Licence Informatique, semestre 5 — 2020-21
Eléments de logique pour l'informatique (Info 315) — 21 mai 2021

Examen - 16 décembre 2020

L'examen dure 2 heures. L'énoncé est composé de 4 pages, le barème est indicatif.
Toutes les réponses (sauf QCM) devront être clairement justifiées.
Le seul document autorisé est une page A4 manuscripte recto-verso.
Ne pas cacheter les copies !
Correction :

Exercice 1 *QCM (6 points)*

Le nom et le numéro d'étudiant doivent être reportés sur l'énoncé du QCM que vous rendrez avec votre copie (utiliser un stylo bleu ou noir pour cocher les cases, pas de crayon-papier).

Sauf indication contraire, une bonne réponse rapporte $\frac{1}{4}$, une mauvaise réponse retire $\frac{1}{8}$ point, l'absence de réponse vaut 0 point.
Correction : *Voir correction individuelle des QCM.*

Exercice 2 *Manipulation de formules (6 points)*

On dit qu'une formule est *minimale* si elle n'utilise que les connecteurs logiques $\Rightarrow$, $\bot$ et le quantificateur universel $\forall$. On rappelle que la formule $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ correspond à $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$. Soient p, q deux variables propositionnelles.

1. Donner les tables de vérité des formules $(p \Rightarrow q \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot$ et $(p \Rightarrow \bot) \Rightarrow (q \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot$
   Correction : *Le bon parenthésage est* $(p \Rightarrow (q \Rightarrow \bot)) \Rightarrow \bot$ *et* $(p \Rightarrow \bot) \Rightarrow ((q \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot)$

p	q	$(p \Rightarrow (q \Rightarrow \bot)) \Rightarrow \bot$	$(p \Rightarrow \bot) \Rightarrow ((q \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot)$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

2. Mettre les formules $(p \Rightarrow q \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot$ et $(p \Rightarrow \bot) \Rightarrow (q \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot$ en forme normale conjonctive.
   Correction :
   $(p \Rightarrow q \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot \equiv p \wedge q$ *et* $(p \Rightarrow \bot) \Rightarrow (q \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot \equiv p \vee q$.
3. Construire une fonction `estmin` qui prend en argument une formule quelconque de la logique du premier ordre et qui vérifie qu'elle est bien minimale.
   Correction :

$$
\begin{array}{rcll}
\mathtt{estmin}(\top) & = & \mathit{faux} & \\
\mathtt{estmin}(\bot) & = & \mathit{vrai} & \\
\mathtt{estmin}(R(t_1,\dots,t_n)) & = & \mathit{vrai} & R \text{ symbole de prédicat} \\
\mathtt{estmin}(\neg A) & = & \mathit{faux} & \\
\mathtt{estmin}(A \Rightarrow B) & = & \mathtt{estmin}(A) \text{ et } \mathtt{estmin}(B) & \\
\mathtt{estmin}(A \vee B) & = & \mathit{faux} & \\
\mathtt{estmin}(A \wedge B) & = & \mathit{faux} & \\
\mathtt{estmin}(\forall x, A) & = & \mathtt{estmin}(A) & \\
\mathtt{estmin}(\exists x, A) & = & \mathit{faux} &
\end{array}
$$

4. Soit P une formule minimale, donner une forme simplifiée des formules $(P \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot$ et $\bot \Rightarrow P$ qui soit aussi minimale. Justifier votre réponse.
   Correction : $(P \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot \equiv P$ *et* $\bot \Rightarrow P \equiv \top \equiv \bot \Rightarrow \bot$
5. On introduit un symbole de prédicat unaire $\texttt{R}$. Donner une formule minimale équivalente à la formule : $\neg(\exists x, \texttt{R}(x)) \vee \forall x, \texttt{R}(x)$
   Correction : $\neg(\exists x, R(x)) \vee \forall x, R(x) \equiv \forall xy, R(x) \Rightarrow R(y)$ *(attention à bien distinguer les deux variables liées x en leur donnant un nom différent)*
6. Construire une fonction `transmin` qui prend en argument une formule quelconque de la logique du premier ordre et qui la transforme en une formule minimale équivalente.
   Correction :

