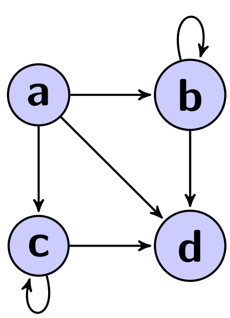
Examen - 3 juin 2015

L'examen dure 2 heures. L'énoncé est composé de 3 pages, le barème est indicatif. Toutes les réponses devront être clairement justifiées. Le seul document autorisé est une page A4 manuscripte recto-verso. Le tableau résumant les règles du système G est donné à la fin du sujet.
Inscrivez votre nom et le numéro d'anonymat sur chaque copie et numérotez-la.
Cachetez toutes les copies !

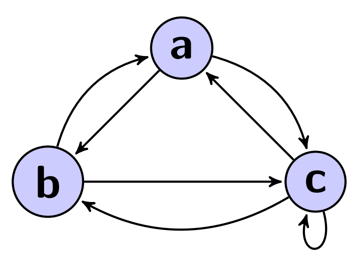
Exercice 1 *Modèles et Résolution, 5 points.*
On se place dans un langage avec un symbole de prédicat binaire R. Soient les quatre formules de la logique du premier ordre suivantes :

— F_1 : $\forall x, ((\exists y, \neg R(x,y)) \Rightarrow \exists y, (R(x,y) \land R(y,x)))$
— F_2 : $\forall x, \exists y, (R(x,y) \lor R(y,x))$
— F_3 : $\forall x\, y\, z, ((R(x,y) \land R(y,z)) \Rightarrow R(x,z))$
— F_4 : $\exists x, R(x,x)$

1. On se donne des interprétations de la relation R sous forme de graphes. Le domaine est l'ensemble des sommets du graphe et on a une arête du sommet x au sommet y exactement lorsque la relation $R(x,y)$ est vérifiée dans l'interprétation. Dans chacune des deux interprétations suivantes :
   (a) donner la liste des couples (x,y) tels que $R(x,y)$ est vraie dans l'interprétation ;
   (b) dire lesquelles des formules F_1, F_2, F_3, F_4 précédentes sont vraies et lesquelles sont fausses. Justifier votre réponse.



modèle (A)



modèle (B)

2. Montrez **en utilisant la méthode de résolution** que
   (a) la formule F_2 est conséquence logique de la formule F_1 ;
   (b) la formule F_4 est conséquence des deux formules F_1 et F_3.

   Vous prendrez soin d'expliquer et de détailler toutes les étapes de votre démonstration (c'est-à-dire la mise en forme clausale et les étapes de la réfutation).
3. A l'aide d'une variante du modèle A, montrer que F_4 n'est pas conséquence logique de F_2 et F_3.

Exercice 2 *Enigme, 4 points.*

Dans un hôpital psychiatrique les docteurs disent toujours la vérité, les patients qui sont malades mentent toujours et les infirmiers tantôt mentent, tantôt disent la vérité. Toutes ces personnes sont bien sûr indiscernables. On rencontre deux personnes, A et B.

— A dit : "Je suis un infirmier." (P_1)

— B déclare : "Nous sommes deux malades." (P_2)

— A dit : "Si je suis un malade, alors B est un infirmier." (P_3)

— B ajoute : "Si je suis un malade, alors A est un infirmier." (P_4)

Le but de l'exercice est de découvrir qui sont A et B. Pour cela on introduit 3 valeurs : d pour représenter un docteur, i pour un infirmier et m pour un malade. Par exemple, la phrase P_1 dite par A peut se traduire par la formule $A = i$.

Questions.

1. Traduire de la même manière les trois autres phrases échangées P_2, P_3, P_4 en des formules logiques qui pourront utiliser les symboles A, B, m, i, d, l'égalité et les connecteurs propositionels.
2. A et B pouvant chacun prendre l'une des valeurs d, i ou m, combien y-a-t-il de possibilités différentes à considérer (en regardant tous les cas possibles sans tenir compte des phrases échangées) ?
3. Faire un tableau qui pour chaque valeur possible de A et de B donne la valeur de vérité des formules P_1, P_2, P_3 et P_4
4. Sur chaque ligne du tableau précédent, et pour chaque phrase, indiquer si elle a pu être dite. Par exemple si A est un docteur, il dit la vérité et donc il ne peut pas dire la phrase P_1 qui serait un mensonge.
5. A-t-on assez d'information pour retrouver le statut de A et de B ? justifier votre réponse.

