Licence Informatique, semestre 5 — 2019–20
Eléments de logique pour l'informatique (Info 315) — 29 octobre 2019
`http://www.lri.fr/~paulin/Logique`

Partiel - 23 octobre 2019

L'examen dure 2 heures. L'énoncé est composé de 6 pages, le barème est indicatif.
Toutes les réponses (sauf QCM) devront être clairement justifiées.
Le seul document autorisé est une page A4 manuscripte recto-verso. Le tableau résumant les règles du système G est donné à la fin du sujet.
Inscrivez votre nom sur chaque copie et numérotez-les. **Ne pas cacheter les copies !**
Correction : *Bareme Chaque question est notée sur 5 point, puis est renormalisée.*

Exercice 1 *QCM (5 points)*
Le nom et le numéro d'étudiant doivent être reportés sur l'énoncé du qcm que vous rendrez avec votre copie (utiliser un style bleu ou noir pour cocher les cases). Si une bonne réponse rapporte 1 point, une mauvaise réponse retire $\frac{1}{2}$ point.

Exercice 2 *Modélisation premier ordre et calcul propositionnel (7 points)*
On s'intéresse à modéliser un emploi du temps. Pour cela on se place dans un univers dans lequel les objets représentent des salles, des créneaux horaires, des séances de cours, des enseignants et des groupes d'étudiants.
Dans le langage, on utilise les symboles suivants :
— une fonction unaire `grp` qui s'applique à une séance de cours c, $\texttt{grp}(c)$ représente le groupe d'étudiants qui suit la séance c.
— un prédicat unaire `seance`, tel que $\texttt{seance}(c)$ est vrai lorsque l'objet c représente une séance de cours.
— un prédicat à quatre arguments `EDT` tel que $\texttt{EDT}(s, d, c, p)$ est vrai lorsque la séance de cours c a lieu dans la salle s lors du créneau horaire d avec l'enseignant p.
— un prédicat ternaire `dispo` tel que $\texttt{dispo}(e, d, c)$ est vrai lorsque l'enseignant e est disponible sur le créneau d pour enseigner le cours c.
— le prédicat binaire d'égalité noté de manière infixe $x = y$. On notera $x \neq y$ la formule $\neg x = y$.

1. Traduire en français (ou en anglais) les formules suivantes
   (a) $\forall c\, d, \exists e, \texttt{dispo}(e, d, c)$
   (b) $\exists e, \forall c\, d, \texttt{dispo}(e, d, c)$
   (c) $\forall s\, d\, c\, p, \texttt{EDT}(s, d, c, p) \Rightarrow \texttt{dispo}(p, d, c)$
   (d) $\forall s\, s'\, d\, c\, c'\, p\, p', \texttt{EDT}(s, d, c, p) \wedge \texttt{EDT}(s', d, c', p') \Rightarrow \texttt{grp}(c) \neq \texttt{grp}(c') \vee s = s' \wedge c = c' \wedge p = p'$

   Correction : *Bareme On note sur 5 chaque phrase, on ne met que 4 points sur 5 si c'est juste une paraphrase de la formule logique. Faire attention que la différence entre les deux premières formules soit bien explicite dans leur traduction.*

   (a) Pour chaque séance et chaque créneau, il y a au moins un enseignant disponible.
   (b) Il y a un enseignant qui est disponible pour tous les créneaux et les séances.
   (c) Toute séance programmée dans l'emploi du temps sur un créneau est attribué à un enseignant qui est disponible sur ce créneau pour faire ce cours.
   (d) Sur un créneau horaire, et pour un groupe donné, il y a au plus une séance de cours, une salle et un enseignant programmé dans l'emploi du temps sur ce créneau pour ce groupe.

2. En utilisant uniquement les symboles donnés, exprimer sous forme de formule logique les propriétés suivantes :
   (a) Une salle ne peut pas être utilisée pour deux séances de cours différentes ou deux enseignants différents au même moment.

(b) Toutes les séances de cours sont présentes exactement une fois dans l'emploi du temps (en particulier une salle, un créneau horaire et un enseignant ont été trouvés pour que la séance puisse se dérouler).

