Licence Informatique, semestre 5 — 2015–16
Eléments de logique pour l'informatique (Info 315) — 28 octobre 2015
`http://www.lri.fr/~paulin/Logique`

Partiel - 26 octobre 2015

L'examen dure 2 heures. L'énoncé est composé de 5 pages, le barème est indicatif. Toutes les réponses devront être clairement justifiées. Le seul document autorisé est une page A4 manuscripte recto-verso. Le tableau résumant les règles du système G est donné à la fin du sujet.
Inscrivez votre nom sur chaque copie et numérotez-les. **Ne pas cacheter les copies !**

Exercice 1 *Question de cours (2 points)*

1. On suppose que l'on a quatre variables propositionnelles.
   (a) Quel est le nombre d'interprétations possibles sur cet ensemble ?
   (b) Quel est le nombre de tables de vérité différentes sur cet ensemble ?
   (c) Combien peut-on trouver de formules logiques utilisant ces quatre variables qui ne soient pas équivalentes deux à deux ?
2. Si on sait que la formule A est valide, que peut-on dire de la formule $\neg A$?

Correction :

1. (a) Chaque variable propositionnelle peut prendre 2 valeurs donc il y a $2^4 = 16$ interprétations possibles.
   (b) Une table de vérité donne une valeur vrai ou faux pour chacune des interprétations il y en a donc 2^{16}.
   (c) Deux formules logiques sont équivalentes si et seulement si elles ont la même table de vérité, il y a donc 2^{16} formules logiques utilisant ces quatre variables qui ne sont pas équivalentes entre elles.

2. Si A est valide alors $\neg A$ est insatisfiable.

Exercice 2 *Enigme (2 points)*

Un voyageur perdu dans le désert arrive à une bifurcation à partir de laquelle sa piste se sépare en deux. Chaque piste peut soit mener à une oasis, soit se perdre dans un désert profond. Chaque piste est gardée par un sphinx. Les données du problème sont les suivantes :

A. le sphinx de droite dit : “ Une au moins des 2 pistes conduit à une oasis ”
B. le sphinx de gauche dit : “ La piste de droite se perd dans le désert ”
C. soit les deux sphinx disent la vérité, soit ils mentent tous les deux

Le voyageur aimerait bien savoir s'il y a une oasis au bout d'un des deux chemins et si oui quelle direction prendre.

Questions.

1. Introduire deux variables propositionnelles pour modéliser le problème (expliciter ce qu'elles représentent) et traduire les trois données en formules propositionnelles ;
2. Par la méthode de votre choix, résoudre l'énigme en justifiant votre réponse.

Correction : *On introduit deux variables propositionnelles qui représentent le fait qu'il y a une oasis à gauche (variable g), et à droite (variable d).*

1. Les données se traduisent par les formules propositionnelles suivantes :
   a) $g \vee d$
   b) $\neg d$
   c) $(g \vee d) \Leftrightarrow \neg d$

2. *On regarde les interprétations dans lesquelles la troisième formule est vraie*

g	d	$g \vee d$	$\neg d$	$(g \vee d) \Leftrightarrow \neg d$
V	V	V	F	F
V	F	V	V	V
F	V	V	F	F
F	F	F	V	F

La seule situation possible est que l'oasis est au bout de la route de gauche.

Exercice 3 *Modélisation (3 points)*

On se place sur un langage avec une constante `moi` (la personne qui parle-"je"), une relation unaire et trois relations binaires :

— $\texttt{triste}(x)$: x est triste (peut s'appliquer à des personnes, des pensées ou des choses dites)
— $\texttt{pense}(x, y)$: la personne x pense "y" (on peut penser à une personne ou bien à quelque chose)
— $\texttt{dit}(x, y)$: la personne x dit "y"
— $x = y$ si x et y sont égaux

