Licence Informatique, semestre 5 — 2018–19
Eléments de logique pour l'informatique (Info 315) — 21 juin 2019
`http://www.lri.fr/~paulin/Logique`

Examen - 19 décembre 2018

L'examen dure 2 heures. L'énoncé est composé de 4 pages. Toutes les réponses devront être clairement justifiées. Le seul document autorisé est une page A4 manuscripte recto-verso. Le tableau résumant les règles du système G est donné à la fin du sujet.
Inscrivez votre nom sur chaque copie et numérotez-les. Cacheter toutes les copies. Recopier le numéro d'anonymat sur les intercalaires et sur le QCM.

Exercice 1 *QCM (9 points)*
Le **numéro d'anonymat** de la copie principale (pas le numéro d'étudiant) doit être reporté sur l'énoncé du QCM. Utiliser un style bleu ou noir pour cocher les cases. **N'oubliez pas de rendre le QCM avec vos copies.**

Exercice 2 *Modélisation (5 points).*
On se place dans un langage du premier ordre avec un symbole de prédicat binaire pour l'égalité.
On s'intéresse à un système de transport. Pour cela on se donne une relation à trois arguments $\texttt{ligne}(n, d, a)$ qui représente le fait qu'il existe une ligne directe identifiée par le numéro n qui permet d'aller de la ville de code d (appelée départ) à la ville de code a (appelée arrivée). On se donne également un prédicat unaire `ville` tel que $\texttt{ville}(x)$ est vrai si x est le code d'une ville.

1. Formaliser les énoncés suivants :
   (a) Tout numéro de ligne est associé à au plus une ville de départ et une ville d'arrivée.
   (b) Deux villes peuvent toujours être reliées avec au plus un changement (c'est-à-dire que soit on a une ligne directe entre les deux villes, soit il faut faire un changement par une autre ville).
   (c) Toute ville est desservie, c'est-à-dire qu'il existe une ligne qui part de cette ville et une ligne qui y arrive.

   Correction :
   (a) $\forall n\, x\, y\, z\, t.\texttt{ligne}(n, x, y) \land \texttt{ligne}(n, z, t) \Rightarrow (x = z \land y = t)$
   (b) $\forall n\, x\, y.\texttt{ville}(x) \land \texttt{ville}(y) \Rightarrow \exists n, (\texttt{ligne}(n, x, y) \lor \exists z, \texttt{ligne}(n, x, z) \land \exists m, \texttt{ligne}(m, z, y))$
   (c) $\forall x.\texttt{ville}(x) \Rightarrow ((\exists n\, y, \texttt{ligne}(n, x, y)) \land (\exists n\, y, \texttt{ligne}(n, y, x)))$

2. Soit les deux formules :
   — $\forall n\, x\, y, (\texttt{ligne}(n, x, y) \Rightarrow \exists m, \texttt{ligne}(m, y, x))$
   — $\forall n\, x, \neg\texttt{ligne}(n, x, x)$
   Questions :
   (a) Expliquer par des phrases le sens de chacune de ces formules.
   Correction :
   — *Pour toute ligne entre deux villes, il existe une ligne qui fait le chemin de retour.*
   — *Il n'existe pas de ligne qui revient à la ville de départ.*
   (b) Donner des formules en forme normale de négation correspondant à la **négation** des formules précédentes.
   Correction :
   — $\exists n\, x\, y, (\texttt{ligne}(n, x, y) \land \forall m, \neg\texttt{ligne}(m, y, x))$
   — $\exists n\, x, \texttt{ligne}(n, x, x)$

3. On se donne des constantes A, B, C et D qui représentent des villes différentes et n_1, n_2,... n_6 qui représentent des numéros de ligne. On définit deux interprétations (a) et (b). Le domaine de l'interprétation (a) est $\{A, B, C, D, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}$ et le domaine de l'interprétation (b) est $\{A, B, n_1, n_2\}$. Les tables suivantes définissent les interprétations (a) et (b). Chaque ligne du tableau représente un triplet (n, d, a) tel que $\texttt{ligne}(n, d, a)$ est vérifié.

n_1	A	B
n_2	B	C
n_3	C	D
n_4	D	C
n_5	B	A
n_6	C	B

Interprétation (a)

n_1	A	A
n_2	B	B

Interprétation (b)

Dire si les formules des énoncés des questions 1 et 2 sont vérifiées dans les interprétations (a) et (b) précédentes (justifiez vos réponses).

