Examen - 26 juin 2019

L'examen dure 2 heures. L'énoncé est composé de 2 pages. Toutes les réponses devront être clairement justifiées. Le seul document autorisé est une page A4 manuscripte recto-verso.
Inscrivez votre nom sur chaque copie et numérotez-les. Cacheter toutes les copies. Recopier le numéro d'anonymat sur les intercalaires et sur le QCM.

Exercice 1 *QCM (6 points)*

Le **numéro d'anonymat** de la copie principale (pas le numéro d'étudiant) doit être reporté sur l'énoncé du QCM (noircir les cases prévues à cet effet et reporter le numéro en clair). Utiliser un stylo bleu ou noir pour cocher les cases.

Des points négatifs sont attribués en cas de réponse fausse aux questions 1 à 3 (retrait de la moitié des points attribés à une réponse correcte : une réponse juste et deux réponses fausses valent 0).

N'oubliez pas de rendre le QCM avec vos copies.

Exercice 2 *Questions de cours (3 points)*

1. On se donne trois formules A, B et C du calcul propositionnel et on veut savoir si C est conséquence logique ou non des formules A et B. En vous appuyant sur les techniques vues en cours et en TD, proposer deux méthodes différentes pour répondre à cette question. Vous détaillerez les grandes étapes mais sans entrer dans le détail des règles logiques. Typiquement votre réponse sera organisée de la manière suivante :
   (a) On applique les transformations suivantes aux formules A, B, C : "……"
   (b) A l'aide des règles "……" vues en cours appliquées à l'objet "……", on construit "……"
   (c) Suivant la forme de l'objet construit, on en déduit "……"
2. Peut-on faire la même chose si A, B et C sont des formules du calcul des prédicats ?

Exercice 3 *Modélisation, modèles et preuves (12 points).*
On s'intéresse au problème de coloriage d'un graphe. Il s'agit d'attribuer une couleur à chaque sommet du graphe de manière à ce que deux sommets qui sont reliés par une arête n'aient pas la même couleur.

Dans la première partie de l'exercice, on utilise la logique du premier ordre. Dans la seconde partie, le problème est modélisé en utilisant le calcul propositionnel. Cette seconde partie est complètement indépendante de la première.

Partie I : Modélisation en calcul des prédicats (8 points).
On se donne un langage dans lequel il y a deux prédicats binaires E et `col` et un prédicat unaire V tels que

— $V(x)$ est vrai exactement lorsque x est un *sommet du graphe*
— $E(x, y)$ est vrai exactement lorsque x et y sont deux sommets *reliés par une arête* du graphe.
— $\texttt{col}(x, c)$ est vrai exactement lorsque le sommet x est *associé à la couleur c*.

D'un point de vue logique, n'importe quel élément de l'univers peut représenter une couleur, y compris les sommets du graphe. Attention, il n'y a pas de prédicat pour l'égalité dans le langage, les formules ne devront donc pas utiliser l'égalité.

I-1 Formaliser les énoncés suivants qui seront par la suite notés P et Q :

P : A tout sommet est associé (au moins) une couleur

Q : Deux sommets reliés par une arête ne sont pas associés à la même couleur

I-2 Soit la formule $\forall x, V(x) \Rightarrow \neg E(x, x)$ notée R.

(a) A quelle propriété du graphe de sommets V et d'arêtes E correspond la formule R ?

(b) En utilisant la méthode de résolution (dont on détaillera les étapes), montrer que R est conséquence logique de P et de Q.

I-3 Soient un domaine D et des interprétations de E et de V quelconques qui satisfont la propriété R.

(a) Montrer qu'il existe toujours une interprétation de `col` telle que les formules P et Q sont vraies dans cette interprétation.

(b) Peut-on en déduire que $P \wedge Q$ est conséquence logique de R ? pourquoi ?

I-4 On modifie le problème en introduisant dans le langage deux constantes `bleu` et `rouge`. On remplace la formule P qui dit qu'à tout sommet est associé une couleur, par la formule P' qui dit qu'à tout sommet est associé une des deux couleurs `bleu` ou `rouge`.

(a) Donner la formule P'.

(b) On se place sur le domaine D des entiers naturels, et dans une interprétation dans laquelle le prédicat V est toujours vrai et la relation $E(n, m)$ est vraie si et seulement si $n + m$ est impair. La couleur `bleu` est interprétée 0 et la couleur `rouge` par 1.

i. La formule R est-elle vraie dans cette interprétation ?

ii. Trouver une interprétation de `col` qui rend vraies les formules P' et Q.

(c) Dans un domaine D et une interprétation de E et de V quelconque qui rend vraie la formule R, existe-t-il toujours une interprétation de `col` qui rend vraies les formules P' et Q ? Justifier votre réponse.

Partie II : Modélisation en calcul propositionnel (4 points).

On s'intéresse maintenant au même problème mais dans le cadre du calcul propositionnel. On a donc un graphe qui est défini par un ensemble fini S de sommets et une relation A entre ces sommets correspondant aux arêtes.

On cherche à colorier ce graphe avec plusieurs couleurs. Pour cela on va introduire des variables propositionnelles qui modélisent la couleur des sommets. On définit un ensemble de formules correspondant aux contraintes du coloriage (deux sommets reliés par une arête n'ont pas la même couleur). On cherche ensuite des solutions en utilisant la logique dont on pourra déduire les propriétés de coloriage de notre graphe initial.

Par exemple, si on a deux sommets x et y, on pourra introduire deux variables propositionnelles X et Y telles que X est vraie si et seulement si le sommet x est colorié en bleu et Y est vrai si et seulement si le sommet y est colorié en bleu. S'il existe une arête entre x et y dans le graphe, alors on introduira une formule $X \Rightarrow \neg Y$ qui dit que si x est bleu alors y ne peut pas être bleu. Et ceci pour toutes les arêtes et toutes les couleurs. Si l'ensemble des formules ainsi obtenu est satisfiable alors un modèle de cet ensemble correspond à une solution du problème de coloriage.

II-1 On suppose que l'on veut colorier le graphe avec seulement deux couleurs `bleu` et `rouge`.

(a) Montrer qu'il suffit d'utiliser une variable propositionnelle par sommet que l'on notera C_x. Expliquer comment la valeur de vérité de C_x est reliée à la couleur du sommet x.

(b) Donner un ensemble de *clauses propositionnelles* qu'il faut satisfaire pour trouver un coloriage du graphe en utilisant les variables propositionnelles C_x, on pourra utiliser les ensembles S et A pour caractériser les formules.

(c) Expliciter ces clauses dans le cas particulier où S est un ensemble de trois sommets a,b et c tous reliés entre eux. Montrer que l'ensemble de clauses ainsi obtenu est insatisfiable. Qu'en déduisez-vous concernant la possibilité de colorier ce graphe avec 2 couleurs ?

II-2 On s'intéresse maintenant à un coloriage avec plus de deux couleurs.

(a) S'il y a trois couleurs `bleu`, `rouge` et `vert`, combien faut-il de variables propositionnelles pour modéliser le problème en fonction du nombre de sommets du graphe ? Combien faut-il de clauses en fonction du nombre d'arêtes et du nombre de couleurs ?

(b) A-t-on besoin de plus de variables propositionnelles pour modéliser le problème avec 4 couleurs ? de manière générale combien de variables propositionnelles sont nécessaires pour modéliser le problème en fonction du nombre de couleurs ?