1. Traduire en français les formules suivantes :
   (a) $\forall x, \texttt{pense}(x, \texttt{moi}) \Rightarrow \texttt{pense}(\texttt{moi}, x)$
   (b) $\forall x, \texttt{pense}(\texttt{moi}, x) \wedge \texttt{triste}(x) \Rightarrow \neg \texttt{dit}(\texttt{moi}, x)$
   (c) $\forall x, \exists y, \texttt{pense}(x, y) \wedge \neg \texttt{dit}(x, y)$
   (d) $\exists y, \forall x, \texttt{pense}(x, y) \wedge \neg \texttt{dit}(x, y)$

   Correction :
   (a) je pense à tous ceux qui pensent à moi
   (b) je ne dis pas les choses tristes auxquelles je pense
   (c) tout le monde a quelque chose qu'il pense mais qu'il ne dit pas
   (d) il existe une chose que tout le monde pense mais que personne ne dit

2. Donner les formules logiques qui correspondent aux énoncés suivants :
   (a) Je ne dis jamais ce que je pense.
   (b) Lorsque toutes mes pensées sont tristes, je me tais.
   (c) Je ne dis jamais rien de triste, sauf si je le pense.
   (d) Je ne peux pas penser à deux choses à la fois.

   Correction :
   (a) $\forall x, \texttt{pense}(\texttt{moi}, x) \Rightarrow \neg \texttt{dit}(\texttt{moi}, x)$
   (b) $(\forall x, \texttt{pense}(\texttt{moi}, x) \Rightarrow \texttt{triste}(x)) \Rightarrow \forall x, \neg \texttt{dit}(\texttt{moi}, x)$
   (c) $\forall x, \texttt{dit}(\texttt{moi}, x) \wedge \texttt{triste}(x) \Rightarrow \texttt{pense}(\texttt{moi}, x)$
   (d) $\forall x\, y, \texttt{pense}(\texttt{moi}, x) \wedge \texttt{pense}(\texttt{moi}, y) \Rightarrow x = y$

Exercice 4 *Logique propositionnelle (13 points)*

Les questions couvrent plusieurs aspects du programme et sont largement indépendantes.

On s'intéresse ici à des formules qui contiennent le connecteur "ou exclusif" $p \oplus q$. On rappelle que le ou exclusif est défini à partir des connecteurs $\wedge, \vee$ et $\neg$ par la formule $p \oplus q \stackrel{\text{def}}{=} (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$. Dans la suite x, y et z désignent trois variables propositionnelles.

1. Donner la table de vérité de la formule $x \oplus y$.

   Correction :

x	y	$x \oplus y$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

2. Donner une définition alternative de $x \oplus y$ qui n'utilise que les connecteurs $\Leftrightarrow$ et $\neg$.
   Correction : $x \oplus y \equiv \neg(x \Leftrightarrow y) \equiv x \Leftrightarrow \neg y$

3. Donner les formes normales conjonctive et disjonctive de la formule $((x \oplus y) \oplus z)$.
   Correction : *A partir de la table de vérité*

x	y	z	$(x \oplus y)$	$x \oplus y \oplus z$
V	V	V	F	V
V	V	F	F	F
V	F	V	V	F
V	F	F	V	V
F	V	V	V	F
F	V	F	V	V
F	F	V	F	V
F	F	F	F	F

   on calcule la forme normale disjonctive.

$$(x \oplus y) \oplus z \equiv (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z)$$

   et la forme normale conjonctive

$$(x \oplus y) \oplus z \equiv (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (x \vee y \vee z)$$

4. En utilisant les propriétés d'équivalence des opérateurs $\wedge$ et $\vee$, justifier que l'opérateur $\oplus$ est associatif et commutatif.
   Correction : *On a* $p \oplus q \stackrel{\text{def}}{=} (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ *et* $q \oplus p \stackrel{\text{def}}{=} (q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge p)$. *Les opérateurs* $\wedge$ *et* $\vee$ *sont commutatifs, on en déduit que* $p \oplus q \equiv q \oplus p$.
   Pour l'associativité, on peut utiliser la forme normale disjonctive calculée précédemment pour les formules $(x \oplus y) \oplus z$ *et* $(y \oplus z) \oplus x$ *et on constate que ce sont les mêmes en utilisant les propriétés de commutativité de* $\vee$ *et* $\wedge$.

