Feulle 1 - Langage logique, révisions Calcul Propositionnel

Exercice 1 La contraposée d'une formule $P \Rightarrow Q$ est la formule $\neg Q \Rightarrow \neg P$, la réciproque est la formule $Q \Rightarrow P$, la contraposée de la réciproque est la formule $\neg P \Rightarrow \neg Q$.

1. Exprimer par des phrases ces 4 formules en prenant pour P la propriété « il est midi » et pour Q la propriété « j'ai faim ».
2. Pour P et Q arbitraires construire les tables de vérité de ces quatre formules, dire lesquelles sont équivalentes.
3. Attention aux usages courants qui ne respectent pas toujours les règles de la logique. Soit la formule P « Max a bu » et la formule Q « Max ne peut pas conduire ». On suppose que la formule $P \Rightarrow Q$ est vérifiée. Peut-on en déduire que si Max n'a pas bu alors il peut conduire ?

Exercice 2 *Formules propositionnelles.* Pour chacune des formules suivantes,

- introduire les parenthèses en respectant les règles de priorité des opérateurs ;
- indiquez si la formule est valide, satisfiable mais pas valide ou insatisfiable ;
- justifiez vos réponses en utilisant les tables de vérité.
  Dans le cas d'une formule satisfiable mais pas valide il suffit de donner des valeurs des variables p, q et r pour lesquelles la formule est fausse.

1. $r \Rightarrow (p \Rightarrow q) \vee \neg q$
2. $(r \Rightarrow p \Rightarrow q) \vee q$
3. $(p \Rightarrow \neg q) \wedge p \wedge q \wedge \neg r$

Exercice 3 *Table de vérité .*
Soient les formules $A \stackrel{\text{def}}{=} P \wedge Q \Rightarrow R$ et $B \stackrel{\text{def}}{=} P \Rightarrow Q \Rightarrow R$.

1. Ajouter des parenthèses autour des connecteurs sans changer le sens de ces formules.
2. Donner les tables de vérité de ces deux formules. Que constate-t-on ?
3. Reprendre les mêmes questions avec les formules $P \vee Q \Rightarrow R$ et les formules $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$.

Exercice 4 *Enigme.* Arthur, Bob et Casimir sont soupçonnés d'avoir peint en bleu le chat de la voisine. Ils font les déclarations suivantes :

- Arthur : Bob est coupable et Casimir est innocent.
- Bob : Si Arthur est coupable, Casimir aussi.
- Casimir : Je suis innocent mais au moins l'un des deux autres est coupable.

1. On pose : $a =$ "Arthur est coupable", $b =$ "Bob est coupable" et $c =$ "Casimir est coupable". Avec ces notations transcrire les trois déclarations ci-dessus dans le langage de la logique propositionnelle (notées F_A, F_B et F_C).
2. Construire la table de vérité des formules F_A, F_B et F_C en numérotant les interprétations.
3. En utilisant la question précédente et en expliquant votre raisonnement, répondez aux questions suivantes :
   - (a) Montrer que si Casimir a menti alors Arthur aussi.
   - (b) Si Casimir a menti que peut-on dire de la déclaration de Bob ?
   - (c) En supposant que tous ont dit la vérité, qui est coupable qui est innocent ?
   - (d) En supposant que tous sont coupables, qui a dit vrai qui a menti ?
   - (e) Est-il possible que tous les innocents aient menti et que tous les coupables aient dit la vérité ?

Exercice 5 Un logicien affirme "les personnes qui aiment la montagne aiment aussi la campagne".

