

Feuille 6 - Calcul des Prédicats : Syntaxe & Sémantique

Exercice 1 Soient p et q deux symboles de prédicat binaire, r un symbole de prédicat unaire, f un symbole de fonction unaire, a un symbole de fonction 0-aire (ou constante) et g un symbole de fonction ternaire. Soit les formules du calcul des prédicats suivantes :

$$\begin{aligned} F &= (\exists x, p(x, f(y))) \vee \neg \forall y, q(y, g(a, z, f(z))) \\ G &= r(x) \vee ((\exists x, \forall y, p(f(x), z)) \wedge r(a)) \wedge \forall x, q(y, g(x, z, x)) \end{aligned}$$

1. Représenter chaque formule sous forme d'arbre dont les feuilles sont les formules atomiques.
2. Pour chaque occurrence de variable, dire si elle est libre ou liée et dans le cas où elle est liée, indiquer le quantificateur correspondant.
3. Donner les formules atomiques qui apparaissent dans chaque formule.
4. Donner tous les termes (en ignorant les sous-termes) qui apparaissent dans chaque formule.
5. Donner le résultat de la substitution dans chaque formule de la variable y par le terme $f(a)$ et de la variable z par le terme $f(x)$.

Exercice 2 On considère un langage avec des symboles de fonctions $\mathbf{f}$ binaire, $\mathbf{g}$ unaire et une constante $\mathbf{a}$ ainsi qu'un symbole de prédicat $\mathbf{R}$ binaire.

Donner les équations récursives qui définissent une fonction $\mathbf{xin}$ qui étant donnée une formule P du calcul des prédicats sur le langage précédent, et une variable x , renvoie vrai si la variable x est libre dans la formule P et faux sinon.

Exercice 3 Soit p un symbole de prédicat binaire, r un symbole de prédicat ternaire, a et b deux constantes, et w, x, y et z quatre symboles de variable.

1. On considère l'atome $F = p(x, y)$ et les substitutions $\sigma_1 = \{x \leftarrow f(a)\}$ et $\sigma_2 = \{y \leftarrow f(x)\}$. Calculer $\sigma_1 \circ \sigma_2$, $\sigma_2 \circ \sigma_1$, $F[\sigma_1]$, $F[\sigma_2]$, $F[\sigma_1 \circ \sigma_2]$ et $F[\sigma_2 \circ \sigma_1]$. Comparer $F[\sigma_2 \circ \sigma_1]$ et $(F[\sigma_1])[\sigma_2]$. Comparer $F[\sigma_1 \circ \sigma_2]$ et $F[\sigma_2 \circ \sigma_1]$.
2. Soit $\sigma_1 = \{x \leftarrow y\}$ et $\sigma_2 = \{y \leftarrow x\}$, calculer $\sigma_1 \circ \sigma_2$.

Exercice 4 On considère une signature avec a et f deux symboles de constante, J et G deux symboles de prédicats binaires. On interprète ces objets de la manière suivante :

- a est l'équipe d'Allemagne et f est l'équipe de France ;
- $J(x, y)$ représente le fait que x a joué un match contre y et $G(x, y)$ le fait que x a gagné un match contre y .

1. Exprimer par des formules du calcul des prédicats les faits suivants :
 - (a) L'Equipe de France a gagné un match et en a perdu un
 - (b) L'Equipe de France et l'équipe d'Allemagne ont fait match nul (aucun des deux n'a gagné)
 - (c) Une équipe a gagné tous ses matchs
 - (d) Aucune équipe n'a perdu tous ses matchs
2. On considère la phrase suivante : "tous ceux qui ont joué contre une équipe qui a gagné tous ses matchs ont gagné au moins un match". Parmi les formules suivantes, dire lesquelles expriment la phrase ci-dessus et lesquelles sont équivalentes.
 - (a) $\forall x, \exists y, (J(x, y) \wedge \forall z, (J(y, z) \Rightarrow G(y, z)) \Rightarrow \exists v, G(x, v))$

- (b) $\forall x, (\exists y, (J(x, y) \wedge \forall z, (J(y, z) \Rightarrow G(y, z)))) \Rightarrow \exists v, G(x, v)$
 (c) $\exists x, ((\forall y, (J(x, y) \Rightarrow G(x, y))) \Rightarrow \forall z, (J(x, z) \Rightarrow \exists v, G(x, v)))$
 (d) $\forall x, \forall y, (J(x, y) \wedge \forall z, (J(y, z) \Rightarrow G(y, z)) \Rightarrow \exists v, G(x, v))$
 (e) $\forall x, (\forall y, J(x, y) \wedge \forall z, (J(y, z) \Rightarrow G(y, z))) \Rightarrow \exists v, G(x, v)$
3. On se donne le tableau de matchs suivant dans lequel on a des équipes a, b, c, d, e et f . Pour garder le score d'un match entre les équipes x et y on commence par ordonner les deux équipes (par exemple $x < y$) puis on inscrit le résultat sur la ligne x et la colonne y (le tableau n'est donc rempli que dans sa partie supérieure). Le résultat est le nombre 1 si x a gagné contre y , -1 si x a perdu contre y (et donc y a gagné contre x) et 0 si il y a eu match nul entre les deux équipes. Tous les matchs joués apparaissent au tableau.

	b	c	d	e	f
a	-1		-1	-1	0
b		-1		1	
c			1	1	
d				-1	
e					-1

Ce tableau nous permet d'interpréter les relations G et J sur le domaines $D \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b, c, d, e, f\}$. On appelle I cette interprétation et on cherche à connaître la valeur de vérité des formules dans cette interprétation.

