Licence Informatique, semestre 5 2017-18
Eléments de logique pour l'informatique (Info 315) 29 mai 2018
`http://www.lri.fr/~paulin/Logique`

Partiel - 27 octobre 2017

L'examen dure 2 heures. L'énoncé est composé de 5 pages, le barème est indicatif.
Toutes les réponses (sauf QCM) devront être clairement justifiées.
Le seul document autorisé est une page A4 manuscripte recto-verso. Le tableau résumant les règles du système G est donné à la fin du sujet.
Inscrivez votre nom sur chaque copie et numérotez-les. **Ne pas cacheter les copies !**
Correction : *Toutes les questions sont notées sur 5 points.*

Exercice 1 *QCM (4 points)*

Le nom et le numéro d'étudiant doivent être reportés sur l'énoncé du qcm que vous rendrez avec votre copie (utiliser un style bleu ou noir pour cocher les cases).

Exercice 2 *Enigme (4 points)*

Dans un hôpital psychiatrique les docteurs disent toujours la vérité, les patients qui sont malades mentent toujours et les infirmiers peuvent dire ce qu'ils veulent (mentir ou dire la vérité). Toutes ces personnes sont bien sûr indiscernables. On rencontre deux personnes, A et B.

— A dit : "Je suis un infirmier." (P_1)
— B déclare : "Nous sommes deux malades." (P_2)
— A dit : "Si je suis un malade, alors B est un infirmier." (P_3)
— B ajoute : "Si je suis un malade, alors A est un infirmier." (P_4)

Le but de l'exercice est de découvrir qui sont A et B. Pour cela on introduit 4 variables propositionnelles : M_A, M_B, I_A, I_B.

Avec x qui est soit A soit B, M_x est vrai lorsque x est un malade et faux sinon ; I_x est vrai lorsque x est un infirmier et faux sinon.

Questions.

1. On pourrait de la même manière introduire deux autres variables D_A, D_B, telles que D_x serait vraie lorsque x est un docteur et faux sinon.
   Expliquer pourquoi cela n'est pas nécessaire et l'avantage de ne pas introduire ces variables.
2. Donner les formules propositionnelles qui expriment qu'un malade n'est pas infirmier.
3. Combien y-a-t-il en général d'interprétations différentes possibles lorsqu'il y a quatre variables ? Dans ce cas particulier, peut-on éliminer certaines interprétations même sans tenir compte des phrases échangées ?
4. Traduire les 4 phrases échangées P_1, P_2, P_3 et P_4 en des formules propositionnelles qui utilisent les variables M_A, M_B, I_A et I_B.
5. Faire un tableau qui pour chaque interprétation possible pour les variables propositionnelles donne la valeur de vérité des formules P_1, P_2, P_3 et P_4.
6. Sur chaque ligne du tableau précédent, et pour chaque phrase, indiquer si elle a pu être dite. Par exemple si A est un docteur, il ne pourra pas dire la phrase P_1 si celle-ci est fausse.
7. A-t-on assez d'information pour retrouver le statut de A et de B ? justifiez votre réponse.

Correction :

1. *Une personne est un docteur si et seulement si elle n'est ni un médecin, ni un malade. La variable D_x est donc toujours équivalente à $\neg M_x \land \neg I_x$. L'introduire est donc inutile et au contraire augmente le nombre d'interprétation à considérer à priori.*
2. *La propriété peut s'exprimer par les deux formules $I_A \Rightarrow \neg M_A$ et $I_B \Rightarrow \neg M_B$*
3. $P_1 \stackrel{\text{def}}{=} I_A$, $P_2 \stackrel{\text{def}}{=} M_A \land M_B$, $P_3 \stackrel{\text{def}}{=} M_A \Rightarrow I_B$, $P_4 \stackrel{\text{def}}{=} M_B \Rightarrow I_A$,

4. *Il y a $2^4 = 16$ interprétations en général. Le cas où I_x et M_x sont tous les deux vrais n'est pas possible, il n'y a donc que 3 possibilités différentes pour (M_x, I_x) et donc 9 possibilités au total.*
5. *cf tableau ci-dessous (colonnes P_1, P_2, P_3, P_4)*
6. *un malade ne peut pas dire une phrase vraie et un docteur ne peut pas dire une phrase fausse (un infirmier peut dire n'importe quoi). Certaines des situations décrites dans le tableau ne peuvent donc pas se produire.*

   On met dans la colonne D_i le signe X si la phrase P_i n'a pas pu être dite.

