Licence Informatique, semestre 5 — 2016-17

Eléments de logique pour l'informatique (Info 315) — **ANONYMAT** :.....................

http://www.lri.fr/~paulin/Logique

Examen - 1 juin 2017

L'examen dure 2 heures. L'énoncé est composé de 3 pages, le barème est indicatif. Toutes les réponses devront être clairement justifiées. Le seul document autorisé est une page A4 manuscripte recto-verso. Les règles du système G sont rappelées à la fin du sujet.

Inscrivez votre nom sur chaque copie et numérotez-les. Cacheter toutes les copies. Recopier le numéro d'anonymat sur les intercalaires et sur l'énoncé.
Joindre l'énoncé aux copies avec les réponses du QCM.

Exercice 1 *QCM, 6 points ($+\frac{1}{4}$ par réponse correcte, $-\frac{1}{4}$ par réponse incorrecte)*
Ecrire les réponses sur l'énoncé qui sera rendu avec les copies.
Dire pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse (sans justification).

Affirmation	vrai	faux
$A \land B \lor C = A \land (B \lor C)$		
$A \Rightarrow B \Rightarrow C = A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$		
$A \Rightarrow B \equiv A \lor \neg B$		
$\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \land \neg B$		
$(\neg A \Rightarrow \neg B) \equiv (B \Rightarrow A)$		
$(\forall x, P(x)) \lor (\forall y, Q(y)) \equiv \forall x, (P(x) \lor Q(x))$		
$\forall x, P(x) \models \exists x, P(x)$		
$\forall x, R(x, f(x)) \models \forall x, \exists y, R(x, y)$		
$\forall x, R(x, f(x)) \equiv \forall x, \exists y, R(x, y)$		
L'ensemble de formules $\mathcal{E}$ est **valide** si et seulement si		
il existe une interprétation I telle que pour tout $A \in \mathcal{E}$, $\texttt{val}(I, A) = V$		
pour toute interprétation I et toute formule $A \in \mathcal{E}$, $\texttt{val}(I, A) = V$		
toute formule $A \in \mathcal{E}$ est valide		
Soient p, q, et r des variables propositionnelles		
$\neg(p \lor q)$ est une clause		
$(\neg p \land \neg r) \land (q \lor r)$ est en forme normale conjonctive		
$\neg p \lor q \lor r$ est en forme normale conjonctive		
R relation binaire, g fonction binaire, f fonction unaire et a constante		
$f(g(a), a)$ est un terme bien formé		
$(\forall y, R(x, y))[x \leftarrow y] = \forall y, R(y, y)$		
$(\forall y, R(x, y))[x \leftarrow y] = \forall z, R(y, z)$		
$g(g(x, y), z)$ et $g(x, f(x))$ sont unifiables		
$\{x \leftarrow f(y), y \leftarrow f(z)\}$ est l'unificateur principal de $g(x, f(z))$ et $g(f(y), y)$		
Soit la règle logique $\dfrac{A \land B \vdash C}{A, B \vdash C}$		
cette règle est correcte		
cette règle est inversible		
Si on peut déduire la clause vide à partir de la forme clausale de la formule A en utilisant les règles de résolution, alors la formule A est valide.		
Il existe un algorithme qui décide pour une formule du calcul propositionnel si elle est satisfiable ou pas.		

Exercice 2 *Modélisation, (8 points).*

On cherche à modéliser un tournoi de tennis. Pour cela on se place dans un univers dans lequel les objets représentent des joueurs. Chaque match est soit gagné soit perdu, il n'y a pas de match nul.

On introduit les symboles suivants :

— `gagne`, un prédicat binaire $\texttt{gagne}(e_1, e_2)$ représente le fait que le joueur e_1 a joué contre le joueur e_2 et a gagné, ce qui signifie aussi que e_2 a perdu contre e_1.

— une relation binaire d'égalité.