5. Soit n variables propositionnelles $x_1, \ldots, x_n$, on considère la formule $O_n \stackrel{\text{def}}{=} x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$. Montrer par récurrence sur n que la formule O_n est vraie dans une interprétation I si et seulement si le nombre de variables x_i telles que $1 \leq i \leq n$ et $I(x_i) = V$ est impair.
   Correction : *On commence au cas* $n = 1$. *On a* $O_1 = x_1$ *qui est vrai si et seulement si* $I(x_1)$ *est vrai et donc si le nombre de variables* x_i *avec* $1 \leq i \leq 1$ *et* $I(x_i) = V$ *est impair.*
   Pour l'hérédité, on introduit n quelconque. On suppose que la formule O_n *est vraie dans une interprétation* I *si et seulement si le nombre de variables* x_i *telles que* $1 \leq i \leq n$ *et* $I(x_i) = V$ *est impair. La formule* 0_{n+1} *est équivalente à* $O_n \oplus x_{n+1}$. *D'après la table de vérité de* $\oplus$, *la formule* 0_{n+1} *est vraie dans une interprétation* I *si et seulement si* O_n *est vraie et* $I(x_{n+1})$ *est faux ou bien* O_n *est faux et* $I(x_{n+1})$ *est vrai. C'est-à-dire (en utilisant l'hypothèse de récurrence sur* O_n*) si et seulement si le nombre de variables* x_i *telles que* $1 \leq i \leq n$ *et* $I(x_i) = V$ *est impair et* $I(x_{n+1})$ *est faux ou bien si le nombre de variables* x_i *telles que* $1 \leq i \leq n$ *et* $I(x_i) = V$ *est pair et* $I(x_{n+1})$ *est vrai . C'est-à-dire si et seulement si le nombre de variables* x_i *telles que* $1 \leq i \leq n+1$ *et* $I(x_i) = V$ *est impair.*

6. On considère maintenant des séquents avec des formules contenant le ou exclusif. Soit les deux règles dans lesquelles Γ et Δ sont des ensembles de formules et p et q sont des formules :

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, p, q \qquad \Gamma, p, q \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, p \oplus q} \oplus d \qquad\qquad \frac{\Gamma, p \vdash \Delta, q \qquad \Gamma, q \vdash \Delta, p}{\Gamma, p \oplus q \vdash \Delta} \oplus g$$

   (a) Montrer que ces deux règles sont correctes (si une interprétation satisfait les deux prémisses alors elle satisfait la conclusion de la règle).
   (b) Montrer qu'elles sont inversibles (si une interprétation satisfait la conclusion de la règle alors elle satisfait les deux prémisses).
   (c) Construire en utilisant les règles du système G ainsi que les règles pour l'opérateur $\oplus$ données ci-dessus des arbres de preuve pour les séquents suivants :

i. $x \oplus (y \wedge z) \vdash (x \oplus y) \wedge (x \oplus z)$

ii. $(x \oplus y) \wedge (x \oplus z) \vdash x \oplus (y \wedge z)$

Dire si ces séquents sont valides et justifier votre réponse.

(d) Les formules $(x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$ et $x \wedge (y \oplus z)$ sont-elles équivalentes ? Justifier la réponse par la méthode de votre choix (table de vérité, preuves ou équivalence).