1. Sachant que monsieur X n'aime pas la campagne, peut-on en déduire s'il aime ou non la montagne ?
2. Si Madame Y n'aime pas la montagne, peut-on en déduire si elle aime ou non la campagne ?
3. Que dire des phrases
   (a) "les personnes qui n'aiment pas la montagne n'aiment pas la campagne".
   (b) "les personnes qui n'aiment pas la campagne n'aiment pas la montagne".
   (c) "les personnes qui aiment la campagne aiment aussi la montagne".

   sont-elles équivalentes à l'affirmation du logicien ? lesquelles sont équivalentes entre elles ?
4. Traduire la phrase du logicien et les trois affirmations précédentes en des formules logiques qui utilisent des symboles de prédicat unaires `aime-montagne` et `aime-campagne`
5. Donner deux formules logiques différentes qui expriment la négation de l'affirmation du logicien.

Exercice 6 *Formaliser* On se donne le vocabulaire suivant
— `mange`(p,a) : p mange a
— `aime`(p,a) : p aime a
— `self` : moi

Traduire par des formules logiques les phrases suivantes

1. J'aime tout ce que je mange
2. Je ne mange pas tout ce que j'aime
3. Tout le monde aime au moins un plat
4. Il y a un plat que tout le monde aime
5. Quelque chose que j'aime et que je ne mange pas
   (attention il s'agit d'une formule qui caractérise un objet auquel il faut donner un nom)

Exercice 7 *Formaliser (examen 2013)*

On cherche à modéliser un plan de table, c'est-à-dire comment les personnes sont installées pour diner autour de tables. On se donne les prédicats suivants

$\texttt{voisin}(x,y)$	x est assis à côté de y
$\texttt{ami}(x,y)$	x et y sont amis
$\texttt{homme}(x)$	x est un homme
$x = y$	x et y sont la même personne

Le plan de table doit suivre un certain nombres de règles qui s'appliquent à toutes les personnes présentes.

1. Les personnes qui sont assises côte à côte sont amis
2. Deux hommes ne sont pas assis côte à côte
3. Une femme est assise à côté d'au moins un homme
4. Personne n'est assis tout seul
5. On ne peut être assis à côté de soi-même
6. Personne n'est assis auprès de plus de deux personnes

Exprimer par des formules logiques sur le langage donné les principes de placement énoncés ci-dessus.

Exercices d'approfondissement

Exercice 8 *Extrait examen 2012.*

Un fermier doit faire traverser une rivière à une chèvre, un loup et un chou. Il dispose d'une barque qui ne peut contenir que l'un des trois (en plus de lui-même). Par ailleurs il ne peut laisser seuls ensemble sur une rive, ni la chèvre et le chou, ni le loup et la chèvre.

— On introduit des constantes `chèvre`, `chou` et `loup` pour les personnages et une constante `emp` pour l'ensemble vide.
— On introduit deux opérations sur les ensembles `add` qui ajoute un élément à un ensemble et `rem` qui supprime un élément d'un ensemble.
— On se donne deux prédicats binaires $\in$ et $=$ pour exprimer qu'un élément appartient à un ensemble et que deux objets sont égaux.

1. Donner un terme qui représente l'ensemble T formé des trois (chèvre, loup et chou).
2. Donner les formules du calcul des prédicats pour les propriétés suivantes :
   (a) il n'y a pas d'élément dans l'ensemble vide ;
   (b) deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments
   (c) caractérisation des éléments de l'ensemble x auquel on a ajouté l'élément a (donner un équivalent à $p \in \texttt{add}(a, x)$ qui n'utilise pas `add`)
   (d) caractérisation des éléments de l'ensemble x auquel on a supprimé l'élément a
3. Pour modéliser la traversée, on se donne un symbole de relation binaire $\texttt{state}(x, y)$ qui exprime une situation dans laquelle les éléments de l'ensemble x sont à gauche de la rivière et ceux de y sont à droite de la rivière. On veut montrer $\texttt{state}(T, \texttt{emp}) \Rightarrow \texttt{state}(\texttt{emp}, T)$
   (a) Définir une formule logique $\texttt{ok}(x)$ qui exprime que l'ensemble x est "stable" (ne contient pas un objet qui va en manger un autre)
   (b) Combien y-a-t-il d'ensembles formés uniquement d'éléments choisis parmi la chèvre, le chou et le loup ? Parmi ces ensembles, combien satisfont la propriété `ok` ?
   (c) Compléter la formule suivante

