Licence Informatique, semestre 5 — 2018–19

Eléments de logique pour l'informatique (Info 315) — 21 novembre 2018

`http://www.lri.fr/~paulin/Logique`

Partiel - 8 novembre 2018

L'examen dure 2 heures. L'énoncé est composé de 5 pages, le barème est indicatif.
Toutes les réponses (sauf QCM) devront être clairement justifiées.
Le seul document autorisé est une page A4 manuscripte recto-verso. Le tableau résumant les règles du système G est donné à la fin du sujet.
Inscrivez votre nom sur chaque copie et numérotez-les. **Ne pas cacheter les copies !**
Correction :

Exercice 1 *QCM (6 points)*

Le nom et le numéro d'étudiant doivent être reportés sur l'énoncé du qcm que vous rendrez avec votre copie (utiliser un style bleu ou noir pour cocher les cases). Des points négatifs pourront être attribués aux réponses incorrectes.

Exercice 2 *Preuves propositionnelles (4 points)*

On se donne quatre variables propositionnelles x, y, a et b.

1. Soit le séquent $x \Rightarrow \neg y, a \Rightarrow \neg b, x \vee a \vdash y \Rightarrow \neg b$.
   (a) Donner la formule associée à ce séquent.
   (b) Construire l'arbre de preuves de ce séquent dans le système G.
   (c) Le séquent est-il valide ? pourquoi ?
2. Utiliser la méthode de résolution pour montrer que la formule $x \Rightarrow \neg a$ est conséquence logique des formules $\{x \Rightarrow \neg y, a \Rightarrow \neg b, y \vee b\}$.

Correction :

1. (a)

$$(x \Rightarrow \neg y) \wedge (a \Rightarrow \neg b) \wedge (x \vee a) \Rightarrow (y \Rightarrow \neg b)$$

(b)

$$(\Rightarrow_d)\dfrac{(\neg_d)\dfrac{(\Rightarrow_g)\dfrac{(\Rightarrow_g)\dfrac{(\vee_g)\dfrac{\text{HYP}\dfrac{}{x, y, b \vdash x, a} \quad \text{HYP}\dfrac{}{a, y, b \vdash x, a}}{x \vee a, y, b \vdash x, a} \quad (\neg_g)\dfrac{\text{HYP}\dfrac{}{x \vee a, y, b \vdash x, b}}{\neg b, x \vee a, y, b \vdash x}}{a \Rightarrow \neg b, x \vee a, y, b \vdash x} \quad (\neg_g)\dfrac{\text{HYP}\dfrac{}{a \Rightarrow \neg b, x \vee a, y, b \vdash y}}{\neg y, a \Rightarrow \neg b, x \vee a, y, b \vdash}}{x \Rightarrow \neg y, a \Rightarrow \neg b, x \vee a, y, b \vdash}}{x \Rightarrow \neg y, a \Rightarrow \neg b, x \vee a, y \vdash \neg b}}{x \Rightarrow \neg y, a \Rightarrow \neg b, x \vee a \vdash y \Rightarrow \neg b}$$

(c) Le séquent est valide car on a pu construire un arbre de preuve complet.

2. (a) Mise en forme clausale des hypothèses et de la négation de la conclusion $\neg(x \Rightarrow \neg a) \equiv x \wedge a$ donne deux clauses.

$$C_1 : \neg x \vee \neg y \qquad C_2 : \neg a \vee \neg b \qquad C_3 : y \vee b \quad C_4 : x \qquad C_5 : a$$

(b)

$$\text{RES}\dfrac{\text{RES}\dfrac{\text{RES}\dfrac{\text{RES}\dfrac{\neg x \vee \neg y \qquad x}{\neg y} \qquad y \vee b}{b} \qquad \neg a \vee \neg b}{\neg a} \qquad a}{\bot}$$

Exercice 3 *Transformation de formules propositionnelles (6 points)*

On considère des formules propositionnelles construites uniquement à partir des formules atomiques $\top$ et $\bot$ et pour chaque variable propositionnelle i, un opérateur binaire $\mathtt{IF}_i(p,q)$ qui se comporte comme la formule p si i est vrai et comme la formule q sinon. On note IP l'ensemble des formules ainsi construites.

