Licence Informatique, semestre 5 2017-18
Eléments de logique pour l'informatique (Info 315) 29 mai 2018
`http://www.lri.fr/~paulin/Logique`

Examen - 20 décembre 2017

L'examen dure 2 heures. L'énoncé est composé de 2 pages. Toutes les réponses devront être clairement justifiées. Le seul document autorisé est une page A4 manuscripte recto-verso. Le tableau résumant les règles du système G est donné à la fin du sujet.
Inscrivez votre nom sur chaque copie et numérotez-les. Cacheter toutes les copies. Recopier le numéro d'anonymat sur les intercalaires et sur le QCM.

Exercice 1 *QCM (5 points)*
Le numéro d'anonymat de la copie principale doit être reporté sur l'énoncé du QCM.Utiliser un style bleu ou noir pour cocher les cases. **N'oubliez pas de rendre le QCM avec vos copies.**

Exercice 2 *(5 points)* On considère une logique dont la signature est composée de trois prédicats unaires P, Q et R.

1. Faire une preuve par résolution de la formule
$$(\exists x, P(x)) \lor (\exists x, Q(x)) \Rightarrow (\forall x, Q(x) \Rightarrow R(x)) \Rightarrow (\exists x, P(x) \lor R(x))$$
on prendra soin de bien expliciter les différentes étapes.
2. Pour chacun des séquents suivants, dire si ils sont prouvables dans le système G. Si oui donner l'arbre de preuve, sinon donner une interprétation dans laquelle le séquent est faux.
   (a) $(\exists x, P(x) \Rightarrow Q(x)), (\exists x, Q(x) \Rightarrow R(x)) \vdash \exists x, P(x) \Rightarrow R(x)$
   (b) $(\exists x, P(x) \Rightarrow Q(x)), (\forall x, Q(x) \Rightarrow R(x)) \vdash \exists x, P(x) \Rightarrow R(x)$

Exercice 3 *(5 points)* On considère un langage dans lequel on a une constante `moi`, le prédicat d'égalité et les prédicats suivants :
- `objet`(o) qui représente le fait que o est un objet.
- `appartient`(x, o) qui représente le fait qu'un objet o appartient à un individu x (x est le propriétaire de o).
- `ami`(x, y) qui représente le fait que les individus x et y sont amis.
- `prete`(x, o, y) qui représente le fait que l'individu x prête l'objet o à y.

1. Donner les formules logiques qui correspondent aux phrases suivantes
   (a) Je ne prête qu'à mes amis et que des choses qui m'appartiennent.
   (b) Si un objet a plusieurs propriétaires différents alors ceux-ci sont amis.
   (c) Tout objet a (au moins) un propriétaire.
   (d) J'ai prété tout ce qui m'appartient.
   (e) Un objet n'est prété au plus qu'à une seule personne.
2. Donner les formules logiques puis expliciter en langue naturelle les affirmations correspondant à la **négation** des formules 1d et 1e de la question précédente.
   (a) $\exists o, \texttt{appartient}(\texttt{moi}, o) \land \forall x, \neg \texttt{prete}(\texttt{moi}, o, x)$
   Il existe un objet qui m'appartient et que je n'ai pas prété.
   (b) $\exists x\, y\, z\, t\, o, \texttt{prete}(x, o, y) \land \texttt{prete}(z, o, t) \land y \neq t$
   Il existe un objet qui est prété à deux personnes différentes.
3. On considère un domaine avec 5 éléments A, B, p, q et r dans lequel p, q et r sont des objets.
   (a) Proposer un modèle des cinq formules de la question 1.

(b) Proposer un modèle des trois premières formules de la question 1 et de la négation des formules 1d et 1e.

Exercice 4 *(8 points)* Les questions de ce problème sont largement indépendantes.

On considère une logique dont la signature est composée de deux prédicats unaires P, Q.

La signature donnée est un cas particulier de signature *monadique* c'est-à-dire avec que des symboles de prédicat unaires et pas de symbole de fonction. Cette logique est décidable et on va justifier dans ce cas particulier que l'on peut toujours éliminer les quantificateurs.

Soit A une formule et I une interprétation du langage dont le domaine est $\mathcal{D}$. A tout élément du domaine $d \in \mathcal{D}$, on associe un couple de booléeens qui sont les valeurs de vérité de $P(x)$ et $Q(x)$ dans un environnement dans lequel x a la valeur d, c'est-à-dire le couple $(\mathtt{val}(x \mapsto d, P(x)), \mathtt{val}(x \mapsto d, Q(x)))$. On note $\tau(d)$ ce couple.