Correction :

(a) On fait les tables de vérité pour les séquents

Γ	Δ	p	q	$\Gamma \vdash \Delta, p, q$	$\Gamma, p, q \vdash \Delta$	$\Gamma \vdash \Delta, p \oplus q$
F				V	V	V
V	V			V	V	V
V	F	V	V	V	F	F
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F

Γ	Δ	p	q	$\Gamma, p \vdash \Delta, q$	$\Gamma, q \vdash \Delta, p$	$\Gamma, p \oplus q \vdash \Delta$
F				V	V	V
V	V			V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	F
V	F	F	V	V	F	F
V	F	F	F	V	V	V

On constate que le séquent conclusion est vrai exactement lorsque les deux prémisses sont vraies. On en déduit que les deux règles sont correctes et inversibles.

(b) (cf ci-dessus)

(c)

$$(\wedge d)\;\dfrac{(\oplus d)\;\dfrac{(\oplus g)\;\dfrac{\text{HYP}\;\dfrac{}{x \vdash x, y, (y \wedge z)} \quad (\wedge g)\;\dfrac{\text{HYP}\;\dfrac{}{y, z \vdash x, y}}{y \wedge z \vdash x, y}}{x \oplus (y \wedge z) \vdash x, y} \quad (\oplus g)\;\dfrac{(\wedge d)\;\dfrac{\text{HYP}\;\dfrac{}{x, y \vdash y} \quad {\color{red} x, y \vdash z}}{x, y \vdash y \wedge z} \quad \text{HYP}\;\dfrac{}{(y \wedge z), x, y \vdash x}}{x \oplus (y \wedge z), x, y \vdash}}{x \oplus (y \wedge z) \vdash x \oplus y} \quad (P)\;\dfrac{\vdots}{x \oplus (y \wedge z) \vdash x \oplus z}}{x \oplus (y \wedge z) \vdash (x \oplus y) \wedge (x \oplus z)}$$

On peut développer de la même manière l'arbre dont la conséquence est $x \oplus (y \wedge z) \vdash x \oplus z$.

$$(\oplus d)\;\dfrac{(\oplus g)\;\dfrac{\text{HYP}\;\dfrac{}{x \vdash x, z, (y \wedge z)} \quad (\wedge g)\;\dfrac{\text{HYP}\;\dfrac{}{y, z \vdash x, z}}{y \wedge z \vdash x, z}}{x \oplus (y \wedge z) \vdash x, z} \quad (\oplus g)\;\dfrac{(\wedge d)\;\dfrac{{\color{red} x, z \vdash y} \quad \text{HYP}\;\dfrac{}{x, z \vdash z}}{x, z \vdash y \wedge z} \quad \text{HYP}\;\dfrac{}{(y \wedge z), x, z \vdash x}}{x \oplus (y \wedge z), x, z \vdash}}{x \oplus (y \wedge z) \vdash x \oplus z}$$

On constate que l'on a deux feuilles $x, y \vdash z$ (resp. $x, z \vdash y$) qui ne sont pas des axiomes. Elles correspondent aux interprétations qui rendent vrais x et y (resp. z) et faux z (resp. y). On remarque que dans ces deux interprétations la formule $x \oplus (y \wedge z)$ est vraie alors que $(x \oplus y) \wedge (x \oplus z)$ est fausse et donc le séquent $x \oplus (y \wedge z) \vdash (x \oplus y) \wedge (x \oplus z)$ est faux.
Pour le second séquent :

$$(\wedge g)\;\dfrac{(\oplus d)\;\dfrac{(\oplus g)\;\dfrac{\text{HYP}\;\dfrac{}{x, x \oplus z \vdash x, y \wedge z, y} \quad (\oplus g)\;\dfrac{\text{HYP}\;\dfrac{}{y, x \vdash x, y \wedge z, z} \quad (\wedge d)\;\dfrac{\text{HYP}\;\dfrac{}{y, z \vdash x, y} \quad \text{HYP}\;\dfrac{}{y, z \vdash x, z}}{y, z \vdash x, (y \wedge z)}}{y, x \oplus z \vdash x, (y \wedge z)}}{x \oplus y, x \oplus z \vdash x, y \wedge z} \quad (\wedge g)\;\dfrac{(\oplus g)\;\dfrac{\text{HYP}\;\dfrac{}{x \oplus z, x, y, z \vdash y} \quad \text{HYP}\;\dfrac{}{x \oplus z, x, y, z \vdash x}}{x \oplus y, x \oplus z, x, y, z \vdash}}{x \oplus y, x \oplus z, x, y \wedge z \vdash}}{x \oplus y, x \oplus z \vdash x \oplus (y \wedge z)}}{(x \oplus y) \wedge (x \oplus z) \vdash x \oplus (y \wedge z)}$$