   $$\forall a\, x\, y, (a \in \ldots \wedge \texttt{ok}(\ldots) \wedge \texttt{state}(x, y) \Rightarrow \texttt{state}(\ldots, \ldots))$$

   de deux manières différentes pour représenter les deux transitions possibles dans lesquelles un objet passe de gauche à droite ou bien de droite à gauche.
4. Comment résoudre le problème ? faire le lien avec une preuve dans ce formalisme.

Exercice 9 *Un peu de théorie.*

On considére des formules propositionnelles sur 2 variables p, q.

1. Montrer qu'il y a une infinité de formules utilisant ces deux variables.
2. Combien y-a-t-il d'interprétations possibles utilisant ces 2 variables ?
3. Combien y-a-t-il de tables de vérité possibles pour des formules utilisant ces 2 variables ?
4. On se donne 20 formules propositionnelles qui utilisent p et q, montrer qu'il y a forcément deux formules parmi les 20 qui sont logiquement équivalentes.
5. Si on considère des formules construites sur n variables, combien de formules faut-il prendre pour être sûr d'en avoir deux différentes qui sont équivalentes ?

Exercice 10 Cet exercice a pour objectif de prouver un résultat théorique qui s'appelle le théorème de compacité.

L'énoncé de ce théorème est le suivant : soit un ensemble infini $\mathcal{E}$ de formules propositionnelles. On suppose que cet ensemble est insatisfiable. Alors il existe un sous-ensemble fini de $\mathcal{E}$ qui est insatisfiable.

1. Redonner la définition de la propriété $\mathcal{E}$ est insatisfiable.
2. Montrer que si un sous-ensemble fini de $\mathcal{E}$ est insatisfiable alors $\mathcal{E}$ est insatisfiable.

3. Dire pourquoi le résultat est vrai dans le cas où il n'y a qu'un nombre fini de variables propositionnelles. On étudiera l'exemple de l'ensemble $\mathcal{E} = \{B \Rightarrow A, A \Rightarrow \neg B, \neg A \Rightarrow B\} \cup (M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ avec $M_0 = A \Rightarrow B$ et $M_{n+1} = M_n \Rightarrow B$
4. On suppose maintenant qu'il y a un ensemble dénombrable de formules propositionnelles $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$. On construit un arbre binaire de décision possiblement infini pour l'ensemble de formule $\mathcal{E}$ de la manière suivante :
   - Les sommets sont étiquetés par les variables propositionnelles, la racine de l'arbre est étiquetée par la variable X_0, les fils d'un nœud étiqueté par la variable X_i sont étiquetés par la variable X_{i+1}.
   - Le fils gauche d'un nœud étiqueté X_i correspond au cas $X_i = V$ et le fils droit au cas $X_i = F$.
   - Chaque branche correspond à une interprétation partielle $X_0 = V/F, \ldots, X_i = V/F$
   - Une feuille de l'arbre est étiquetée par une formule qui est fausse dans l'interprétation qui correspond à la branche.

Exercice 11 *Coloriage de graphe* Le problème de coloriage de graphe consiste à se donner un ensemble fini de couleurs et à associer à chaque sommet d'un graphe une couleur de manière à ce que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur.

Pour chaque couleur $c \in C$ on se donne un ensemble de variables propositionnelles (x_i^c) avec (x_i^c) qui sera vrai si le sommet i a la couleur c.

- Combien y-a-t-il de variables pour un graphe de n sommets et k couleurs ?
- Proposer un ensemble de formules tel que toute interprétation qui rend vraies ces formules correspond à un coloriage du graphe.
- Soit un graphe infini, montrer que si tous les sous-graphes finis sont coloriables alors le graphe complet est coloriable