1. Dans cette question on considère une interprétation particulière N dont le domaine est l'ensemble des entiers naturels, dans lequel le prédicat P est interprété par la propriété "être un entier pair" et le prédicat Q par la propriété "être une multiple de 3". Quelles sont les valeurs de $\tau(1)$, $\tau(2)$, $\tau(3)$, $\tau(4)$, $\tau(5)$, $\tau(6)$.
2. Combien de valeurs différentes prend $\tau(d)$ dans l'interprétation N de l'exemple précédent ? Combien de valeurs différentes peut prendre $\tau(d)$ dans le cas d'une interprétation I quelconque (donner un maximum et un minimum) ?
3. On introduit une relation binaire $d \simeq d'$ entre les éléments de $\mathcal{D}$ définie par $d \simeq d'$ si et seulement si $\tau(d) = \tau(d')$, c'est-à-dire que les valeurs de vérité des prédicats sont les mêmes pour d et d'. Il est facile de voir que $d \simeq d'$ est une relation d'équivalence qui a un nombre fini de classes d'équivalence.

   On dit que deux environnements ι et ι' sont équivalents si pour toute variable x, on a $\iota(x) \simeq \iota'(x)$. On note également $\iota \simeq \iota'$ cette équivalence entre environnements.

   Montrer que pour toute formule A et pour n'importe quels environnements ι et ι', si $\iota \simeq \iota'$ alors $\mathtt{val}(\iota, A) = \mathtt{val}(\iota', A)$ (on pourra raisonner par récurrence sur la formule A et traiter juste le cas de formules qui ne contiennent que le quantificateur $\forall$, et les connecteurs de négation et de conjonction).
4. On construit à partir de I une nouvelle interprétation I' en choisissant comme domaine un sous-ensemble $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$ formé exactement d'un élément de $\mathcal{D}$ dans chaque classe d'équivalence. C'est-à-dire que
   — $\forall d \in \mathcal{D}, \exists d' \in \mathcal{D}', d \simeq d'$
   — $\forall x\, y \in \mathcal{D}', x \simeq y \Rightarrow x = y$

   (a) Justifier le fait que $\mathcal{D}'$ est un ensemble fini et donner une borne M sur sa taille.

   (b) Construire en suivant cette méthode une interprétation N' pour l'interprétation N de la question 1 (on indiquera le domaine et l'interprétation des deux prédicats sur ces valeurs).

   (c) Montrer que pour tout environnement ι de domaine $\mathcal{D}$, il existe un environnement ι' sur le domaine D' tel que $\iota \simeq \iota'$.

   (d) Montrer dans le cas général que pour n'importe quelle formule A et n'importe quel environnement ι' sur le domaine D' de l'interprétation I', la valeur de A dans l'environnement ι' est la même dans l'interprétation I et dans l'interprétation I', c'est-à-dire $\mathtt{val}_I(\iota', A) = \mathtt{val}_{I'}(\iota', A)$.
5. On introduit M nouvelles constantes $a_1, \ldots, a_M$ dans la signature.

   (a) Expliquer comment on peut transformer toute formule close A en une formule close A_M sans quantificateur telle que A est valide si et seulement si A_M est valide.

   (b) Appliquer votre méthode aux formules $(\forall x, P(x)) \Rightarrow (\exists x, P(x))$ et $(\exists x, P(x)) \Rightarrow (\forall x, P(x))$. Dire si les formules obtenues sont ou non valides.
6. En déduire une méthode pour décider de la validité d'une formule dans le langage.

Rappel des règles logiques du système G

hypothèse	$(\textsc{Hyp})\dfrac{}{A, \Gamma \vdash \Delta, A}$	
	gauche	droite
$\bot$	$\dfrac{}{\bot, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \bot}$
$\top$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\top, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{}{\Gamma \vdash \Delta, \top}$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$
$\wedge$	$\dfrac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}$
$\vee$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \Rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}$
$\forall$	$\dfrac{P[x \leftarrow t], (\forall x, P), \Gamma \vdash \Delta}{(\forall x, P), \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, P}{\Gamma \vdash \Delta, (\forall x, P)}\ x \notin \mathsf{VI}(\Gamma, \Delta)$
$\exists$	$\dfrac{P, \Gamma \vdash \Delta}{(\exists x, P), \Gamma \vdash \Delta}\ x \notin \mathsf{VI}(\Gamma, \Delta)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, (\exists x, P), P[x \leftarrow t]}{\Gamma \vdash \Delta, (\exists x, P)}$