Toutes les feuilles sont des hypothèses et donc le séquent est valide.

(d) *La formule $x \wedge (y \oplus z)$ est vraie si et seulement si x est vrai et exactement l'un de y ou z est vrai. Dans ce cas l'un exactement de $(x \wedge y)$ et $(x \wedge z)$ est vrai, ce qui est équivalent à dire que $(x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$ est vraie.*

On en déduit que les deux formules $x \wedge (y \oplus z)$ et $(x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$ sont équivalentes.

7. On cherche maintenant à transformer une formule utilisant les connecteurs propositionnels "classiques" ($\{\bot, \top, \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow\}$), en une formule qui utilise uniquement les connecteurs dans l'ensemble $\{\top, \wedge, \oplus\}$.
   (a) En utilisant le résultat de la question 5 (qui peut être admis), dire pour quelles valeurs de x et de y les formules $x \oplus x$, $x \oplus \top$ et $x \oplus y \oplus (x \wedge y)$ sont vraies.
   (b) Décrire par des équations récursives une fonction `transf` qui étant donnée une formule du calcul propositionnel utilisant les connecteurs de l'ensemble $\{\bot, \top, \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow\}$, calcule une formule propositionnelle logiquement équivalente qui n'utilise que les connecteurs de l'ensemble $\{\top, \wedge, \oplus\}$.

Correction :

(a) *Dans l'expression $x \oplus x$ il est impossible d'avoir un nombre impair de facteurs vrais (il y en a 0 si x est faux et 2 si x est vrai, donc $x \oplus x \equiv \bot$.*

Dans l'expression $x \oplus \top$ pour avoir un nombre impair de facteurs vrais, il faut et il suffit que x soit faux et donc $x \oplus \top \equiv \neg x$.

Dans l'expression $x \oplus y \oplus (x \wedge y)$ pour avoir un nombre impair de facteurs vrais, il faut et il suffit que x soit vrai et y faux ou bien linverse y est vrai et x est faux : si l'une des deux est vrai et l'autre faux, un seul des trois membres est vrai, s'ils sont tous les deux vrais alors les trois membres sont vrais. $x \oplus y \oplus (x \wedge y) \equiv x \vee y$.

(b) *on a*

$$\begin{array}{llll}
\texttt{transf}(\top) & = \top & \texttt{transf}(\bot) & = x \oplus x \\
\texttt{transf}(x) & = x & \texttt{transf}(\neg p) & = \texttt{transf}(p) \oplus T \\
\texttt{transf}(p \vee q) & = \texttt{transf}(p) \oplus \texttt{transf}(q) \oplus (\texttt{transf}(p) \wedge \texttt{transf}(q)) & \texttt{transf}(p \wedge q) & = \texttt{transf}(p) \wedge \texttt{transf}(q) \\
\texttt{transf}(p \Rightarrow q) & = \texttt{transf}(p) \oplus T \oplus (\texttt{transf}(p) \wedge \texttt{transf}(q)) & &
\end{array}$$

Rappel des règles logiques du système G

hypothèse	(Hyp) $\dfrac{}{A, \Gamma \vdash \Delta, A}$	
	gauche	droite
$\bot$	$\dfrac{}{\bot, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \bot}$
$\top$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\top, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{}{\Gamma \vdash \Delta, \top}$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$
$\wedge$	$\dfrac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}$
$\vee$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \Rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}$