M_A	M_B	I_A	I_B	P_1	P_2	P_3	P_4	D_1	D_2	D_3	D_4
F	F	V	V	V	F	V	V				
F	V	V	F	V	F	V	V				X
F	F	V	F	V	F	V	V		X		
V	F	F	V	F	F	V	V			X	
V	V	F	F	F	V	F	F		X		
V	F	F	F	F	F	F	V		X		
F	F	F	V	F	F	V	V	X			
F	V	F	F	F	F	V	F	X			
F	F	F	F	F	F	V	V	X	X		

7. *La seule situation pour laquelle les 4 phrases ont pu être échangées est le cas où A et B sont des infirmiers.*

Exercice 3 *Preuves propositionnelles (4 points)*

Soient les formules $A \stackrel{\text{def}}{=} \neg\neg(p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ et $B \stackrel{\text{def}}{=} \neg(p \wedge q) \vee r$

1. Construire l'arbre de preuves dans le système G du séquent $A \vdash B$.
2. Mettre sous forme clausale les formules A et $\neg B$.
3. Utiliser la méthode de résolution por montrer que B est conséquence logique de A.

Correction :

1.

$$
(\vee_d)\,\dfrac{(\neg_g)\,\dfrac{(\neg_d)\,\dfrac{(\neg_d)\,\dfrac{(\wedge_g)\,\dfrac{(\Rightarrow_g)\,\dfrac{\text{HYP}\,\dfrac{}{p,q \vdash r,p} \qquad (\Rightarrow_g)\,\dfrac{\text{HYP}\,\dfrac{}{p,q \vdash r,q} \quad \text{HYP}\,\dfrac{}{r,p,q \vdash r}}{q \Rightarrow r, p, q \vdash r}}{p \Rightarrow (q \Rightarrow r), p, q \vdash r}}{p \Rightarrow (q \Rightarrow r), p \wedge q \vdash r}}{p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \vdash \neg(p \wedge q), r}}{\vdash \neg(p \wedge q), r, \neg(p \Rightarrow (q \Rightarrow r))}}{\neg\neg(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \vdash \neg(p \wedge q), r}}{\neg\neg(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \vdash \neg(p \wedge q) \vee r}
$$

2. *$A \equiv p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv \neg p \vee \neg q \vee r$ qui est une clause $\neg B \equiv p \wedge q \wedge \neg r$ qui correspond à trois clauses. On a donc 4 clauses au total : $\{\neg p \vee \neg q \vee r, p, q, \neg r\}$.*

3.

$$
\text{RES}\,\dfrac{\text{RES}\,\dfrac{\text{RES}\,\dfrac{\neg p \vee \neg q \vee r \qquad p}{\neg q \vee r} \qquad q}{\neg r} \qquad \neg r}{\perp}
$$

Exercice 4 *Transformation de formules propositionnelles (4 points)*

On considère des formules propositionnelles construites avec des variables propositionnelles et les connecteurs $\top$, $\bot$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$ et $\Rightarrow$. On cherche à construire une formule équivalente qui ne contient que des variables propositionnelles et les connecteurs $\neg$ et $\wedge$.