$$\begin{array}{rcll}
\mathit{transmin}(\top) & = & \bot \Rightarrow \bot & \\
\mathit{transmin}(\bot) & = & \bot & \\
\mathit{transmin}(R(t_1,\ldots,t_n)) & = & R(t_1,\ldots,t_n) & R \text{ symbole de prédicat} \\
\mathit{transmin}(\neg A) & = & \mathit{transmin}(A) \Rightarrow \bot & \\
\mathit{transmin}(A \Rightarrow B) & = & \mathit{transmin}(A) \Rightarrow \mathit{transmin}(B) & \\
\mathit{transmin}(A \vee B) & = & (\mathit{transmin}(A) \Rightarrow \bot) \Rightarrow \mathit{transmin}(B) & \\
\mathit{transmin}(A \wedge B) & = & (\mathit{transmin}(A) \Rightarrow \mathit{transmin}(B) \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot & \\
\mathit{transmin}(\forall x, A) & = & \forall x, \mathit{transmin}(A) & \\
\mathit{transmin}(\exists x, A) & = & (\forall x, (\mathit{transmin}(A) \Rightarrow \bot)) \Rightarrow \bot &
\end{array}$$

Exercice 3 *Modélisation et résolution (8 points)*

On modélise un monde dans lequel vivent des dragons [1]. On utilisera les symboles de prédicats suivants :

— $\texttt{B}(x)$: le dragon x est bleu
— $\texttt{H}(x)$: le dragon x est heureux
— $\texttt{V}(x)$: le dragon x vole
— $\texttt{P}(x, y)$: le dragon x est parent du dragon y (ou encore le dragon y est un enfant du dragon x)
— $x = y$: les dragons x et y sont égaux

Les questions sont indépendantes.

1. Donner les formules logiques correspondant aux phrases suivantes :
   (a) Tout dragon a exactement deux parents
   (b) Un dragon dont tous les enfants peuvent voler est heureux
   (c) Tout dragon qui a au moins un parent bleu est lui-même bleu
   (d) Il n'y a pas de dragon heureux qui ne vole pas

   Correction :
   (a) $\forall x, \exists y\, z, (P(y, x) \wedge P(z, x) \wedge y \neq z) \wedge \forall t, P(t, x) \Rightarrow t = y \vee t = z$
   (b) $\forall x, (\forall y, P(x, y) \Rightarrow V(y)) \Rightarrow H(x)$

1. D'après le cours "Logique et Principe de Résolution" de Dominique Pastre, Université de Paris

(c) $\forall x, (\exists y, P(y,x) \wedge B(y)) \Rightarrow B(x) \equiv \forall x\, y, (P(y,x) \wedge B(y)) \Rightarrow B(x)$

(d) $\neg\exists x, (H(x) \wedge \neg V(x)) \equiv \forall x, H(x) \Rightarrow V(x)$

2. Traduire en français (ou anglais) les formules logiques suivantes :
   (a) $\forall x\, y\, z, \mathtt{V}(x) \Rightarrow \mathtt{P}(x,y) \Rightarrow \mathtt{P}(x,z) \Rightarrow y = z$
   (b) $\forall x, \exists y, \mathtt{P}(x,y) \wedge \mathtt{H}(y)$
   (c) $\exists y, \forall x, \mathtt{P}(x,y) \wedge \mathtt{H}(y)$

   Correction :

   (a) Les dragons qui volent et qui sont parents ont au plus un enfant

   (b) Tous les dragons ont un enfant qui est heureux

   (c) Il existe un dragon qui est heureux et qui est l'enfant de tous les dragons.

3. Soient les formules :
   — $A \stackrel{\text{def}}{=} \forall x, (\forall y, \mathtt{P}(x,y) \Rightarrow \mathtt{V}(y)) \Rightarrow \mathtt{H}(x)$
   — $B \stackrel{\text{def}}{=} \forall x, \mathtt{B}(x) \Rightarrow \mathtt{V}(x)$
   — $C \stackrel{\text{def}}{=} \forall x, (\exists y, \mathtt{B}(y) \wedge \mathtt{P}(y,x)) \Rightarrow \mathtt{B}(x)$
   — $D \stackrel{\text{def}}{=} \forall x, \mathtt{B}(x) \Rightarrow \mathtt{H}(x)$

   En utilisant la résolution, montrer que $A, B, C \models D$. On détaillera les étapes de mise en forme clausale et de déduction.

