Licence Informatique, semestre 5 — 2012–13

Eléments de logique pour l'informatique (Info 315) — 9 septembre 2013

`http://www.lri.fr/~paulin/Logique`

Examen - 7 juin 2013

L'examen dure 3 heures. L'énoncé est composé de 4 pages, le barème est indicatif. Toutes les réponses devront être clairement justifiées. Le seul document autorisé est une page A4 manuscripte recto-verso. Le tableau résumant les règles du système G est donné à la fin du sujet. Inscrivez votre nom sur chaque copie et numérotez-la. **Cachetez toutes les copies !**

Exercice 1 *Logique propositionnelle (5 points).*

Soit les deux séquents

S_1 **:** $(\neg q) \Rightarrow r \vdash \neg(q \Rightarrow p), r \wedge \neg p, p$

S_2 **:** $r \Rightarrow p, \neg q, q \Rightarrow r \vdash.$

1. Donner les formules logiques associées à ces séquents.
2. Construire les tables de vérité des deux formules précédentes.
3. Peut-on construire des preuves complètes dans le système G des séquents donnés ? si oui construire la preuve, sinon expliquer pourquoi.

Exercice 2 *Modélisation (5 points).*

On se place dans un langage du premier ordre qui contient un symbole de prédicat binaire pour l'égalité.

On s'intéresse à un système de transport. Pour cela on se donne une relation à trois arguments $\texttt{ligne}(n, d, a)$ qui représente le fait qu'il existe une ligne directe identifiée par le numéro n qui permet d'aller de la ville de code d (appelée départ) à la ville de code a (appelée arrivée). On se donne également un prédicat unaire `ville` tel que $\texttt{ville}(x)$ est vrai si x est le code d'une ville.

1. Formaliser les énoncés suivants :
   (a) Tout numéro de ligne est associé à au plus une ville de départ et une ville d'arrivée.
   (b) Deux villes peuvent toujours être reliées avec au plus un changement (c'est-à-dire que soit on a une ligne directe entre les deux villes, soit il faut emprunter deux lignes en passant par une autre ville).
   (c) Toute ville est desservie, c'est-à-dire qu'il existe une ligne qui part de cette ville et une ligne qui y arrive.
2. Dans les tables suivantes, chaque ligne représente un triplet (n, d, a) tel que $\texttt{ligne}(n, d, a)$ est vérifié et A, B, C et D sont des constantes qui représentent des villes différentes et n_1, n_2,… n_6 des constantes différentes qui représentent des numéros de ligne :

n_1	A	B
n_2	B	C
n_3	C	D
n_4	D	C
n_5	B	A
n_6	C	B

Modèle (a)

n_1	A	A
n_2	B	B

Modèle (b)

Expliquer par des phrases le sens de chacune des formules suivantes et dire si elles sont vérifiées dans les modèles (a) et (b) précédents (justifier vos réponses).

(a) $\forall nxy, (\texttt{ligne}(n,x,y) \Rightarrow \exists m, \texttt{ligne}(m,y,x))$

(b) $\forall nx, \neg\texttt{ligne}(n,x,x)$

Exercice 3 *Résolution (5 points).*
On se place dans un langage avec deux symboles de prédicat binaire P et A. Soient les trois formules de la logique du premier ordre suivantes :

- F_1 : $\forall x, \exists y, P(x,y)$
- F_2 : $\forall x\, y\, z, ((P(x,y) \wedge P(y,z)) \Rightarrow A(x,z))$
- F_3 : $\forall x, \exists y, A(x,y)$

1. Proposer un modèle dans lequel les trois formules sont vraies.
2. Mettre en forme clausale les formules F_1 et F_2 et $\neg F_3$. On prendra soin d'expliciter les symboles de skolem introduits.
3. Montrez **en utilisant la méthode de résolution** que la formule F_3 est conséquence logique des formules F_1 et F_2.

Exercice 4 *Syntaxe du calcul des prédicats (5 points).*
On se donne une signature avec deux constantes a et b, un symbole de fonction unaire f et deux symboles de prédicats P d'arité 1 et Q d'arité 2.

On considère des formules du calcul des prédicats sur la signature donnée qui utilisent les connecteurs $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, les constantes propositionnelles $\perp$ et $\top$ et les quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

On dira qu'une formule est **en forme normale universelle** si elle ne contient ni le quantificateur existentiel ni le connecteur d'implication, si les négations ne portent que sur des formules atomiques et si toutes les variables quantifiées universellement sont différentes entre elles et différentes des variables libres.

1. Donner la forme arborescente des formules suivantes en indiquant pour chaque variable si elle est libre ou liée et dire si elles sont en forme normale universelle.
   (a) $\forall x, (\neg Q(x,y) \Rightarrow \exists y, P(f(y)))$
   (b) $(\forall x, P(x)) \vee (\forall y, Q(y, f(y)))$
   (c) $(\forall x, Q(x,y)) \wedge (\forall x, Q(a, f(x)))$
2. Donner une formule en forme normale universelle équivalente à la formule suivante :
$$(\exists x, P(x)) \Rightarrow \forall xy, \neg(Q(x,y) \Rightarrow \neg P(y))$$
3. Toute formule est-elle équivalente à une formule en forme normale universelle ?

4. Spécifier par des équations récursives une fonction `fnub` qui étant donnés une formule F (qu'on supposera sans variable libre) renvoie soit la constante `null` si F n'est pas en forme normale universelle soit un ensemble de variables l si F est en forme normale universelle et l est l'ensemble des variables liées de F.

Rappel des règles logiques du système G

hypothèse	$(\textsc{Hyp})\dfrac{}{A, \Gamma \vdash \Delta, A}$	
	gauche	droite
$\bot$	$(\textsc{Jok})\dfrac{}{\bot, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \bot}$
$\top$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\top, \Gamma \vdash \Delta}$	$(\textsc{Triv})\dfrac{}{\Gamma \vdash \Delta, \top}$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$
$\wedge$	$\dfrac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}$
$\vee$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \Rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}$