1. Trouver des formules équivalentes à $\top$ et $\bot$ qui n'utilisent que la variable propositionnelle x et les connecteurs $\neg$ et $\wedge$.
2. Donner les équations récursives qui définissent une fonction `neget` qui prend en argument une formule du calcul propositionnel et renvoie une formule logiquement équivalente qui ne contient que des variables propositionnelles et les connecteurs $\neg$ et $\wedge$.
3. Donner une borne supérieure du nombre de symboles logiques dans la formule `neget`(A) en fonction du nombre de symboles logiques dans la formule A.
4. Justifier votre réponse en faisant une récurrence sur la structure de la formule.

Correction :

1. $\bot \equiv x \wedge \neg x$ *et* $\top \equiv \neg(x \wedge \neg x)$

2.

$$\begin{array}{lll}
\mathtt{neget}(\top) & =\neg(x \wedge \neg x) & \\
\mathtt{neget}(\bot) & =x \wedge \neg x & \\
\mathtt{neget}(p) & =p & \text{si } p \text{ est une variable propositionnelle} \\
\mathtt{neget}(\neg P) & =\neg(\mathtt{neget}(P)) & \\
\mathtt{neget}(P \vee Q) & =\neg(\neg \mathtt{neget}(P) \wedge \neg \mathtt{neget}(Q)) & \\
\mathtt{neget}(P \wedge Q) & =\mathtt{neget}(P) \wedge \mathtt{neget}(Q) & \\
\mathtt{neget}(P \Rightarrow Q) & =\neg(\mathtt{neget}(P) \wedge \neg \mathtt{neget}(Q)) &
\end{array}$$

3. *Une borne supérieure est* 4 *fois le nombre de symboles logique dans la formule. Le cas le pire est celui d'une formule disjonctive* $p \vee q$ *dans laquelle on a un seul symbole alors qu'il y en aura* 4 *dans le résultat. Avec la fonction donnée, si on prend une formule de la forme* $x_0 \vee \ldots \vee x_n$ *qui a* n *symboles logiques alors le résultat a* $4n$ *symboles. Le résultat contient un certain nombre de double-négation qu'il est possible d'éviter en utilisant une fonction auxiliaire* `nn` *qui étant donnée une formule* P *renvoie une formule équivalente à* $\neg P$ *qui ne contient que les symboles* $\neg$ *et* $\wedge$*.*

4. *La preuve se fait par récurrence struturelle sur la formule propositionnelles. Si* $\mathtt{nbs}(P)$ *désigne le nombre de symboles logiques dans la formule* P*, la proposition à montrer est*

$$\Phi(P) \stackrel{\text{def}}{=} \mathtt{nbs}(\mathtt{neget}(P)) \leq 4 \times \mathtt{nbs}(P)$$

On vérifie chaque cas

- $\mathtt{nbs}(\mathtt{neget}(\top)) = 3 \leq 4 = 4 \times \mathtt{nbs}(\top)$
- $\mathtt{nbs}(\mathtt{neget}(\bot)) = 2 \leq 4 = 4 \times \mathtt{nbs}(\bot)$
- $\mathtt{nbs}(\mathtt{neget}(p)) = 0 \leq 0 = 4 \times \mathtt{nbs}(p)$
- *on suppose que* $\mathtt{nbs}(\mathtt{neget}(P)) \leq 4 \times \mathtt{nbs}(P)$, *on montre* $\mathtt{nbs}(\mathtt{neget}(\neg P)) = \mathtt{nbs}(\neg \mathtt{neget}(P)) = 1 + \mathtt{nbs}(\mathtt{neget}(P)) \leq 1 + 4 \times \mathtt{nbs}(P) \leq 4 \times (1 + \mathtt{nbs}(P)) = 4 \times (\mathtt{nbs}(\neg(P)))$
- *on suppose que* $\mathtt{nbs}(\mathtt{neget}(P)) \leq 4 \times \mathtt{nbs}(P)$ *et* $\mathtt{nbs}(\mathtt{neget}(Q)) \leq 4 \times \mathtt{nbs}(Q)$, *on montre*
  - $\mathtt{nbs}(\mathtt{neget}(P \vee Q)) = \mathtt{nbs}(\neg(\neg \mathtt{neget}(P) \wedge \neg \mathtt{neget}(Q))) = 4 + \mathtt{nbs}(\mathtt{neget}(P)) + \mathtt{nbs}(\mathtt{neget}(Q)) \leq 4 \times (1 + \mathtt{nbs}(P) + \mathtt{nbs}(Q)) = 4 \times (1 + \mathtt{nbs}(P \vee Q))$
  - $\mathtt{nbs}(\mathtt{neget}(P \wedge Q)) = \mathtt{nbs}(\mathtt{neget}(P) \wedge \mathtt{neget}(Q)) = \mathtt{nbs}(\mathtt{neget}(P)) + \mathtt{nbs}(\mathtt{neget}(Q)) \leq 4 \times (1 + \mathtt{nbs}(P) + \mathtt{nbs}(Q)) = 4 \times (1 + \mathtt{nbs}(P \wedge Q))$
  - $\mathtt{nbs}(\mathtt{neget}(P \Rightarrow Q)) = \mathtt{nbs}(\neg(\mathtt{neget}(P) \wedge \neg \mathtt{neget}(Q))) = 3 + \mathtt{nbs}(\mathtt{neget}(P)) + \mathtt{nbs}(\mathtt{neget}(Q)) \leq 4 \times (1 + \mathtt{nbs}(P) + \mathtt{nbs}(Q)) = 4 \times (1 + \mathtt{nbs}(P \Rightarrow Q))$