Correction :

Question	*int. (a)*	*justification*	*int. (b)*	*justification*
1-a	*V*	*chaque numéro de ligne correspond à une seule ville de départ et d'arrivée*	*V*	*chaque numéro de ligne correspond à une seule ville de départ et d'arrivée*
1-b	*F*	*pas de trajet de A à D avec moins de deux changements*	*F*	*pas de trajet de A à B*
1-c	*V*	*on vérifie que pour chaque ville A, B, C, D il y a bien une ligne qui y arrive et une ligne qui en part.*	*V*	*la ligne n_1 part et arrive de A et la ligne n_2 part et arrive de B donc chaque ville est bien desservie au départ et à l'arrivée*
2-a	*V*	*on vérifie que pour chaque ligne, on a une ligne de retour n_1&n_5, n_2&n_6, n_3&n_4*	*V*	*chaque ligne a une ligne de retour qui est elle-même*
2-b	*V*	*la ville de départ de chaque ligne est différente de la ville d'arrivée*	*F*	*la ligne n_1 a même ville de départ et d'arrivée*

Exercice 3 *Preuves (6 points)*

On considère une logique dont la signature est composée d'une constante e et d'un symbole de prédicat F ternaire (à trois arguments).

On introduit un ensemble de trois formules logiques A, B et C (nommé Γ dans la suite) :

— $A \stackrel{\text{def}}{=} \forall x, F(x, e, x)$

— $B \stackrel{\text{def}}{=} \forall x, \exists y, F(x, y, e) \wedge F(y, x, e)$

— $C \stackrel{\text{def}}{=} \forall x\, y\, z\, t\, u, F(x, y, t) \wedge F(y, z, u) \Rightarrow \forall v, (F(t, z, v) \Leftrightarrow F(x, u, v))$

Questions :

1. Combien d'interprétations différentes y-a-t-il sur un domaine avec un seul élément e ? Pour chacune de ces interprétations, dire si chacune des propriétés A, B et C est vraie ou fausse dans l'interprétation. Est-ce que l'ensemble Γ est satisfiable ?

   Correction : *Il y a une seule formule atomique close $F(e, e, e)$ qui peut être vraie ou fausse donc deux interprétations possibles.*

   Il suffit de fixer la valeur de $F(e, e, e)$ à vrai pour satisfaire la propriété A. Les deux autres propriétés sont alors automatiquement vérifiées dans cette interprétation.

   Puisqu'il y a une interprétation qui rend vraies toutes les formules de Γ, on en déduit que Γ est satisfiable.

2. Combien d'interprétations différentes y-a-t-il sur un domaine avec deux éléments e et a ?

   Correction : *S'il y a 2 éléments dans le domaine e et a alors il y a 8 formules atomiques closes $F(e,e,e)$, $F(a,e,e)$, $F(e,a,e)$, $F(e,e,a)$, $F(a,a,e)$, $F(a,e,a)$, $F(e,a,a)$, $F(a,a,a)$. Chacune de ces formules peut prendre la valeur vraie ou fausse donc au total 2^8 interprétations différentes.*

   Donner un modèle de l'ensemble des formules Γ sur ce domaine qui ne soit pas l'interprétation dans laquelle F est toujours vraie.

   Correction : *$F(e,e,e)$ et $F(a,e,a)$ sont vraies à cause de la propriété A. Pour vérifier la propriété B on peut choisir $F(a,a,e)$ vrai. Avec $F(a,a,e)$ et $F(a,a,e)$ la propriété C nous donne $\forall v, F(e,a,v) \Leftrightarrow F(a,e,v)$. Comme $F(a,e,a)$ est vrai, on en déduit $F(e,a,a)$ vrai.*

3. Soit Γ et Δ deux ensembles de formules et A et B deux formules. Montrer que la règle suivante (notée *mp*) est correcte. Est-elle inversible ?

$$\frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B, A \vdash \Delta}$$

   Correction : *On peut faire une table de vérité des deux séquents. On rappelle qu'un séquent $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_p$ est faux si et seulement si toutes les formules A_i sont vraies et toutes les formules B_j sont fausses.*

Γ	Δ	A	B	$\Gamma, B \vdash \Delta$	$\Gamma, A \Rightarrow B, A \vdash \Delta$
F	_	_	_	V	V
V	V	_	_	V	V
V	F	V	V	F	F
V	F	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V
V	F	F	F	V	V

   Dans toutes les interprétations dans lesquelles $\Gamma, B \vdash \Delta$ est vrai alors on a que $\Gamma, A \Rightarrow B, A \vdash \Delta$ est vraie donc la règle est correcte. Par contre la règle n'est pas inversible car si Γ et B sont vrais et que A et Delta sont faux alors $\Gamma, A \Rightarrow B, A \vdash \Delta$ est vrai mais $\Gamma, B \vdash \Delta$ est faux.