Correction : *Bareme On pourra mettre jusqu'à 3/5 si la réponse correspond syntaxiquement à une formule correcte mais que le sens n'est pas exactement ce qui est demandé. Par contre on sanctionnera assez fortement les formules qui sont syntaxiquement mal formées. Pour la dernière question, on retirera 2/5 points si l'hypothèse que c est une séance a été oubliée, par contre on ne retirera pas de points si une contrainte de disponibilité a été ajoutée en plus de l'inscription dans l'emploi du temps.*

(a) $\forall s\, d\, c\, c'\, p\, p', \mathtt{EDT}(s,d,c,p) \wedge \mathtt{EDT}(s,d,c',p') \Rightarrow c = c' \wedge p = p'$

(b) $\forall c, \mathtt{seance}(c) \Rightarrow \exists s\, d\, p, \mathtt{EDT}(s,d,c,p)$

3. La modélisation précédente utilise la logique du premier ordre. On veut maintenant modéliser le même problème mais en utilisant uniquement la logique propositionnelle (pas de quantificateur). Cela est possible car il n'y a qu'un nombre fini d'objets concernés. On suppose donc que l'on a un ensemble S de salles, un ensemble D de créneaux horaires, un ensemble E de groupes d'étudiants, un ensemble C de séances de cours et un ensemble P d'enseignants.

   On remplace les symboles de fonction et de prédicats des questions précédentes par des variables propositionnelles indicées par les objets dans les différents ensembles.

   — $\mathtt{EDT}_{s,d,c,p}$ avec $s \in S, d \in D, c \in C$ et $p \in P$ est une variable propositionnelle qui est vraie si et seulement si dans l'emploi du temps, la séance de cours c a été inscrite dans la salle s au créneau horaire d avec l'enseignant p.

   — $\mathtt{dispo}_{p,d,c}$ avec $d \in D, c \in C$ et $p \in P$ est une variable propositionnelle qui est vraie si et seulement si l'enseignant p peut assurer la séance de cours c au créneau horaire d.

   — $\mathtt{grp}_{c,g}$ est vrai si et seulement si la séance de cours c concerne le groupe d'étudiants g.

   On suppose que l'on a 4 salles, 10 créneaux horaires, 3 groupes d'étudiants, 7 enseignants et 22 séances de cours. Lorsque l'on demande de dénombrer un ensemble d'objets, on détaillera la formule qui permet d'arriver au résultat, en effectuant les calculs et simplifications immédiats mais sans nécessité de calculer la valeur finale.

   (a) Combien y-a-t-il de variables propositionnelles ?

   Correction : *Bareme Comme indiqué dans l'énoncé, c'est le détail des calculs qui est important.*

   Il y a $|S| \times |D| \times |P| \times |C| = 4 \times 10 \times 7 \times 22 = 6160$ *variables* $\mathtt{EDT}_{s,d,c,p}$*, auxquelles il faut ajouter* $|D| \times |P| \times |C| = 10 \times 7 \times 22 = 1540$ *variables* $\mathtt{dispo}_{p,d,c}$ *et* $|C| \times |G| = 22 \times 3 = 66$ *variables* $\mathtt{grp}_{c,g}$

   (b) Soit l'ensemble de clauses $\{\neg\mathtt{EDT}_{s,d,c,p} \vee \mathtt{dispo}_{p,d,c} | s \in S, d \in D, p \in P, c \in C\}$

   i. combien y-a-t-il de clauses dans cet ensemble ?

   ii. quelle contrainte sur le problème cet ensemble de clauses représente-t-il ?

   Correction :

   i. Il y a $|S| \times |D| \times |P| \times |C| = 4 \times 10 \times 7 \times 22 = 6160$

   ii. $\neg\mathtt{EDT}_{s,d,c,p} \vee \mathtt{dispo}_{p,d,c} \equiv \mathtt{EDT}_{s,d,c,p} \Rightarrow \mathtt{dispo}_{p,d,c}$ *ces clauses représentent la contrainte que toutes les séances affectées dans l'emploi du temps le sont sur un créneau et avec un enseignant qui peuvent assurer cette séance sur ce créneau.*

   (c) Donner un ensemble de clauses propositionnelles qui n'utilisent que les variables propositionnelles précédentes et qui traduit la contrainte que le même enseignant sur le même créneau horaire ne peut pas être dans deux salles différentes ni enseigner deux cours différents dans la même salle.