Si x, y et z sont des variables propositionnelles, on peut traduire la formule propositionnelle $x \vee (y \wedge \neg z)$ par une formule de IP (notée A dans la suite) :

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \mathtt{IF}_x(\top, \mathtt{IF}_y(\mathtt{IF}_z(\bot,\top),\bot))$$

Cette formule est vraie exactement lorsque x est vrai ou lorsque y est vrai et z est faux.

Soit ι une interprétation et p une formule de IP, on définit la fonction $\mathtt{valip}(\iota,p)$ qui représente la valeur de vérité de la formule p pour l'interprétation ι. Cette définition est faite de manière récursive sur la structure de p :

$$\begin{array}{lll}
\mathtt{valip}(\iota,\top) & = V & \\
\mathtt{valip}(\iota,\bot) & = F & \\
\mathtt{valip}(\iota,\mathtt{IF}_j(p,q)) & = \mathtt{valip}(\iota,p) & \text{si } \iota(j)=V \\
\mathtt{valip}(\iota,\mathtt{IF}_j(p,q)) & = \mathtt{valip}(\iota,q) & \text{si } \iota(j)=F
\end{array}$$

On vérifie que pour toute interprétation ι, la valeur de vérité de $x \vee (y \wedge \neg z)$ est bien la même que celle de sa traduction A.

1. Suivant le même principe, donner une formule de IP qui corresponde à la traduction de la formule $y \Rightarrow (x \vee \neg z)$. Justifier que la traduction a la même table de vérité que la formule initiale.

   Correction :
   $\mathit{IF}_y(\mathit{IF}_x(\top, \mathit{IF}_z(\bot,\top)),\top)$ *Cette formule est vraie lorsque y est faux ou bien lorsque y est vraie et x est vraie ou lorsque y est vraie et x est faux et z est faux.*

2. Soit p une formule de IP et i une variable propositionnelle, donner une expression plus simple pour $\mathtt{IF}_i(p,p)$ qui est logiquement équivalente mais qui ne dépend pas de i.

   Correction : *La validité de $\mathit{IF}_i(p,p)$ est la même que la valeur de p lorsque $\iota(i)$ est vrai ou faux. donc $\mathtt{valip}(\iota, \mathit{IF}_i(p,p)) = \mathtt{valip}(\iota,p)$*

3. Donner une formule dans IP équivalente à la formule B dont la table de vérité est :

x	y	z	B
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	F

   Correction : $\mathit{IF}_x(\mathit{IF}_y(\top,\bot), \mathit{IF}_z(\top,\bot))$

4. Donner une formule de IP qui soit équivalente à la négation de A.

   Correction :

$$\neg A \equiv \mathit{IF}_x(\bot, \mathit{IF}_y(\mathit{IF}_z(\top,\bot),\top))$$

5. Construire une fonction $\mathtt{neg}$ qui étant donnée une formule p de IP calcule une nouvelle formule de IP dont la valeur est la négation de la valeur de p dans toute interprétation ι.

   On définira la fonction par des équations récursives

$$\begin{array}{ll}
\mathtt{neg}(\top) & = \\
\mathtt{neg}(\bot) & = \\
\mathtt{neg}(\mathtt{IF}_i(p,q)) & =
\end{array}$$

Correction :

$$\begin{array}{ll} \textit{neg}(\top) & = \bot \\ \textit{neg}(\bot) & = \top \\ \textit{neg}(\textit{IF}_i(p,q)) & = \textit{IF}_i(\textit{neg}(p), \textit{neg}(q)) \end{array}$$

6. On remarque qu'il est inutile d'avoir deux nœuds $\texttt{IF}_i$ faisant référence à la même variable i emboités dans la même formule. Soit la formule

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \texttt{IF}_x(\texttt{IF}_x(\top,\bot), \texttt{IF}_y(\texttt{IF}_z(\bot,\top), \texttt{IF}_y(\top,\bot)))$$

construire la table de vérite de C et donner une forme simplifiée de C toujours dans IP dans laquelle il n'y a pas deux nœuds $\texttt{IF}_i$ sur la même variable qui sont emboités. C'est-à-dire que pour toute sous-formule $\texttt{IF}_i(p,q)$, la variable i n'apparaît ni dans p, ni dans q.