- (a) Comment voit-on dans le tableau si $G(t, u)$ est vrai ?
 (b) Donner l'ensemble des couples qui appartiennent à la relation G dans l'interprétation I .
 (c) Comment voit-on dans le tableau qu'une équipe a gagné tous ses matchs ? n'en a perdu aucun ?
 (d) Pour quelles valeurs de y la formule $\forall z, (J(y, z) \Rightarrow G(y, z))$ est-elle vraie dans l'interprétation I ?
 (e) Dire pour les formules de la question 2 si elles sont ou non vraies dans l'interprétation I .

Exercice 5 Ordres. Une relation binaire est :

- *réflexive* si tout objet a et b qui sont égaux sont en relation
- *transitive* si lorsque a est en relation avec b et b en relation avec c alors a est aussi en relation avec c
- *symétrique* si lorsque a est en relation avec b alors b est en relation avec a
- *anti-symétrique* si lorsque a est en relation avec b et b est en relation avec a alors a et b sont égaux.

Un *ordre* est une relation réflexive, transitive et anti-symétrique. L'égalité est une relation d'équivalence, c'est-à-dire une relation réflexive, transitive et symétrique.

Pour raisonner sur les ordres, on introduit une signature avec seulement deux symboles de relations binaires R pour représenter la relation d'ordre et E pour représenter l'égalité. On notera de manière usuelle $t = u$ la formule atomique $E(t, u)$ qui dit que les termes t et u sont égaux.

1. Ecrire dans le calcul des prédicats les formules qui disent que R est une relation d'ordre et que l'égalité est une relation d'équivalence.
2. On se donne un domaine $\mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b, c\}$ à trois éléments, proposer une interprétation des relations R et E sur ce domaine qui rendent vraies les formules précédentes.
3. Donner deux interprétations différentes pour le symbole R sur le domaine $\mathbb{N}$ qui rendent vraies les formules précédentes.
4. Donner des interprétations pour la relation R qui vérifient seulement deux des trois conditions pour être un ordre mais pas la troisième.
5. Exprimer par une formule le fait qu'il existe un élément maximum, c'est-à-dire qui est meilleur que tous les autres (en lisant la relation $R(t, u)$ comme " u est meilleur que t ").
 Dire si les interprétations que vous avez introduites aux questions 3 et 2 vérifient ou non cette propriété.

Exercice 6 Théorie pour représenter des piles.

On cherche à modéliser la notion informatique de pile. Une pile est une structure sur laquelle on peut poser des objets et si la pile n'est pas vide, on peut prendre un objet sur la pile (le dernier que l'on a déposé) et récupérer la pile sans son premier élément.

On manipule deux catégories de termes, ceux qui représentent des piles et ceux qui représentent les objets que l'on met sur la pile. Dans la signature, on suppose que l'on a deux prédicats unaires **pile** et **obj** pour représenter les deux classes de termes et on suppose également que l'on a un prédicat binaire pour l'égalité, noté de manière usuelle $=$.

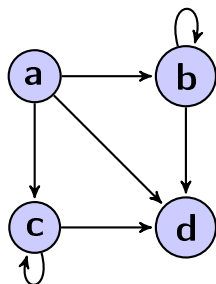
1. Compléter la signature par des symboles de fonctions et éventuellement d'autres prédicats pour pouvoir exprimer les opérations sur les piles et les propriétés associées.
2. Ecrire les formules qui précisent la nature des termes que les fonctions manipulent.
3. Ecrire la formule qui spécifie que l'objet obtenu par dépilement est le dernier qui avait été déposé sur la pile.
4. Proposer une interprétation des formules précédentes sur le domaine des entiers, en supposant que les objets que l'on veut empiler sont des entiers compris entre 1 et 99.

Exercice 7 *Modèles de relation, examen session 2 2014-15*

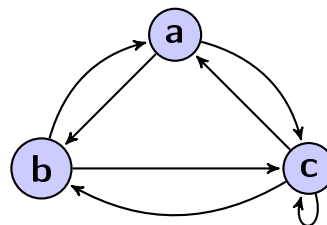
On se place dans un langage avec un symbole de prédicat binaire R . Soient les quatre formules de la logique du premier ordre suivantes :

- $F_1 : \forall x, ((\exists y, \neg R(x, y)) \Rightarrow \exists y, (R(x, y) \wedge R(y, x)))$
- $F_2 : \forall x, \exists y, (R(x, y) \vee R(y, x))$
- $F_3 : \forall x y z, ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$
- $F_4 : \exists x, R(x, x)$

1. On se donne des interprétations de la relation R sous forme de graphes. Le domaine est l'ensemble des sommets du graphe et on a une arête du sommet x au sommet y exactement lorsque la relation $R(x, y)$ est vérifiée dans l'interprétation. Dans chacune des deux interprétations suivantes :
 - (a) donner la liste des couples (x, y) tels que $R(x, y)$ est vraie dans l'interprétation ;
 - (b) dire lesquelles des formules F_1, F_2, F_3, F_4 précédentes sont vraies et lesquelles sont fausses. Justifier votre réponse.



modèle (A)



modèle (B)

2. Montrez que
 - (a) la formule F_2 est conséquence logique de la formule F_1 ;
 - (b) la formule F_4 est conséquence des deux formules F_1 et F_3 .
3. A l'aide d'une variante du modèle A, montrer que F_4 n'est pas conséquence logique de F_2 et F_3 .