   Combien de clauses non équivalentes contient l'ensemble ?

   Correction :

   On veut traduire le fait que $\mathtt{EDT}_{s,d,c,p} \Rightarrow \neg\mathtt{EDT}_{s',d,c',p}$ *si* $s \neq s'$ *ou si* $s = s'$ *mais* $c \neq c'$*. On introduit donc toutes les clauses suivantes en deux groupes, le premier groupe exprime* *le fait que le même enseignant ne peut être dans deux salles différentes au même moment et le second est que dans une même salle, il ne peut pas effectuer deux séances de cours différentes.*

$$\{\neg \mathit{EDT}_{s,d,c,p} \vee \neg \mathit{EDT}_{s',d,c',p} | s \in S, s' \in S, d \in D, p \in P, c \in C, c' \in C, s \neq s'\}$$
$$\cup\{\neg \mathit{EDT}_{s,d,c,p} \vee \neg \mathit{EDT}_{s,d,c',p} | s \in S, d \in D, p \in P, c \in C, c' \in C, c \neq c'\}$$

Dans le premier groupe, il faut choisir s et s' différents et la clause est symétrique en s et s' donc l'ordre ne compte pas. Il y a donc $\frac{4\times 3}{2} = 6$ possibilités pour s et s'. Le problème est aussi symétrique en c et c' qui peuvent être égaux (22 possibilités) ou différents ($\frac{22\times 21}{2} = 11 \times 21$ possibilités). Il y a donc $11 \times 21 + 22$ choix possibles. Pour le second groupe, il faut juste choisir c et c' différents ce qui correspond à $\frac{22\times 21}{2} = 11 \times 21$ possibilités.
Le premier groupe comprend $6\times 10\times 7\times (11\times 21+22)$ clauses et le second $4\times 10\times 7\times 11\times 21$.

(d) Dans la modélisation au premier ordre, on utilisait une fonction `grp`. Etait-il possible d'avoir deux groupes différents pour une même séance de cours ?
Dans la modélisation propositionnelle, on a introduit des variables propositionnelles $\mathtt{grp}_{c,g}$ pour représenter le fait que la séance c concerne le groupe g.
Donner un ensemble de clauses propositionnelles qui exprime qu'il y a exactement un groupe d'étudiants concerné pour chaque séance de cours. On pourra nommer les groupes de cours $\{g_1, g_2, g_3\}$.
Correction : *Bareme La première question sera traitée comme un bonus (+1 point sur les 5)*
Dans le cas du premier ordre, comme `grp` *est une fonction, il y a exactement un groupe associé à chaque séance. Par contre dans le cas propositionnel, on peut avoir a priori $\mathit{grp}_{c,g}$ et $\mathit{grp}_{c,g'}$ vrais pour deux groupes différents g et g' ou au contraire aucune variable vraie $\mathit{grp}_{c,g}$ pour une séance c.*
Pour forcer un modèle dans lequel chaque séance est affectée à exactement un groupe on ajoute les clauses suivantes :

$$\{\mathit{grp}_{c,g_1} \vee \mathit{grp}_{c,g_2} \vee \mathit{grp}_{c,g_3} | c \in C\}$$
$$\cup\{\neg \mathit{grp}_{c,g} \vee \neg \mathit{grp}_{c,g'} | c \in C, g \in G, g' \in G, g \neq g'\}$$

Bonus On suppose que l'on veut construire un emploi du temps en utilisant des outils de logique propositionnelle.
Les entrées du problème sont : les ensembles de séances, de salles, d'enseignants, de créneaux horaires, les groupes ainsi que les correspondances entre les séances et les groupes (valeurs des variables $\mathtt{grp}_{c,g}$) et les possibilités des enseignants (valeurs des variables $\mathtt{dispo}_{p,d,c}$).

