Licence Informatique, semestre 5 — 2019–20
Eléments de logique pour l'informatique (Info 315) — 8 septembre 2019
`http://www.lri.fr/~paulin/Logique`

# Feulle 2 - Langage logique, Calcul Propositionnel

**Exercice 1** *Table de vérité*

Soit la formule $M$ définie comme $(P \wedge Q) \vee R \Rightarrow P \wedge (Q \vee R)$. Cette formule est-elle vraie pour certaines valeurs de $P$ et $Q$ ? Est-elle valide en général ?

**Exercice 2** *Identités booléennes.* Justifier les résultats en utilisant des tables de vérité

1. Donner des formules équivalentes plus simples des formules suivantes : $(P \vee Q) \wedge P$ et $(P \wedge Q) \vee P$.
2. Montrer la distributivité de la conjonction sur la disjonction et inversement
   — $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
   — $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

**Exercice 3** Dire pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse.

| **Affirmation** | vrai | faux |
|---|---|---|
| $A = B$ représente le fait que les deux formules sont syntaxiquement égales (même représentation). | | |
| $A \vee B = B \vee A$ | | |
| $A \Rightarrow B \wedge C = A \Rightarrow (B \wedge C)$ | | |
| $A \equiv B$ représente le fait que les deux formules sont sémantiquement égales (vraies en même temps). | | |
| $A \Rightarrow B \Rightarrow C \equiv (A \wedge B) \Rightarrow C$ | | |
| $\neg(A \Rightarrow B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ | | |
| Si $P \Rightarrow Q$ est faux alors $P$ est vrai. | | |
| Si $P \vee Q$ est vrai alors $Q$ est vrai. | | |
| Si $P$ est vrai alors $(\neg P) \Rightarrow Q$ est faux. | | |
| La formule $A \Rightarrow \neg B$ est satisfiable | | |
| La formule $A \Rightarrow \neg B$ est valide | | |
| Soit `joue` un prédicat binaire tel que `joue`$(x, y)$ représente le fait que $x$ joue avec $y$. | | |
| $\forall x, \exists y, \neg$`joue`$(x, y)$ signifie qu'il existe quelqu'un avec qui personne ne joue. | | |
| La formule $(\exists x\, y,$ `joue`$(x, y)) \Rightarrow \exists z,$ `joue`$(z, z)$ est toujours vraie. | | |
| $\forall x, \exists y, \exists z, ($`joue`$(x, y) \wedge$ `joue`$(x, z))$ signifie que toute personne joue avec au moins deux personnes différentes. | | |

**Exercice 4** *Algorithmes satisfiabilité-validité*

— On suppose que l'on dispose d'un algorithme `valide` qui répond vrai si une formule est valide et faux sinon. Utiliser cette fonction pour implanter un algorithme `satisfiable` qui répond vrai si une formule est satisfiable et faux sinon.

— On suppose que l'on dispose d'un algorithme `satisfiable` qui répond vrai si une formule est satisfiable et faux sinon. Utiliser cette fonction pour implanter un algorithme `valide` qui répond vrai si une formule est valide et faux sinon.

**Exercice 5** *Enigme, d'après Smullyan, partiel 2013*

Une femme qui cherche un mari présente à ses prétendants 3 coffres numérotés de 1 à 3. Un seul de ces coffres contient son portrait qu'il faut découvrir. Chaque coffre comporte une inscription :

1. Le portrait est dans ce coffre

2. Le portrait n'est pas dans ce coffre
3. Le portrait n'est pas dans le coffre 1

**Questions.** On introduit des variables propositionnelles $P_1$ pour représenter le fait que le portrait est dans le coffre 1 et $P_2$ pour représenter le fait que le portrait est dans le coffre 2.

1. Donner une formule qui utilise les variables $P_1$ et $P_2$ et qui est vraie exactement lorsque le portrait est dans le coffre 3.
2. Donner une formule qui utilise les variables $P_1$ et $P_2$ et qui représente le fait que le portrait est exactement dans un des coffres.
3. Donner des formules $I_1$, $I_2$ et $I_3$ qui utilisent les variables $P_1$ et $P_2$ et qui représentent les inscriptions sur chacun des coffres.
4. Sachant qu'une seule des formules $I_1$, $I_2$ et $I_3$ est vraie, en déduire dans quel coffre est caché le portrait.

**Exercice 6** *Enigme.* Trois collègues, Albert, Bernard et Charles déjeunent ensemble chaque jour ouvrable. Les affirmations suivantes sont vraies :

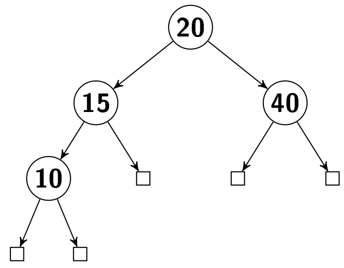
1. Si Albert commande un dessert, Bernard en commande un aussi.
2. Chaque jour, soit Bernard, soit Charles, mais pas les deux, commandent un dessert.
3. Albert ou Charles, ou les deux, commandent chaque jour un dessert.
4. Si Charles commande un dessert, Albert fait de même.

**Questions**

1. Exprimer les données du problème comme des formules propositionnelles
2. Que peut on en déduire sur qui commande un dessert ?
3. Pouvait-on arriver à la même conclusion en supprimant l'une des quatre affirmations ?

