Licence Informatique, semestre 5 — 2015–16

Eléments de logique pour l'informatique (Info 315)

http://www.lri.fr/~paulin/Logique

ANONYMAT :.....................

Examen - 30 mai 2016

L'examen dure 2 heures. L'énoncé est composé de 3 pages, le barème est indicatif. Toutes les réponses devront être clairement justifiées. Le seul document autorisé est une page A4 manuscripte recto-verso. Le tableau résumant les règles du système G est donné à la fin du sujet.

Inscrivez votre nom sur chaque copie et numérotez-les. Cacheter toutes les copies. Recopier le numéro d'anonymat sur les intercalaires et sur l'énoncé.
Joindre l'énoncé aux copies avec les réponses du QCM.

Exercice 1 *QCM, 5 points ($+\frac{1}{4}$ par réponse correcte, $-\frac{1}{4}$ par réponse incorrecte)*
Ecrire les réponses sur l'énoncé qui sera rendu avec les copies.
Dire pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse (sans justification).

Affirmation	vrai	faux
$A \wedge B = B \wedge A$		
$A \Rightarrow B \Rightarrow C = (A \Rightarrow B) \Rightarrow C$		
$A \Rightarrow B \Rightarrow C \equiv (A \wedge B) \Rightarrow C$		
$\neg(A \Rightarrow B) \models A$		
$(A \Rightarrow \neg B) \equiv (B \Rightarrow \neg A)$		
$(\forall x, P(x)) \wedge (\forall y, Q(y)) \equiv \forall x, (P(x) \wedge Q(x))$		
$(\exists x, P(x)) \Rightarrow A \equiv \forall y, (P(y) \Rightarrow A)$		
L'ensemble de formules $\mathcal{E}$ est satisfiable si		
il existe une interprétation I telle que pour tout $A \in \mathcal{E}$, $\texttt{val}(I, A) = V$		
toute formule $A \in \mathcal{E}$ est satisfiable		
$A \models B$ si et seulement si $\neg B \Rightarrow \neg A$ est valide		
Soient p, q, et r des variables propositionnelles		
$p \vee \neg q$ est une clause		
$\neg p \vee q \vee r$ est en forme normale conjonctive		
$\neg p \wedge q \vee r$ est en forme normale conjonctive		
R relation binaire, g fonction binaire, f fonction unaire et a constante		
$R(f(a), a)$ est un terme bien formé		
$(\forall y, R(x, y))[y \leftarrow x] = \forall x, R(x, x)$		
$g(x, y)$ et $g(y, x)$ sont unifiables		
$\{x \leftarrow f(\mathtt{a}), y \leftarrow \mathtt{a}, z \leftarrow \mathtt{a}\}$ est l'unificateur principal de $g(x, y)$ et $g(f(y), z)$		
Soit la règle logique $\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}$		
cette règle est correcte		
cette règle est inversible		
Si on peut construire une dérivation de $\perp$ à partir de la forme clausale de la formule A, alors la formule $\neg A$ est valide.		
Il existe un algorithme qui décide pour une formule du calcul des prédicats si elle est satisfiable ou pas.		

Exercice 2 *Logique propositionnelle (5 points).*

Soit les deux séquents

S_1 **:** $(\neg q) \Rightarrow r \vdash \neg(q \Rightarrow p), r \wedge \neg p, p$

S_2 **:** $r \Rightarrow p, \neg q, q \Rightarrow r \vdash$

1. Donner les formules logiques associées à ces séquents.
2. Construire les tables de vérité des deux formules précédentes.
3. Peut-on construire des preuves complètes dans le système G des séquents donnés ? si oui construire la preuve, sinon expliquer pourquoi.

Exercice 3 *Modélisation (5 points).*

On se place dans un langage du premier ordre qui contient un symbole de prédicat binaire pour l'égalité.

On s'intéresse à un système de transport. Pour cela on se donne une relation à trois arguments `ligne`(n, d, a) qui représente le fait qu'il existe une ligne directe identifiée par le numéro n qui permet d'aller de la ville de code d (appelée départ) à la ville de code a (appelée arrivée). On se donne également un prédicat unaire `ville` tel que `ville`(x) est vrai si x est le code d'une ville.

1. Formaliser les énoncés suivants :
   (a) Tout numéro de ligne est associé à au plus une ville de départ.
   (b) Il existe une ville à partir de laquelle on peut rejoindre toutes les autres villes par une ligne de bus directe.
   (c) Toute ville est desservie, c'est-à-dire qu'il existe une ligne qui part de cette ville et une ligne qui y arrive.
2. Dans les tables suivantes, chaque ligne représente un triplet (n, d, a) tel que `ligne`(n, d, a) est vérifié et A, B, C et D sont des constantes qui représentent des villes différentes et n_1, n_2,… n_5 des constantes différentes qui représentent des numéros de ligne :

n_1	A	B
n_2	B	C
n_3	C	D
n_4	D	C
n_5	B	A

Modèle (a)

n_1	A	A
n_2	A	B
n_2	B	A

Modèle (b)

Expliquer par des phrases le sens de chacune des formules suivantes et dire si elles sont vérifiées dans les modèles (a) et (b) précédents (justifier vos réponses).

(a) $\forall n\, x\, y, (\texttt{ligne}(n, x, y) \Rightarrow \exists m, \texttt{ligne}(m, y, x))$

(b) $\forall n\, x, \neg \texttt{ligne}(n, x, x)$

Exercice 4 *Résolution (5 points).*
On se place dans un langage avec deux symboles de prédicat binaire P et A. Soient les trois formules de la logique du premier ordre suivantes :

— F_1 : $\forall x, \exists y, P(x,y)$
— F_2 : $\forall x\, y\, z, ((P(x,y) \land P(y,z)) \Rightarrow A(x,z))$
— F_3 : $\forall x, \exists y, A(x,y)$

1. Proposer un modèle dans lequel les trois formules sont vraies.
2. Mettre en forme clausale les formules F_1 et F_2 et $\neg F_3$. On prendra soin d'expliciter les symboles de skolem introduits.
3. Montrez **en utilisant la méthode de résolution** que la formule F_3 est conséquence logique des formules F_1 et F_2.

Rappel des règles logiques du système G

hypothèse	$(\textsc{Hyp})\dfrac{}{A, \Gamma \vdash \Delta, A}$	
	gauche	droite
$\bot$	$(\textsc{Jok})\dfrac{}{\bot, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \bot}$
$\top$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\top, \Gamma \vdash \Delta}$	$(\textsc{Triv})\dfrac{}{\Gamma \vdash \Delta, \top}$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$
$\land$	$\dfrac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \land B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \land B}$
$\lor$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \lor B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \lor B}$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \Rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}$