(a) Donner un ensemble de formules propositionnelles portant sur les variables $\mathtt{EDT}_{s,d,c,p}$ pour que l'emploi du temps corresponde à une solution dans laquelle chaque séance est assurée par un enseignant qui est disponible sans qu'il y ait de conflit de salle ou que deux personnes doivent assister à deux cours différents au même moment. On supposera que deux créneaux différents ne se chevauchent pas, de même deux groupes différents n'ont pas d'étudiant en commun.

(b) Quelle propriété logique doit satisfaire l'ensemble de formules précédent pour qu'il existe une solution au problème d'emploi du temps.

Correction :

(a) On a en entrée les valeurs de `dispo` *et de* `grp`*, on s'en sert pour simplifier les clauses correspondant aux contraintes. Par exemple pour la clause $\neg \mathit{EDT}_{s,d,c,p} \vee \mathit{dispo}_{p,d,c}$ qui exprime que dans l'emploi du temps, on a uniquement des programmations avec des enseignants disponibles. Si $\mathit{dispo}_{p,d,c}$ est vrai, la clause est trivialement vraie et si $\mathit{dispo}_{p,d,c}$ est faux, la clause se simplifie en $\neg \mathit{EDT}_{s,d,c,p}$. Il suffit donc de garder les clauses*

$$\{\neg \mathit{EDT}_{s,d,c,p} | s \in S, d \in D, p \in P, c \in C, \mathit{dispo}_{p,d,c} \text{ faux}\}$$

on ajoute ensuite les clauses qui disent qu'un enseignant ne doit pas faire deux séances différentes au même moment, de même pour un groupe d'étudiant qui ne peut pas participer à deux séances différentes au même moment, on ajoute également le fait qu'une même salle ne peut pas être utilisée pour deux séances différentes :

$$
\begin{array}{l}
\{\neg \mathit{EDT}_{s,d,c,p} \vee \neg \mathit{EDT}_{s',d,c',p'} | s\, s' \in S, d \in D, p\, p' \in P, c\, c' \in C, g \in G, c \neq c', \mathtt{grp}_{c,g} \text{ et } \mathtt{grp}_{c',g} \text{ vrais}\} \\
\cup\{\neg \mathit{EDT}_{s,d,c,p} \vee \neg \mathit{EDT}_{s',d,c',p} | s\, s' \in S, d \in D, p \in P, c\, c' \in C, c \neq c'\} \\
\cup\{\neg \mathit{EDT}_{s,d,c,p} \vee \neg \mathit{EDT}_{s,d,c',p'} | s \in S, d \in D, p\, p' \in P, c\, c' \in C, c \neq c'\}
\end{array}
$$

Il faut de plus les clauses qui disent que toutes les séances doivent être programmées une seule fois dans la semaine. Les premières clauses disent que l'on a pu trouver une salle, un créneau et un enseignant (disponible) pour chaque séance, il y a une clause (disjonction de nombreux cas) pour chaque séance, on peut restreindre a priori aux enseignants disponibles, mais c'est aussi correct sans cette restriction. Le deuxième ensemble de clauses exprime que la même séance n'est pas programmée deux fois dans l'emploi du temps (dans deux salles différentes ou à deux créneaux différents ou avec deux professeurs différents).

$$
\begin{array}{l}
\{\bigvee_{\{s \in S, d \in D, p \in P, \mathtt{dispo}_{p,d,c} \text{ vrai}\}} \mathit{EDT}_{s,d,c,p} | c \in C\} \\
\cup\{\neg \mathit{EDT}_{s,d,c,p} \vee \neg \mathit{EDT}_{s',d',c,p'} | s\, s' \in S, d\, d' \in D, p\, p' \in P, c \in C, (s,d,p) \neq (s',d',p')\}
\end{array}
$$

(b) *Il faut que l'ensemble de clauses précédentes soit satisfiable*

Exercice 3 *Preuves en calcul des séquents (3 points)*

Soit x, y, c et d des variables propositionnelles.

1. Pour chacun des séquents suivants, construire un arbre de preuve en utilisant les règles du système G jusqu'à ne plus avoir de connecteur logique.