**Exercice 7** *Modélisation*

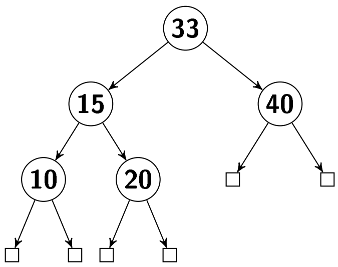
On se donne une signature pour représenter des arbres binaires de recherche avec une constante `nil` qui correspond à une feuille de l'arbre, et un symbole de fonction d'arité 3 : `node`. On introduit également des constantes pour tous les entiers naturels $0, 1, \ldots, 10, \ldots, 15 \ldots$. Dans l'expression $\texttt{node}(l, v, r)$, $l$ représente le sous-arbre gauche, $r$ le sous-arbre droit et $v$ la valeur stockée dans le nœud. On rappelle qu'un arbre binaire de recherche a la propriété que pour chaque nœud interne, les valeurs stockées dans le sous-arbre gauche $l$ sont strictement plus petites que $v$ qui est lui-même strictement plus petit que toutes les valeurs stockées dans le sous-arbre droit $r$.

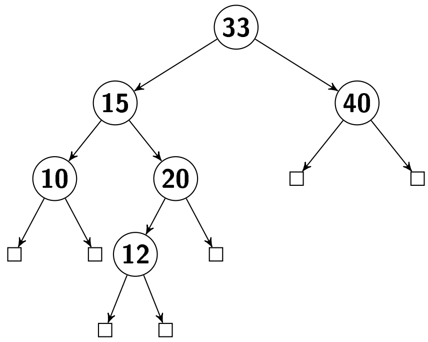



est un arbre binaire de recherche qui correspond au terme `node(node(node(nil,10,nil),15,nil),20,node(nil,40,nil))`.

Les symboles de prédicats sont $=$, $<$ et $\in$ d'arité 2, ils sont notés de manière infixe. La relation $x = y$ représente l'égalité des objets $x$ et $y$, $x < y$ représente le fait que $x$ est strictement plus petit que $y$ et la relation $v \in t$ représente le fait que la valeur $v$ apparaît dans un des nœuds de l'arbre $t$.

1. Dire si les arbres suivants sont bien des arbres binaires de recherche sur les entiers avec l'ordre standard.





Si c'est un arbre binaire de recherche, ecrire le terme de la logique correspondant. Sinon justifier pourquoi.

2. Ecrire en utilisant les prédicats de la signature une formule logique avec deux variables libres $t$ et $n$ qui exprime le fait que $n$ est la valeur maximum dans l'arbre $t$.
3. On suppose vérifiées les propriétés suivantes
   (a) $\forall x, \neg(x \in \texttt{nil})$
   (b) $\forall x\, l\, v\, r, (x \in \texttt{node}(l, v, r) \Leftrightarrow x \in l \vee x = v \vee x \in r)$
   (c) $\forall t_1\, t_2, \exists t, \forall x, (x \in t \Leftrightarrow x \in t_1 \wedge x \in t_2)$

   Expliquer chacune de ces propriétés en langage naturel, utiliser une phrase compréhensible (réponse en anglais acceptée).
4. On ajoute à la signature un prédicat unaire `abr`. On veut que $\texttt{abr}(t)$ représente la propriété que $t$ est un arbre binaire de recherche.

   En vous inspirant de la question précédente, proposer deux propriétés du prédicat `abr` (l'une dans le cas $t = \texttt{nil}$ et l'autre dans le cas $t = \texttt{node}(l, v, r)$) qui caractérisent le fait que l'arbre $t$ vérifie les propriétés des arbres binaires de recherche.
5. On ajoute à la signature une fonction binaire `union`. Ecrire une propriété qui spécifie que si $t$ et $u$ sont des arbres binaires de recherche alors $\texttt{union}(t, u)$ est un arbre binaire de recherche qui contient *exactement* les éléments de $t$ et les éléments de $u$.

**Exercice 8** *Ordres.* Une relation binaire est :
- *réflexive* si tout objet $a$ et $b$ qui sont égaux sont en relation
- *transitive* si lorsque $a$ est en relation avec $b$ et $b$ en relation avec $c$ alors $a$ est aussi en relation avec $c$
- *symétrique* si lorsque $a$ est en relation avec $b$ alors $b$ est en relation avec $a$
- *anti-symétrique* si lorsque $a$ est en relation avec $b$ et $b$ est en relation avec $a$ alors $a$ et $b$ sont égaux.

Un *ordre* est une relation réflexive, transitive et anti-symétrique. L'égalité est une relation d'équivalence, c'est-à-dire une relation reflexive, transitive et symétrique.

Pour raisonner sur les ordres, on introduit une signature avec seulement deux symboles de relations binaires $R$ pour représenter la relation d'ordre et $E$ pour représenter l'égalité. On notera de manière usuelle $t = u$ la formule atomique $E(t, u)$ qui dit que les termes $t$ et $u$ sont égaux.

1. Ecrire dans le calcul des prédicats les formules qui disent que $R$ est une relation d'ordre et que l'égalité est une relation d'équivalence.
2. On se donne un domaine $\mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b, c\}$ à trois éléments, proposer une interprétation des relations $R$ et $E$ sur ce domaine qui rendent vraies les formules précédentes.
3. Donner deux interprétations différentes pour le symbole $R$ sur le domaine $\mathbb{N}$ qui rendent vraies les formules précédentes.
4. Donner des interprétations pour la relation $R$ qui vérifient seulement deux des trois conditions pour être un ordre mais pas la troisième.
5. Exprimer par une formule le fait qu'il existe un élément maximum, c'est-à-dire qui est meilleur que tous les autres (en lisant la relation $R(t, u)$ comme "$u$ est meilleur que $t$").

   Dire si les interprétations que vous avez introduites aux questions 3 et 2 vérifient ou non cette propriété.