On en déduit que la propriété $\mathtt{nbs}(\mathtt{neget}(P)) \leq 4 \times \mathtt{nbs}(P)$ *est vraie quelle que soit la forule propositionnelle* P*.*

Exercice 5 *Modélisation (4 points)*

Dans cet exercice, on s'intéresse à modéliser un système de droit d'accès sur des ressources.

Les objets de la logique vont représenter des individus, des groupes d'individus, des ressources (fichiers, répertoires), des actions à réaliser (lire, écrire, supprimer,...). Les symboles de prédicat qui nous intéressent sont les suivants :

— $\texttt{action}(a)$: a est une action ;
— $\texttt{ressource}(r)$: r est une ressource ;
— $\texttt{groupe}(g)$: g est un groupe ;
— $\texttt{individu}(x)$: x est un individu ;
— $\texttt{dans}(x, g)$: l'individu x est dans le groupe g ;
— $\texttt{proprio}(x, r)$: l'individu x est le propriétaire de la ressource r ;
— $\texttt{droit}(g, a, r)$: le groupe g est autorisé à effectuer l'action a sur la ressource r ;
— $\texttt{peut}(x, a, r)$: l'individu x peut effectuer l'action a sur la ressource r ;
— $x = y$ les objets x et y sont égaux.

On introduit également trois constantes `Ecrire`, `Lire` et `Supp` qui représentent les actions d'écriture, de lecture et de suppression d'une ressource.

1. Traduire en langage naturel les formules suivantes :
   (a) $\forall x\, r, \texttt{peut}(x, \texttt{Ecrire}, r) \Rightarrow \texttt{peut}(x, \texttt{Supp}, r)$
   (b) $\forall r, \texttt{ressource}(r) \Rightarrow \exists x, \texttt{peut}(x, \texttt{Supp}, r)$
   (c) $\forall x, \exists a, \exists r, \texttt{ressource}(r) \wedge \texttt{action}(a) \wedge \neg\texttt{peut}(x, a, r)$
   (d) $\exists r, \texttt{ressource}(r) \wedge \forall a, \forall x, \neg\texttt{peut}(x, a, r)$
2. Exprimer comme des formules logiques les propriétés suivantes :
   (a) Toute ressource a au moins un propriétaire ;
   (b) Il existe une ressource qui a au moins deux propriétaires ;
   (c) Une personne peut effectuer une action sur une ressource si et seulement si elle en est propriétaire ou bien si elle appartient à un groupe qui a le droit d'effectuer cette action ;
   (d) Tout groupe qui a le droit d'écriture sur une ressource a aussi le droit de lecture.
3. Proposer une interprétation sur un domaine qui contient deux individus (A et B), un groupe G, deux ressources F et D et les trois actions `Ecrire`, `Lire` et `Supp` et qui vérifie l'ensemble des formules de la question précédente.
4. Est-il possible de trouver une interprétation qui vérifie toutes les conditions de la première question ?