   (a) $c \vee x, d \vee \neg x \vdash c \vee d$

   (b) $c \vee x \vee y, d \vee \neg x \vee \neg y \vdash c \vee d$

   (les règles sont rappelées à la fin du sujet)

   Correction :*Bareme 2 points : 1 point par séquent*

   (a)

$$
(\vee_d)\dfrac{(\vee_g)\dfrac{\text{HYP}\dfrac{}{c, d \vee \neg x \vdash c, d} \quad (\vee_g)\dfrac{\text{HYP}\dfrac{}{x, d \vdash c, d} \quad (\neg_g)\dfrac{\text{HYP}\dfrac{}{x \vdash c, d, x}}{x, \neg x \vdash c, d}}{x, d \vee \neg x \vdash c, d}}{c \vee x, d \vee \neg x \vdash c, d}}{c \vee x, d \vee \neg x \vdash c \vee d}
$$

   (b)

$$
(\vee_d)\dfrac{(\vee_g)\dfrac{\text{HYP}\dfrac{}{c, d \vee (\neg x \vee \neg y) \vdash c, d} \quad (\vee_g)\dfrac{\text{HYP}\dfrac{}{x \vee y, d \vdash c, d} \quad (\vee_g)\dfrac{(\vee_g)\dfrac{(\neg_g)\dfrac{\text{HYP}\dfrac{}{x \vdash c, d, x}}{x, \neg x \vdash c, d} \quad (\neg_g)\dfrac{x \vdash c, d, y}{x, \neg y \vdash c, d}}{x, \neg x \vee \neg y \vdash c, d} \quad (\vee_g)\dfrac{(\neg_g)\dfrac{y \vdash c, d, x}{y, \neg x \vdash c, d} \quad (\neg_g)\dfrac{\text{HYP}\dfrac{}{y \vdash c, d, y}}{y, \neg y \vdash c, d}}{y, \neg x \vee \neg y \vdash c, d}}{x \vee y, \neg x \vee \neg y \vdash c, d}}{x \vee y, d \vee (\neg x \vee \neg y) \vdash c, d}}{c \vee (x \vee y), d \vee (\neg x \vee \neg y) \vdash c, d}}{c \vee (x \vee y), d \vee (\neg x \vee \neg y) \vdash c \vee d}
$$

2. Dire si les séquents de la question précédente sont valides en justifiant votre réponse, s'ils ne le sont pas donner une interprétation qui rend faux le séquent.

   Correction : *Bareme 1 point : 3/5 pour la réponse correcte et 2/5 pour la justificationLes réponses qui ne s'appuient pas sur les arbres de preuve est considérée comme correcte Le premier arbre est complet (toutes les feuilles correspondent à une règle hypothèse), le séquent est donc valide.*

   Pour le second séquent, l'arbre de preuve contient deux feuilles qui ne sont pas des hypothèses $x \vdash c, d, y$ *et* $y \vdash c, d, x$. *Cela donne deux interprétations* x *vrai et* c, d, y *faux d'une part et* y *vrai et* c, d, x *faux pour lesquels le séquent est faux.*

Exercice 4 *Transformation de formules propositionnelles (5 points)*

On note PROP l'ensemble des formules propositionnelles "usuelles" construites à partir de variables propositionnelles et des symboles logiques $\top, \bot, \neg, \vee, \wedge, \Rightarrow$.

On introduit un nouvel ensemble XP de formules construites à partir des variables propositionnelles et uniquement des symboles logiques $\top$ et $\wedge$ ainsi que le ou exclusif que l'on notera $\oplus$.

On rappelle que la table de vérité du ou exclusif est la suivante

x	y	$x \oplus y$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

1. Donner des formules en forme normale conjonctive et en forme normale disjonctive équivalentes à $x \oplus y$.

   Correction : *Forme normale conjonctive :* $(\neg x \vee \neg y) \wedge (x \vee y)$ *et forme normale disjonctive* $(x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$.

2. Définir par des équations récursives une fonction `xval` qui prend en argument une interprétation I et une formule de XP (qui ne contient donc que des variables et les symboles $\top, \wedge$ et $\oplus$) et qui renvoie la valeur de vérité de la formule dans l'interprétation I.