Exercice 3 *Modélisation, 4 points*

On se donne un langage avec une constante `moi` qui désigne la personne qui parle, un prédicat ternaire `joue-avec`, quatre prédicats binaires `ami`, `travaille`, $=$ et `après`.

— $\texttt{joue-avec}(t, x, y)$ représente le fait que x et y jouent ensemble au temps t ;

— $\texttt{ami}(x, y)$ représente le fait que x et y sont amis ;

— $\texttt{travaille}(t, x)$ représente le fait que x travaille au temps t ;

— $x = y$ représente le fait que x et y sont égaux ;

— $\texttt{après}(t, u)$ représente le fait que le temps t est après le temps u.

1. Traduire en (bon) français, les formules logiques suivantes :
   (a) $\forall t, \texttt{travaille}(t, \texttt{moi}) \Rightarrow \forall y, \neg\texttt{joue-avec}(t, \texttt{moi}, y)$
   (b) $\forall t, \texttt{travaille}(t, \texttt{moi}) \Rightarrow \exists u\, y, \texttt{après}(u, t) \land \texttt{joue-avec}(u, \texttt{moi}, y)$
   (c) (formule C) $\exists t, \forall x, \texttt{travaille}(t, x)$
   (d) (formule D) $\forall x, \exists t, \texttt{travaille}(t, x)$
2. On reprend les formules C et D de la question précédente.
   (a) A-t-on $C \Rightarrow D$? $D \Rightarrow C$?
   (b) Donner la formule C' équivalente à $\neg C$ et la formule D' équivalente à $\neg D$ en mettant les négations uniquement sur les symboles de prédicat.

(c) Traduire en (bon) français les formules C' et D'.

(d) A-t-on $C' \Rightarrow D'$? $D' \Rightarrow C'$?

3. Donner des formules logiques correspondant aux phrases suivantes :

   (a) Je ne joue pas avec mes amis.

   (b) Je joue toujours avec exactement deux personnes à la fois.

4. On s'intéresse maintenant à une relation binaire `joue`(t, x) qui représente le fait que x joue au temps t (sans préciser avec qui).

   (a) Définir le prédicat `joue`(t, x) à l'aide d'une formule qui utilise la relation `joue-avec`.

   (b) Utiliser le prédicat `joue` pour traduire en formules logiques les phrases suivantes :

      i. On ne peut pas jouer et travailler en même temps.

      ii. Après avoir joué, je me mets toujours à travailler.

Exercice 4 *Séquents propositionnels, 3 points.*

Soit les séquents

S_1 **:** $(\neg A \vee (C \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \wedge C) \vdash A$

S_2 **:** $((A \wedge C) \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \wedge C), A \Rightarrow C \vdash$

1. Donner les formules logiques associées à ces séquents.
2. Construire les tables de vérité des deux formules précédentes.
3. Peut-on construire des preuves complètes dans le système G des séquents donnés ? si oui construire la preuve, sinon expliquer pourquoi.

Exercice 5 *Logique propositionnelle, 4 points.*

Soit la formule propositionnelle A définie comme

$$((p \vee q \vee r) \wedge (q \Rightarrow p)) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow r)$$

1. Donner la représentation syntaxique de la formule A sous forme d'arbre.
2. Donner une forme normale conjonctive et une forme normale disjonctive équivalentes à la formule A.
3. Cette formule est-elle valide ? justifier votre réponse.
4. Cette formule est-elle satisfiable ? si oui donner un modèle.
5. Donner le nombre total de modèles de la formule A.

Rappel des règles logiques du système G

hypothèse	$(\textsc{Hyp})\dfrac{}{A, \Gamma \vdash \Delta, A}$	
	gauche	droite
$\bot$	$(\textsc{Jok})\dfrac{}{\bot, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \bot}$
$\top$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\top, \Gamma \vdash \Delta}$	$(\textsc{Triv})\dfrac{}{\Gamma \vdash \Delta, \top}$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$
$\wedge$	$\dfrac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}$
$\vee$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \Rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}$