Feuille 3 - Modèles et Calcul Propositionnel

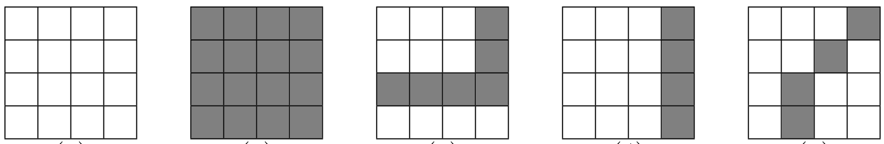
Exercice 1 Pour connaître la valeur de vérité d'une formule du calcul des prédicats, il faut choisir un domaine et fixer une interprétation dans ce domaine des symboles de fonction et de prédicats du langage.

On considère un langage avec juste un symbole de prédicat binaire P.

On choisit une interprétation sur un domaine avec 4 éléments $\{1,2,3,4\}$. On représente l'interprétation de P par un tableau 4×4. La formule atomique $P(t,u)$ aura la valeur vraie si t a la valeur i et u a la valeur j et que la case sur la ligne i et la colonne j est noir.

1. Soit les 4 formules
   (a) $\forall x\, y, P(x,y)$
   (b) $\exists x\, y, P(x,y)$
   (c) $\exists x, \forall y, P(x,y)$
   (d) $\exists y, \forall x, P(x,y)$
   (e) $\forall x, \exists y, P(x,y)$
   (f) $\forall y, \exists x, P(x,y)$

   Dire si ces formules sont ou non vraies dans chacune des interprétations de P suivantes :



(1) (2) (3) (4) (5)

2. Expliquer pour chaque formule comment on reconnait sur le tableau si la formule est vraie ou non dans l'interprétation correspondante.

Exercice 2 Donner tous les modèles des ensembles de formules ci-dessous et dire s'ils sont valides, satisfiables ou insatisfiables.

1. $\{p \lor q \lor \neg r, \neg p \lor q \lor \neg r, p \lor \neg q \lor r\}$
2. $\{p \Rightarrow q \Rightarrow p, r \Rightarrow (r \Rightarrow \bot) \Rightarrow p, (p \Rightarrow q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow p \Rightarrow r\}$
3. $\{p \Rightarrow q, (p \Rightarrow \neg q \Rightarrow r) \Rightarrow r, \neg r\}$

Exercice 3 *Récurrence sur les formules.*

1. On considère la fonction `simpl` définie par les équations suivantes dans lesquelles a est une variable propositionnelle choisie arbitrairement :

$\mathtt{simpl}(\top)$	$= a \lor \neg a$	$\mathtt{simpl}(P \land Q)$	$= \neg(\neg\mathtt{simpl}(P) \lor \neg\mathtt{simpl}(Q))$
$\mathtt{simpl}(\bot)$	$= \neg(a \lor \neg a)$	$\mathtt{simpl}(P \lor Q)$	$= \mathtt{simpl}(P) \lor \mathtt{simpl}(Q)$
$\mathtt{simpl}(p)$	$= p$ $\quad p$ variable propositionnelle	$\mathtt{simpl}(P \Rightarrow Q)$	$= \neg\mathtt{simpl}(P) \lor \mathtt{simpl}(Q)$
$\mathtt{simpl}(\neg P)$	$= \neg(\mathtt{simpl}(P))$		

   — Donner la formule résultat de $\mathtt{simpl}(x \land y \Rightarrow z)$.
   — Que fait la fonction `simpl` en général (comment $\mathtt{simpl}(P)$ est relié à P et quelles sont ses propriétés syntaxiques) ?

2. Donner les équations récursives qui définissent une fonction `ht` qui mesure la hauteur d'une formule (nombre maximal de connecteurs emboités)

$$\begin{array}{lll} \mathtt{ht}(P) & = \dots & \mathtt{si}\ P\ \mathtt{atomique} \\ \mathtt{ht}(\neg P) & = \dots. & \\ \mathtt{ht}(P \circ Q) & = \dots\dots & \circ \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow\} \end{array}$$

3. Démontrer par récurrence sur la hauteur d'une formule P que pour toute formule P, `simpl`(P) ne contient pas le symbole $\Rightarrow$.
4. Pour prouver qu'une propriété $\phi(P)$ est vérifiée pour toutes les formules propositionnelles P, on peut raisonner par récurrence **structurelle** sur les formules, suivant le principe :
   - Si on peut montrer que :
     (a) $\phi(P)$ est vérifiée lorsque P est une formule atomique en particulier $\phi(\top)$ et $\phi(\bot)$;
     (b) pour une formule propositionnelle A quelconque, en supposant que $\phi(A)$ est vérifiée, on peut montrer $\phi(\neg A)$
     (c) pour des formules propositionnelles A et B quelconques, en supposant que $\phi(A)$ et $\phi(B)$ sont vérifiées, on peut montrer $\phi(A \wedge B)$ ainsi que $\phi(A \vee B)$ et $\phi(A \Rightarrow B)$
   - Alors on peut en déduire que pour tout $P \in \textsc{Prop}$, $\phi(P)$ est vérifiée.