   Correction :

   xval*(I, ⊤) = V*

   xval*(I, x) = I(x) si x est une variable propositionnelle*

   xval*(I, P ⊕ Q) = si* ***xval****(I, P)=V alors si* ***xval****(I, Q)=V alors F sinon V*
   sinon ***xval****(I, Q)*

3. Donner la table de vérité de $x \oplus \top$.

   Correction :

x	$x \oplus \top$
V	F
F	V

   On constate que c'est la table de vérité de la négation. On a donc $x \oplus \top \equiv \neg x$

4. Soit x et y deux variables propositionnelles, donner des formules de XP qui ont même table de vérité que $x \vee y$ et que $x \Rightarrow y$.

   Correction : *On vérifie que* $x \vee y \equiv (x \oplus y) \oplus (x \wedge y)$ *en rapprochant les tables de vérité de* $x \vee y$ *et* $x \oplus y$. *On a aussi* $x \vee y \equiv \neg(\neg x \wedge \neg y) \equiv ((x \oplus \top) \wedge (y \oplus \top)) \oplus \top$

   On peut utiliser $x \Rightarrow y \equiv \neg(x \wedge \neg y)$ *qui donne* $(x \wedge (y \oplus \top)) \oplus \top$.

   Une autre possibilité est d'utiliser $x \Rightarrow y \equiv \neg x \vee y$ *qui donne* $x \Rightarrow y \equiv ((x \oplus \top) \oplus y) \oplus ((x \oplus \top) \wedge y)$

5. Définir par des équations récursives une fonction `trad` qui prend en argument une formule propositionnelle de PROP (avec les symboles logiques usuels) et qui renvoie une formule de XP (qui n'utilise que les symboles $\top, \wedge$ et $\oplus$) qui est équivalente (même valeur de vérité pour n'importe quelle interprétation).

Correction : *Bareme Mettre 1 point si le schéma des équations est correct même s'il n'y a pas les valeurs associées. On donnera 2 points pour les trois cas de base. 1 point de plus pour le cas de la conjonction*

trad$(\top) = \top$
trad$(\bot) = \top \oplus \top$
trad$(x) = x$ *si* x *est une variable propositionnelle*
trad$(\neg\ P\ ) =$***trad***$(P) \oplus\top$
trad$(P \wedge\ Q) =$***trad***$(P) \wedge$ ***trad***(Q)
trad$(P \vee\ Q) =($***trad***$(P) \oplus$ ***trad***$(Q)) \oplus ($ ***trad***$(P) \wedge$ ***trad***$(Q))$
trad$(P\Rightarrow Q) =($***trad***$(P) \wedge ($***trad***$(Q) \oplus\top)) \oplus\top$

Bonus On veut introduire des règles de déduction dans le système G pour le symbole $\oplus$. Il y aura donc une règle gauche dont la conclusion est $\Gamma, A \oplus B \vdash \Delta$ et une règle droite dont la conclusion est $\Gamma \vdash \Delta, A \oplus B$.

Proposer des prémisses pour ces deux règles qui portent sur Γ, Δ, A et B sans mentionner d'autres symboles logiques afin que les règles soient correctes et inversibles. On pourra utiliser les formes normales conjonctive et disjonctive de $x \oplus y$ pour se ramener aux règles usuelles.

Correction : *On utilise* $A \oplus B \equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$*, on en déduit la règle gauche*

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B \qquad \Gamma, B \vdash \Delta, A}{\Gamma, A \oplus B \vdash \Delta}$$

On utilise $A \oplus B \equiv (\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B)$*, on en déduit la règle droite*

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta \qquad \Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash A \oplus B, \Delta}$$

On peut vérifier avec des tables de vérité que ces deux règles sont correctes et inversibles.

Rappel des règles logiques du système G

hypothèse	$(\textsc{Hyp})\dfrac{}{A, \Gamma \vdash \Delta, A}$	
	gauche	droite
$\bot$	$\dfrac{}{\bot, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \bot}$
$\top$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\top, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{}{\Gamma \vdash \Delta, \top}$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$
$\wedge$	$\dfrac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}$
$\vee$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \Rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}$