1. Exprimer à l'aide de formules logiques les propriétés suivantes :
   (a) aucun joueur ne joue contre lui-même ;
   (b) deux joueurs différents jouent exactement une fois l'un contre l'autre ;
   (c) nul joueur ne peut à la fois perdre et gagner contre un autre joueur ;
   (d) aucun joueur ne gagne contre tous les autres joueurs ;
   (e) aucun joueur n'a gagné tous ses matchs ;
2. On définit trois interprétations. Chacune a pour domaine un ensemble de trois joueurs $\{A, B, C\}$. L'égalité est interprétée de manière habituelle. L'interprétation de la relation `gagne` est donnée par les tableaux suivants qui représentent éxactement les cas pour lesquels `gagne` est vrai.

interprétation 1	interprétation 2	interprétation 3
`gagne`(A,B)	`gagne`(A,B)	`gagne`(A,B)
`gagne`(A,C)	`gagne`(A,C)	`gagne`(B,C)
`gagne`(B,C)	`gagne`(B,C)	
`gagne`(A,A)	`gagne`(C,A)	

   Pour chacune des formules que vous avez proposées à la question 1, dire si elle est vraie ou fausse dans chacune des trois interprétations 1, 2 et 3 ci-dessus. On pourra présenter le résultat en complétant le tableau ci-dessous avec la valeur de chaque formule dans chaque interprétation.

	interprétation 1	interprétation 2	interprétation 3
formule (a)			
formule (b)			
formule (c)			
formule (d)			
formule (e)			

3. Exprimer à l'aide d'une formule logique qui contient une variable libre e les faits suivants :
   — formule $A(e)$: le joueur e a gagné contre tous les autres joueurs
   — formule $B(e)$: le joueur e n'a perdu aucun match
   — formule $C(e)$: le joueur e a gagné au moins un match
4. On reprend les formules $A(e)$, $B(e)$ et $C(e)$ de la question 3. Dire si les formules suivantes sont valides ou non, si elles sont valides on le justifiera par des preuves ou des équivalences logiques, sinon on proposera une interprétation dans laquelle la formule est fausse.
   (a) $\forall e, A(e) \Rightarrow B(e)$

(b) $\forall e, B(e) \Rightarrow A(e)$

(c) $\forall e, \neg A(e) \Rightarrow \neg B(e)$

(d) $\forall e, B(e) \Rightarrow C(e)$

Exercice 3 *Preuves (6 points).*
On se place dans un langage avec deux symboles de prédicat binaires q et r, un symbole de fonction unaire $\mathtt{f}$ et une constante $\mathtt{a}$. Soient les trois formules de la logique du premier ordre suivantes :

— F_1 : $\forall x, \forall y, q(x,y) \Rightarrow r(\mathtt{f}(x), \mathtt{f}(y))$

— F_2 : $\forall x, q(x, \mathtt{a})$

— F_3 : $\exists y, \forall x, r(\mathtt{f}(x), y)$

1. Mettre en forme clausale les formules F_1 et F_2 et $\neg F_3$. On prendra soin d'expliciter les symboles de skolem introduits.
2. Montrez **en utilisant la méthode de résolution** que la formule F_3 est conséquence logique des formules F_1 et F_2. On indiquera à chaque étape les clauses ainsi que la substitution utilisées.
3. Montrez **en utilisant le système** G que le séquent $F_1, F_2 \vdash \forall x, r(\mathtt{f}(x), \mathtt{f}(\mathtt{a}))$ est valide. Peut-on en déduire la validité du séquent (justifier) $F_1, F_2 \vdash \exists y, \forall x, r(\mathtt{f}(x), y)$?

Rappel des règles logiques du système G

hypothèse	$(\textsc{Hyp})\dfrac{}{A, \Gamma \vdash \Delta, A}$	
	gauche	droite
$\bot$	$\dfrac{}{\bot, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \bot}$
$\top$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\top, \Gamma \vdash \Delta}$	$(\textsc{Triv})\dfrac{}{\Gamma \vdash \Delta, \top}$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$
$\wedge$	$\dfrac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}$
$\vee$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \Rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}$
$\forall$	$\dfrac{(\forall x, P), P[x \leftarrow t], \Gamma \vdash \Delta}{(\forall x, P), \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, P}{\Gamma \vdash \Delta, (\forall x, P)} x \notin \mathsf{Vl}(\Gamma, \Delta)$
$\exists$	$\dfrac{P, \Gamma \vdash \Delta}{(\exists x, P), \Gamma \vdash \Delta} x \notin \mathsf{Vl}(\Gamma, \Delta)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, (\exists x, P), P[x \leftarrow t]}{\Gamma \vdash \Delta, (\exists x, P)}$