Correction :

x	y	z	B
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	V
F	F	V	F
F	F	F	F

$C \equiv \textit{IF}_x(\top, \textit{IF}_y(\textit{IF}_z(\bot,\top),\bot))$

7. On se donne un ordre strict sur les variables propositionnelles. Dans nos exemples, on prendra $x < y < z$. On s'intéresse maintenant à des formules de IP *ordonnées*, c'est-à-dire que pour toute sous-formule $\texttt{IF}_i(p,q)$, les variables j qui sont dans p ou dans q sont toutes strictement plus grandes que i.

   (a) Dire si les formules suivantes sont ordonnées ou non

   i. $\texttt{IF}_x(\top, \texttt{IF}_y(\texttt{IF}_z(\bot,\top),\bot))$

   ii. $\texttt{IF}_x(\top, \texttt{IF}_x(\texttt{IF}_y(\bot,\top),\bot))$

   iii. $\texttt{IF}_x(\top, \texttt{IF}_z(\texttt{IF}_y(\bot,\top),\bot))$

   Correction :

   i. ordonnée

   ii. pas ordonnée (deux fois la variable x)

   iii. pas ordonnée (z avant y)

   (b) Soient les formules de IP ordonnées $P \stackrel{\text{def}}{=} \texttt{IF}_x(\texttt{IF}_z(\bot,\top),\top)$ et $Q \stackrel{\text{def}}{=} \texttt{IF}_x(\texttt{IF}_y(\top,\bot), \texttt{IF}_z(\top,\bot))$. Donner une formule de IP ordonnée qui soit équivalente à la conjonction de P et de Q.

   Correction : $P \wedge Q \equiv \textit{IF}_x(\textit{IF}_y(\textit{IF}_z(\bot,\top),\bot), \textit{IF}_z(\top,\bot))$

   (c) Construire une fonction `conj` qui étant données deux formules p et q de IP ordonnées, calcule une nouvelle formule de IP ordonnée dont la valeur est la conjonction des valeurs de p et de q dans toute interprétation ι.

   On définira la fonction par des équations récursives

$$\begin{array}{lll} \texttt{conj}(\top,q) & = & \\ \texttt{conj}(\bot,q) & = & \\ \texttt{conj}(\texttt{IF}_i(p_1,q_1), \texttt{IF}_j(p_2,q_2)) & = & \text{si } i < j \\ \texttt{conj}(\texttt{IF}_i(p_1,q_1), \texttt{IF}_j(p_2,q_2)) & = & \text{si } i = j \\ \texttt{conj}(\texttt{IF}_i(p_1,q_1), \texttt{IF}_j(p_2,q_2)) & = & \text{si } j < i \end{array}$$

Correction :

$$\begin{array}{lll}
\texttt{conj}(\top, q) & = q & \\
\texttt{conj}(\bot, q) & = \bot & \\
\texttt{conj}(\mathit{IF}_i(p_1, q_1), \mathit{IF}_j(p_2, q_2)) & = \mathit{IF}_i(\texttt{conj}(p_1, \mathit{IF}_j(p_2, q_2)), \texttt{conj}(q_1, \mathit{IF}_j(p_2, q_2))) & \textit{si } i < j \\
\texttt{conj}(\mathit{IF}_i(p_1, q_1), \mathit{IF}_j(p_2, q_2)) & = \mathit{IF}_i(\texttt{conj}(p_1, p_2), \texttt{conj}(q_1, q_2)) & \textit{si } i = j \\
\texttt{conj}(\mathit{IF}_i(p_1, q_1), \mathit{IF}_j(p_2, q_2)) & = \mathit{IF}_j(\texttt{conj}(\mathit{IF}_i(p_1, q_1), p_2), \texttt{conj}(\mathit{IF}_i(p_1, q_1), q_2)) & \textit{si } j < i
\end{array}$$

(d) On suppose maintenant que l'on prend une formule de IP ordonnée. Comment peut-on tester que cette formule est insatisfiable ? Dire pourquoi l'hypothèse que la formule est ordonnée a de l'importance.

