utilisent le langage ci-dessus pour traduire les cinq formules de l'énoncé.
2. Montrer en utilisant la méthode de résolution que les quatre premières formules de l'énoncé impliquent la cinquième ("Pierre doit prendre du Tamiflu")
3. Faire la même preuve en utilisant le système G.
4. On suppose maintenant qu'on remplace le quatrième énoncé "Pierre tousse et a une température supérieure à 38" par "Pierre tousse et a la température 38".
   — Donner la formule logique correspondant à ce nouveau fait.
   On considère dans la suite l'ensemble A composé des formules 1 à 3 et de la nouvelle formule 4.
   — Proposer un modèle dans lequel les formules de A sont vraies et dans lequel Pierre ne doit pas prendre de Tamiflu.
   — Peut-on encore déduire des formules de A que Pierre doit prendre du Tamiflu ? justifier.
   — Peut-on en déduire des formules de A que Pierre ne doit pas prendre de Tamiflu ? justifier.

Exercice 3 *Modélisation (5 points)*

On cherche à modéliser la notion informatique de file. Une file est une structure dans laquelle on peut entrer des objets et si la file n'est pas vide, on peut sortir le premier objet de la file (celui qui est entré en premier parmi les éléments restants).

On manipule deux catégories de termes, ceux qui représentent des files et ceux qui représentent les objets que l'on met dans la pile. Dans la signature, on suppose que l'on a deux prédicats unaires `file` et `obj` pour représenter les deux classes de termes et on suppose également que l'on a un prédicat binaire pour l'égalité, noté de manière usuelle =. On supposera vérifiées les propriétés de l'égalité (relation d'équivalence préservée par les opérations et les prédicats c'est-à-dire que $x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$ pour un symbole unaire f et de même pour les opérations binaires et pour les prédicats $x = y \Rightarrow P(x) \Rightarrow P(y)$).

On ajoute une constante `vide` pour représenter la file vide ainsi que deux constantes `a` et `b` qui représentent des objets. On introduit aussi trois symboles de fonction `entre`, `sort` et `premier`.

— `entre`(x, f) représente la file f dans laquelle on a fait entrer (en dernier) l'objet x.
— `sort`(f) représente la file f dans laquelle on a fait sortir l'objet qui est entré en premier. Si la file f est vide, alors `sort`(f) est également vide.
— `premier`(f) représente le premier objet entré dans la file f, ce n'est pas défini si la file est vide.

1. La formule $\texttt{file}(\texttt{vide}) \wedge \texttt{obj}(\texttt{a}) \wedge \texttt{obj}(\texttt{b})$ représente le fait que la constante `vide` est une file, et les constantes `a` et `b` sont des objets.

   Pour exprimer que la fonction `sort` prend en argument une file et renvoie une file, on introduit la formule : $\forall f, \texttt{file}(f) \Rightarrow \texttt{file}(\texttt{sort}(f))$.

   De la même manière, donner les formules logiques qui précisent la nature des objets manipulés par les fonctions `entre` et `premier`.

2. Donner des formules qui relient les valeurs de
   (a) $\texttt{premier}(\texttt{entre}(x, f))$ et celle de $\texttt{premier}(f)$
   (b) $\texttt{sort}(\texttt{entre}(x, f))$ et celle de $\texttt{sort}(f)$

   (on sera attentif à distinguer le cas où f est la file vide)

3. Soit le terme $\texttt{premier}(\texttt{sort}(\texttt{entre}(\texttt{a}, \texttt{entre}(\texttt{b}, \texttt{vide}))))$ noté t.
   (a) Le terme t représente-t-il un objet ou une file ? est-il égal à la constante `a` ou `b` ?
   (b) Enoncer et prouver les propriétés précédentes de t en utilisant les formules introduites aux questions 1 et 2. On pourra faire une preuve informelle en identifiant quelle formule est utilisée à chaque étape.

4. On veut maintenant se donner un modèle de cette théorie. Le domaine de l'interprétation est l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$. Les objets sont des entiers de 1 à 99.

   Proposer des interprétations pour chacun des symboles de constante, fonction et de prédicat de façon à vérifier les propriétés énoncées aux questions 1 et 2.

Exercice 4 *Unification (2 points)*

On se donne une signature avec une constante `a` et un symbole de fonction f à trois arguments. Dire si les termes suivants sont unifiables, si oui donner l'unificateur le plus général, sinon expliquer pourquoi.

1. $f(x, x, y) \stackrel{?}{=} f(f(y, y, z), f(y, y, z), \texttt{a})$
2. $f(x, x, y) \stackrel{?}{=} f(f(y, y, z), f(y, x, z), \texttt{a})$

Rappel des règles logiques

hypothèse	(Hyp) $\dfrac{}{A, \Gamma \vdash \Delta, A}$	
	gauche	droite
$\bot$	$\dfrac{}{\bot, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \bot}$
$\top$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\top, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{}{\Gamma \vdash \Delta, \top}$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$
$\wedge$	$\dfrac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}$
$\vee$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \Rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}$
$\forall$	$\dfrac{P[x \leftarrow t], (\forall x, P), \Gamma \vdash \Delta}{(\forall x, P), \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, P \qquad x \notin \mathsf{Vl}(\Gamma, \Delta)}{\Gamma \vdash \Delta, (\forall x, P)}$
$\exists$	$\dfrac{P, \Gamma \vdash \Delta \qquad x \notin \mathsf{Vl}(\Gamma, \Delta)}{(\exists x, P), \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, (\exists x, P), P[x \leftarrow t]}{\Gamma \vdash \Delta, (\exists x, P)}$