Correction :

1. (a) Toute personne qui peut écrire sur une ressource peut aussi la supprimer.
(b) Toute ressource peut être supprimée (pour toute ressource, il existe une personne qui peut la supprimer).
(c) Personne n'a le droit de faire toutes les actions sur toutes les ressources (pour toute personne, il existe une ressource et une action que la personne ne peut pas faire sur cette ressource).
(d) Il existe une ressource sur laquelle personne ne peut faire aucune action.

2. (a) $\forall r, \texttt{ressource}(r) \Rightarrow \exists x, \texttt{proprio}(x, r)$
(b) $\exists r, \texttt{ressource}(r) \wedge \exists x, \exists y, \texttt{proprio}(x, r) \wedge \texttt{proprio}(y, r) \wedge x \neq y$
(c) $\forall x\, a\, r, \texttt{peut}(x, a, r) \Leftrightarrow \texttt{proprio}(x, r) \vee \exists g, \texttt{dans}(x, g) \wedge \texttt{droit}(g, a, r)$
(d) $\forall g\, r, \texttt{droit}(g, \texttt{Ecrire}, r) \Rightarrow \texttt{droit}(g, \texttt{Lire}, r)$

3. On doit donner les éléments du domaine qui vérifient les prédicats. Les interprétations des prédicats unaires (`action`,`ressource`, `groupe` et `individu`) sont imposés par l'énoncé. On peut ensuite choisir librement qui on met dans le groupe (éventuellement personne). De même les droits du groupe peuvent être fixés librement en respectant juste le fait que d'avoir le droit *d'écriture donne aussi le droit de lecture. Le choix de propriétaire doit juste respecter que chaque ressource a un propriétaire et qu'une des ressources en a deux. Une fois l'interprétation de ces relations fixée, la condition (c) détermine complètement l'interprétation de* **peut**.

Une solution possible (les deux individus sont dans le groupe G qui a uniquement le droit de lire la ressource D, A est le propriétaire de F et D, tandis que B est propriétaire uniquement de F).

— $\texttt{action}_I = \{\texttt{Ecrire}, \texttt{Lire}, \texttt{Supp}\}$
— $\texttt{ressource}_I = \{F, D\}$
— $\texttt{groupe}_I = \{G\}$
— $\texttt{individu}_I = \{A, B\}$
— $\texttt{dans}_I = \{(A, G), (B, G)\}$
— $\texttt{proprio}_I = \{(A, F), (B, F), (A, D)\}$
— $\texttt{droit}_I = \{(G, \texttt{Lire}, D)\}$
— $\texttt{peut}_I = \{(A, \texttt{Lire}, F), (A, \texttt{Ecrire}, F), (A, \texttt{Supp}, F), (A, \texttt{Lire}, D), (A, \texttt{Ecrire}, D), (A, \texttt{Supp}, D), (B, \texttt{Lire}, F), (B, \texttt{Ecrire}, F), (B, \texttt{Supp}, F), (B, \texttt{Lire}, D)\}$

4. *Non car il y a une contradiction entre la formule (b) qui dit que toute ressource peut être supprimer et la formule (d) qui dit qu'il existe une ressource sur laquelle on ne peut faire aucune action.*

Rappel des règles logiques du système G

hypothèse	$(\textsc{Hyp})\dfrac{}{A, \Gamma \vdash \Delta, A}$	
	gauche	droite
$\bot$	$\dfrac{}{\bot, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \bot}$
$\top$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\top, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{}{\Gamma \vdash \Delta, \top}$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$
$\wedge$	$\dfrac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}$
$\vee$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \Rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}$