Correction : *Il suffit de vérifier que toutes les feuilles sont de la forme $\bot$ (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de $\top$) en effet on aura alors que $\texttt{valip}(\iota, p)$ vaut toujours faux. C'est une condition qui est suffisante. Elle n'est pas nécessaire si on autorise deux nœuds IF_x sur la même branche comme dans $\mathit{IF}_x(\mathit{IF}_x(\bot, \top), \bot)$.*

Exercice 4 *Modélisation (4 points)*

Dans cet exercice, on s'intéresse à des propriétés d'un système de réservation.

Les objets de la logique vont représenter des individus, des lieux, des dates. Les symboles de prédicat qui nous intéressent sont les suivants :

— $\texttt{date}(d)$: d est une date ;
— $\texttt{personne}(p)$: p est une personne ;
— $\texttt{lieu}(l)$: l est un lieu ;
— $d_1 \leq d_2$: d_1 et d_2 sont deux dates et d_1 est avant d_2 ;
— $\texttt{resa}(p, l, d, f)$: l'individu p a réservé le lieu l à partir de la date d jusqu'à la date f.
— $\texttt{aime}(p, l)$: l'individu p aime le lieu l ;
— $x = y$ les objets x et y sont égaux.

On introduit également deux constantes `moi` et `14-juillet` qui représentent la personne qui parle et la date du 14 juillet.

1. Traduire en langage naturel les formules suivantes :
   (a) $\forall l, \exists p, \texttt{lieu}(l) \Rightarrow \texttt{aime}(p, l)$
   (b) $\exists p, \forall l, \texttt{lieu}(l) \Rightarrow \texttt{aime}(p, l)$
   (c) $\forall p\, l, \texttt{aime}(p, l) \Rightarrow \exists d\, f, \texttt{resa}(p, l, d, f)$
   (d) $\forall p\, l_1\, l_2\, d_1\, d_2\, f_1\, f_2,$
   $\texttt{resa}(p, l_1, d_1, f_1) \wedge \texttt{resa}(p, l_2, d_2, f_2) \Rightarrow (f_1 \leq d_2) \vee (f_2 \leq d_1) \vee (l_1 = l_2 \wedge d_1 = d_2 \wedge f_1 = f_2)$

   Correction :

   (a) tout lieu est aimé par au moins une personne
   (b) il existe une personne qui aime tous les lieux
   (c) toutes les personnes ont réservé tous les lieux qu'ils aiment
   (d) deux réservations différentes pour la même personne ne se chevauchent pas

2. Définir une formule qui sera notée $\texttt{visite}(p, l)$ avec deux variables libres p et l qui représente le fait que la personne p a fait une réservation sur le lieu l.

   Correction : $\exists d\, f, \texttt{resa}(p, l, d, f)$

3. Exprimer comme des formules logiques les propriétés suivantes :
   (a) Il existe un lieu que personne n'a jamais réservé.
   (b) La date de fin d'une réservation est toujours postérieure à la date de début.
   (c) Deux réservations sur le même lieu ne se chevauchent pas (l'une finit avant que l'autre ne commence).

(d) Je n'aime aucun des endroits que j'ai réservés depuis le 14 juillet.

Correction :

(a) $\exists l, \forall p, \neg \texttt{visite}(p, l)$

(b) $\forall p\, l, d\, f, \texttt{resa}(p, l, d, f) \Rightarrow d \leq f$

(c) $\forall p_1\, p_2\, l\, d_1\, d_2\, f_1\, f_2,$
$\texttt{resa}(p_1, l, d_1, f_1) \wedge \texttt{resa}(p_2, l, d_2, f_2) \Rightarrow (f_1 \leq d_2) \vee (f_2 \leq d_1) \vee (p_1 = p_2 \wedge d_1 = d_2 \wedge f_1 = f_2)$

(d) $\forall l, d\, f, \texttt{resa}(\texttt{moi}, l, d, f) \wedge \texttt{14-juillet} \leq d \Rightarrow \neg \texttt{aime}(p, l)$

Rappel des règles logiques du système G

hypothèse	$(\textsc{Hyp})\dfrac{}{A, \Gamma \vdash \Delta, A}$	
	gauche	droite
$\bot$	$\dfrac{}{\bot, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \bot}$
$\top$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\top, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{}{\Gamma \vdash \Delta, \top}$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$
$\wedge$	$\dfrac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}$
$\vee$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \Rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}$