

Examen - 7 juin 2018

L'examen dure 2 heures. L'énoncé est composé de 2 pages. Toutes les réponses devront être clairement justifiées. Le seul document autorisé est une page A4 manuscrite recto-verso. Le tableau résumant les règles du système G est donné à la fin du sujet.

Inscrivez votre nom sur chaque copie (sauf le QCM) et numérotez-les. Cacheter toutes les copies. Recopier le numéro d'anonymat sur les intercalaires et sur le QCM.

Exercice 1 *QCM (8 points)*

Le **numéro d'anonymat** de la copie principale (pas le numéro d'étudiant) doit être reporté sur l'énoncé du QCM. Utiliser un style bleu ou noir pour cocher les cases. **N'oubliez pas de rendre le QCM avec vos copies.**

Exercice 2 *Systèmes de preuve (6 points)*

On considère une logique dont la signature est composée de trois prédicats binaires F , G et H .

On considère les quatre propriétés suivantes :

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \forall y, \exists x, F(x, y)$$

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \forall z, \exists y, G(y, z)$$

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \forall x y z, F(x, y) \wedge G(y, z) \Rightarrow H(x, z)$$

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \forall z, \exists x, H(x, z)$$

1. Faire une preuve par résolution du fait que la formule D est conséquence logique des trois formules A, B et C . On prendra soin de bien expliciter les différentes étapes.
2. Faire une preuve du séquent $A, B, C \vdash D$ dans le système G .
3. Montrer que $A, C \vdash D$ n'est pas un séquent valide en trouvant une interprétation qui rend faux ce séquent.

Exercice 3 (6 points) Dans cet exercice, on s'intéresse à des propriétés d'un système de fichiers et de répertoires informatiques que l'on appellera des *ressources*. Les objets du langage qui ne sont ni des fichiers, ni des répertoires sont vus comme des utilisateurs.

On considère un langage dans lequel on a une constante **racine** et les prédicats suivants :

- **repertoire**(o) qui représente le fait que o est un répertoire.
- **fichier**(o) qui représente le fait que o est un fichier.
- **dans**(x, y) qui représente le fait que la ressource y est située dans la ressource x .
- **acces**(x, y) qui représente le fait qu'un utilisateur x a accès à la ressource y .

1. Donner les formules logiques qui correspondent aux phrases suivantes
 - (a) La racine n'est située dans aucune ressource.
 - (b) Seul un répertoire peut contenir d'autres ressources.
 - (c) Tout fichier est situé dans au moins un répertoire.
 - (d) Les utilisateurs qui ont accès à la racine ont accès à toutes les ressources.
2. Expliciter en langue naturelle les propositions correspondant aux formules suivantes :
 - (a) $\forall o x y, \text{acces}(o, y) \wedge \text{dans}(x, y) \Rightarrow \text{acces}(o, x)$
 - (b) $\forall o x y, \text{acces}(o, x) \wedge \text{dans}(x, y) \Rightarrow \text{acces}(o, y)$
 - (c) $\exists o, \forall x, \text{acces}(o, x)$

- (d) $\forall x, \exists o, \text{ acces}(o, x)$
3. Est-il possible de trouver une interprétation du langage telle que la formule 2d (exercice 2) est vraie mais pas la formule 2c ? Expliquer pourquoi.
Même question avec une interprétation qui rend vraie la formule 2c et fausse la formule 2d.
4. Soit une interprétation I dont le domaine est composé de 7 éléments $\{a, u, R, D, F, G, H\}$. La constante **racine** est interprétée par R . Les prédicats sont interprétés par des relations telles que :
- $\text{repertoire}_I(R), \text{repertoire}_I(D), \text{fichier}_I(F), \text{fichier}_I(G), \text{fichier}_I(H)$
 - $\text{dans}_I(R, D), \text{dans}_I(R, F), \text{dans}_I(D, G)$
 - $\text{acces}_I(a, R), \text{acces}_I(u, H)$
- Dire pour chacune des formules des questions 1 et 2 si elles sont vraies ou non dans cette interprétation.

Rappel des règles logiques du système G

hypothèse	(HYP) $\frac{\quad}{A, \Gamma \vdash \Delta, A}$	
	gauche	droite
\perp	$\frac{\quad}{\perp, \Gamma \vdash \Delta}$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \perp}$
\top	$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\top, \Gamma \vdash \Delta}$	$\frac{\quad}{\Gamma \vdash \Delta, \top}$
\neg	$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta}$	$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$
\wedge	$\frac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}$
\vee	$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$
\Rightarrow	$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \Rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}$
\forall	$\frac{P[x \leftarrow t], (\forall x, P), \Gamma \vdash \Delta}{(\forall x, P), \Gamma \vdash \Delta}$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta, P}{\Gamma \vdash \Delta, (\forall x, P)} \quad x \notin \text{VI}(\Gamma, \Delta)$
\exists	$\frac{P, \Gamma \vdash \Delta}{(\exists x, P), \Gamma \vdash \Delta} \quad x \notin \text{VI}(\Gamma, \Delta)$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta, (\exists x, P), P[x \leftarrow t]}{\Gamma \vdash \Delta, (\exists x, P)}$