4. (Bonus) Soit D la formule $\forall x\, y, F(x,y,e) \wedge F(y,x,e) \Rightarrow F(e,x,x)$. Donner une dérivation dans le système G de $A, C \vdash D$
   (les règles du système G, dont celles pour le connecteur $\Leftrightarrow$ sont données à la fin du sujet et on pourra utiliser la règle *mp* introduite à la question précédente).
   Correction : *On note G la formule $\forall v, (F(x,e,v) \Leftrightarrow F(e,x,v))$*

$$
\begin{array}{rc}
(\textsc{hyp}) & \overline{A, C, G, F(e,x,x), (F(e,x,x) \Rightarrow F(x,e,x)) \vdash F(e,x,x)} \\
(mp) & \overline{A, C, G, F(x,e,x), (F(x,e,x) \Rightarrow F(e,x,x)), (F(e,x,x) \Rightarrow F(x,e,x)) \vdash F(e,x,x)} \\
(\forall g | A) & \overline{A, C, G, (F(x,e,x) \Rightarrow F(e,x,x)), (F(e,x,x) \Rightarrow F(x,e,x)) \vdash F(e,x,x)} \\
(\Leftrightarrow g) & \overline{A, C, G, (F(x,e,x) \Leftrightarrow F(e,x,x)) \vdash F(e,x,x)} \\
(\forall g) & \overline{A, C, (\forall v, (F(x,e,v) \Leftrightarrow F(e,x,v))) \vdash F(e,x,x)} \\
(mp) & \overline{A, C, (F(x,y,e) \wedge F(y,x,e) \Rightarrow \forall v, (F(x,e,v) \Leftrightarrow F(e,x,v))), F(x,y,e) \wedge F(y,x,e) \vdash F(e,x,x)} \\
(\forall g \times 4 | C) & \overline{A, C, F(x,y,e) \wedge F(y,x,e) \vdash F(e,x,x)} \\
(\Rightarrow d) & \overline{A, C \vdash F(x,y,e) \wedge F(y,x,e) \Rightarrow F(e,x,x)} \\
(\forall d \times 2) & \overline{A, C \vdash \forall x\, y, F(x,y,e) \wedge F(y,x,e) \Rightarrow F(e,x,x)}
\end{array}
$$

5. Mettre les formules B et D en forme clausale.

   Correction : *La skolemisation de B introduit un symble f unaire. La forme clausale de B est formée de 2 clauses $F(x, f(x), e)$ et $F(f(x), x, e)$ notées C_1 et C_2.*
   La forme clausale de D est formée d'une seule clause $\neg F(x,y,e) \vee \neg F(y,x,e) \vee F(e,x,x)$ notée C_3.

6. Montrer **en utilisant la résolution** que la formule $\forall x, F(e, x, x)$ est conséquence logique des formules B et D.

   Correction : *On a* $\neg(\forall x, F(e, x, x)) \equiv \exists x, \neg F(e, x, x)$ *La skolemisation introduit une constante* a *et la clause* $\neg F(e, a, a)$ *notée* C_4.

   On fait la résolution de C_4 *et* C_3*, on obtient la clause* $\neg F(a, y, e) \vee \neg F(y, a, e)$*. On fait ensuite la résolution avec* C_1 *on obtient la clause* $\neg F(f(a), a, e)$ *et la résolution avec* C_2 *nous donne la clause vide.*

7. Peut-on en déduire que $\forall x, F(e, x, x)$ est conséquence logique des formules A, B et C ? Justifiez votre réponse.

   Correction : *Oui car comme* $A, C \vdash D$ *on a* $A, B, C \models D$ *et* $B, D \models \forall x, F(e, x, x)$*. Donc si on a une interprétation qui rend vraie* A, B *et* C*, elle rend vraie* D *et donc elle rend vraie* $\forall x, F(e, x, x)$.

Rappel des règles logiques du système G

hypothèse	$(\textsc{Hyp})\dfrac{}{A, \Gamma \vdash \Delta, A}$	
	gauche	droite
$\bot$	$\dfrac{}{\bot, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \bot}$
$\top$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\top, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{}{\Gamma \vdash \Delta, \top}$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$
$\wedge$	$\dfrac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}$
$\vee$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \Rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}$
$\Leftrightarrow$	$\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow B, B \Rightarrow A \vdash \Delta}{A \Leftrightarrow B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta, B \qquad A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Leftrightarrow B}$
$\forall$	$\dfrac{P[x \leftarrow t], (\forall x, P), \Gamma \vdash \Delta}{(\forall x, P), \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, P}{\Gamma \vdash \Delta, (\forall x, P)}\ x \notin \mathsf{Vl}(\Gamma, \Delta)$
$\exists$	$\dfrac{P, \Gamma \vdash \Delta}{(\exists x, P), \Gamma \vdash \Delta}\ x \notin \mathsf{Vl}(\Gamma, \Delta)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, (\exists x, P), P[x \leftarrow t]}{\Gamma \vdash \Delta, (\exists x, P)}$