   Correction :

   i. Mise en forme normale de négation de $A, B, C, \neg D$
   — $A \equiv \forall x, (\exists y, P(x,y) \wedge \neg V(y)) \vee H(x)$
   — $B \equiv \forall x, \neg B(x) \vee V(x)$
   — $C \equiv \forall x, (\forall y, \neg B(y) \vee \neg P(y,x)) \vee B(x)$
   — $\neg D \equiv \exists x, B(x) \wedge \neg H(x)$

   ii. Skolemisation
   — *A : on introduit un nouveau symbole de fonction unaire f et on remplace y par $f(x)$*
   $\forall x, (P(x, f(x)) \wedge \neg V(f(x))) \vee H(x)$
   — *$\neg D$: on introduit une constante a et on remplace x par a*
   $B(a) \wedge \neg H(a)$

   iii. Mise en forme prénexe puis FNC
   — A : $\forall x, (P(x, f(x)) \vee H(x)) \wedge (\neg V(f(x)) \vee H(x))$
   — B : $\forall x, \neg B(x) \vee V(x)$
   — C : $\forall x, \forall y, (\neg B(y) \vee \neg P(y,x) \vee B(x))$
   — $\neg D$: $B(a) \wedge \neg H(a)$

   iv. Extraction des clauses
   (a) $P(x, f(x)) \vee H(x)$
   (b) $\neg V(f(x)) \vee H(x)$
   (c) $\neg B(x) \vee V(x)$
   (d) $\neg B(y) \vee \neg P(y,x) \vee B(x)$
   (e) $B(a)$
   (f) $\neg H(a)$

   v. Déduction par résolution

- *(a) et (f) se combinent avec la substitution* $\{x \leftarrow a\}$ *et donnent la clause (g) :* $P(a, f(a))$
- *(d) et (g) se combinent avec la substitution* $\{x \leftarrow f(a); y \leftarrow a\}$ *et donnent la clause (h) :* $\neg B(a) \vee B(f(a))$
- *(e) et (h) se combinent avec la substitution* $\{x \leftarrow a\}$ *et donnent la clause (i) :* $B(f(a))$
- *(i) et (c) se combinent avec la substitution* $\{x \leftarrow f(a)\}$ *et donnent la clause (j) :* $V(f(a))$
- *(j) et (b) se combinent avec la substitution* $\{x \leftarrow a\}$ *et donnent la clause (k) :* $H(a)$
- *(k) et (f) se combinent avec la substitution* $\{x \leftarrow a\}$ *et donnent la clause vide*

vi. On a montré que l'ensemble des clauses associées aux formules $A, B, C, \neg D$ *conduit à une contradiction. Cet ensemble est insatisfable et donc* $A, B, C \models D$

4. Donner une interprétation des prédicats B, H et V sur un domaine qui contient 3 dragons (Puff, Draco et Saphira), avec exactement deux dragons bleus, dans lequel le dragon Puff est heureux et qui vérifie simultanément les formules suivantes :

   (a) $\forall x, B(x) \vee H(x)$

   (b) $\exists x, B(x) \wedge H(x)$

   (c) $\forall x, V(x) \Rightarrow \neg H(x)$

   (d) $\exists x, V(x)$

   Correction :

   Le tableau suivant donne une interprétation des trois symboles

	B	*H*	*V*
Puff	*V*	*V*	*F*
Draco	*F*	*V*	*F*
Saphira	*V*	*F*	*V*

   Il y a bien 2 dragons bleus et Puff est heureux.

   Les 4 formules sont vérifiées :

   (a) les trois dragons sont soit bleus (Puff et Saphira) soit heureux (Draco)

   (b) il existe un dragon (Puff) qui est bleu et heureux

   (c) tous les dragons qui volent (seulement Saphira) ne sont pas heureux.

   (d) il existe un dragon qui vole (Saphira)