   Utiliser ce schéma pour montrer la propriété attendue de `simpl`(P).
5. (optionnel) Justifier la correction de ce schéma de preuve en le ramenant à une récurrence sur les entiers.
   - On suppose que les conditions (1) à (3) du principe de récurrence sur les formules sont satisfaites par la propriété ϕ. Montrer par récurrence sur n que pour toute formule P telle que $\mathtt{ht}(P) \leq n$, on a $\phi(P)$ est vérifiée.
   - En déduire que $\phi(P)$ est vérifiée pour toutes les formules P.

Exercice 4 *Structure arborescente des formules, définition récursive.*
Soit la formule A définie comme $\neg P \Rightarrow Q \vee \neg(P \vee R)$.

1. Parenthéser la formule A en préservant le sens
2. Donner la forme arborescente de cette formule.
3. Pour quelles valeurs de P, Q et R, la formule A est-elle vraie ? (on essaiera de répondre sans construire l'ensemble de la table de vérité).
4. Donner une formule équivalente à $\neg(P \Rightarrow Q)$ qui n'utilise que la conjonction et la négation.
5. On souhaite écrire une fonction qui pour toute formule propositionnelle P calcule une nouvelle formule `neg`(P) qui est logiquement équivalente à $\neg P$ mais qui au lieu d'ajouter un symbole de négation en tête de la formule, effectue de possibles simplifications et n'ajoute éventuellement un nouveau symbole de négation qu'au niveau d'une formule atomique. Pour cela on utilisera les propriétés suivantes :

$$\neg\bot \Leftrightarrow \top \qquad \neg\neg A \Leftrightarrow A \qquad \neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \qquad \neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$$

   (a) Calculer la valeur attendue pour `neg`(A). Pour quelle valeur de P, Q et R cette formule est-elle vraie ?
   (b) Donner les équations récursives qui définissent `neg`(P)
   (c) Montrer par récurrence structurelle sur la formule P que `neg`(P) est logiquement équivalent à $\neg P$.

Exercice 5 *Sous-formules.* On dit qu'une formule Q est une sous-formule de P si $Q = P$ ou bien si la formule Q apparait sous un connecteur de P. C'est-à-dire $P = \neg P'$ et Q est une sous-formule de P' ou bien $P = P_1 \circ P_2$ et Q est une sous-formule de P_1 ou bien une sous-formule de P_2 avec $\circ$ un des 4 connecteurs binaires : $\{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$.

1. Donner toutes les sous-formules de la formule $\neg(p \vee (q \wedge r)) \Rightarrow (p \wedge q)$
2. Donner les équations qui définissent la fonction `sf` dans $\textsc{Prop} \rightarrow \wp(\textsc{Prop})$ qui à une formule propositionnelle P associe l'ensemble de ses sous-formules.
3. Trouver un majorant du nombre de sous-formules d'une formule P qui utilise n connecteurs logiques. Donner un exemple où ce majorant est atteint. Prouver ce résultat par récurrence structurelle sur la formule.

4. (optionnel) Même question pour un minorant du nombre de sous-formules.

Exercice 6 *Vérités et mensonges (modélisation propositionnelle).*

Un île est habitée par deux catégories de personnes : les purs et les pires. Les purs disent toujours la vérité alors que les pires mentent toujours.

On introduit des variables propositionnelles pour chaque habitant x de l'Ile $\mathtt{pur}_x$ telles que $\mathtt{pur}_x$ est vrai si x est pur et faux si x est pire.

Pour toute formule propositionnelle P, et tout habitant x, on introduit une variable propositionnelle $\mathtt{dit}_{x,P}$, telle que $\mathtt{dit}_{x,P}$ représente le fait que x affirme la formule P. Il y a a priori un nombre infini de variables propositionnelles mais dans les questions posées, on en utilisera qu'un nombre fini.

1. Donner des formules qui représentent le fait que un habitant pur x dit la vérité et qu'un habitant pire ment.
2. Montrez que si `a` et `b` sont deux habitants de l'île et que `a` dit que `b` est pire, alors au moins l'un des deux est pire.
3. Montrez que si `a` dit que `a` et `b` sont tous les deux pires, alors `a` est pire.
4. Montrez que si `a` dit `Faux` alors c'est un pire.
5. Un habitant peut-il dire qu'il est lui-même un pire ?

Exercice 7 *Transformation de formules (partiel 2012)*

On dira qu'une formule est en forme **minimale** si elle n'utilise que le connecteur $\Rightarrow$, et comme formule atomique $\perp$ et les variables propositionnelles. Le but de l'exercice est de montrer que toute formule propositionnelle admet une forme minimale équivalente.

1. Montrer que les formules $p \Rightarrow \perp$ et $\neg p$ sont logiquement équivalentes.
2. Sachant que les formules $p \Rightarrow q$ et $\neg p \vee q$ sont logiquement équivalentes, donner une formule équivalente à $p \vee q$ en forme minimale.
3. (a) Donner la table de vérité de $(p \Rightarrow (q \Rightarrow \perp)) \Rightarrow \perp$.
   (b) Comparer cette table et celle de $p \wedge q$.
   (c) En déduire une formule équivalente à $\neg p \wedge q$ qui soit en forme minimale.
4. Déduire des questions précédentes une fonction `min` qui transforme toute formule propositionnelle P (sans oublier $\top$) en une formule équivalente en forme minimale.