Licence Informatique, semestre 5 — 2020–21
Eléments de logique pour l'informatique (Info 315) — 23 novembre 2020

Partiel - 21 octobre 2020

L'examen dure 2 heures. L'énoncé est composé de 12 pages, le barème est indicatif.
Toutes les réponses (sauf QCM) devront être clairement justifiées.
Le seul document autorisé est une page A4 manuscripte recto-verso.
Ne pas cacheter les copies !
Correction :

Exercice 1 *QCM (5 points)*

Le nom et le numéro d'étudiant doivent être reportés sur l'énoncé du QCM que vous rendrez avec votre copie (utiliser un style bleu ou noir pour cocher les cases). Si une bonne réponse rapporte 1 point, une mauvaise réponse retire $\frac{1}{2}$ point.
Correction : *Voir correction individuelle des QCM.*

Exercice 2 *Transformation de formules propositionnelles (6 points)*

Dans cet exercice, p et q représentent deux variables propositionnelles. Le ou-exclusif, noté $\oplus$ a pour table de vérité

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

1. Pour chacune des formules suivantes, donner sa table de vérité puis donner une formule équivalente en utilisant les connecteurs propositionnels usuels, à savoir $\{\top, \bot, \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow\}$ et les variables propositionnelles.
   (a) $p \oplus \top$
   (b) $(p \oplus q) \oplus (p \wedge q)$
   (c) $(p \oplus \top) \oplus (p \wedge q)$

   Correction :

   (a) La table de vérité de $p \oplus \top$ est donnée ci-dessous. On a $p \oplus \top \equiv \neg p$

p	$p \oplus \top$
F	V
V	F

   (b)

   (c) D'après les tables de vérité ci-dessous, on a $(p \oplus q) \oplus (p \wedge q) \equiv p \vee q$ et $(p \oplus \top) \oplus (p \wedge q) \equiv p \Rightarrow q$

p	q	$(p \oplus q) \oplus (p \wedge q)$	$(p \oplus \top) \oplus (p \wedge q)$
V	V	V	V
V	F	V	F
F	V	V	V
F	F	F	V

2. On veut montrer que pour toute formule propositionnelle sur les connecteurs $\{\top, \bot, \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow\}$, on peut construire une formule logiquement équivalente qui ne contient que les connecteurs $\{\top, \wedge, \oplus\}$.

(a) Donner les équations récursives qui définissent une fonction `norm` qui prend en argument une formule propositionnelle quelconque et renvoie une formule équivalente dont les seuls connecteurs sont $\{\top, \wedge, \oplus\}$.

Correction :

$$\begin{array}{ll} \mathtt{norm}(\top) = \top & \mathtt{norm}(A \wedge B) = \mathtt{norm}(A) \wedge \mathtt{norm}(B) \\ \mathtt{norm}(\bot) = \top \oplus \top & \mathtt{norm}(A \vee B) = (\mathtt{norm}(A) \oplus \mathtt{norm}(B)) \oplus (\mathtt{norm}(A) \wedge \mathtt{norm}(B)) \\ \mathtt{norm}(p) = p \quad p \text{ var. prop.} & \mathtt{norm}(A \Rightarrow B) = (\mathtt{norm}(A) \oplus \top) \oplus (\mathtt{norm}(A) \wedge \mathtt{norm}(B)) \\ \mathtt{norm}(\neg A) = \mathtt{norm}(A) \oplus \top & \end{array}$$

(b) Montrer par récurrence structurelle que pour toute formule propositionnelle P, on a bien $\mathtt{norm}(P) \equiv P$.

Correction : *On regarde chacun des cas possibles pour la formule P. On simplifie $\mathtt{norm}(P)$ en utilisant les équations de définition de `norm` puis on utilise des propriétés des connecteurs (en s'appuyant sur les questions précédentes) et si nécessaire les hypothèses de récurrence.*

— $P = \top$: *on a* $\mathtt{norm}(\top) = \top \equiv \top$

— $P = \bot$: *on a* $\mathtt{norm}(\bot) = \top \oplus \top \equiv \bot$

— $P = p$ *une variable propositionnelle : on a* $\mathtt{norm}(p) = p \equiv p$

— $P = \neg A$: *on suppose (hypothèse de récurrence) que la propriété est vraie pour A et donc que $\mathtt{norm}(A) \equiv A$. On a $\mathtt{norm}(\neg A) = \mathtt{norm}(A) \oplus \top \equiv A \oplus \top$ par hypothèse de récurrence. On a aussi montré à la question précédente que $A \oplus \top \equiv \neg A$, d'où le résultat.*

— $P = A \wedge B$: *on suppose (hypothèses de récurrence) que la propriété est vraie pour A et B donc que $\mathtt{norm}(A) \equiv A$ et $\mathtt{norm}(B) \equiv B$. On a $\mathtt{norm}(A \wedge B) = \mathtt{norm}(A) \wedge \mathtt{norm}(B) \equiv A \wedge B$ par hypothèse de récurrence.*

— $P = A \vee B$: *on suppose (hypothèses de récurrence) que la propriété est vraie pour A et B donc que $\mathtt{norm}(A) \equiv A$ et $\mathtt{norm}(B) \equiv B$. On a $\mathtt{norm}(A \vee B) = (\mathtt{norm}(A) \oplus \mathtt{norm}(B)) \oplus \mathtt{norm}(A) \wedge \mathtt{norm}(B) \equiv (A \oplus B) \oplus (A \wedge B)$ par hypothèse de récurrence.*
On a aussi montré à la question précédente que $(A \oplus B) \oplus (A \wedge B) \equiv A \vee B$, d'où le résultat.

— $P = A \Rightarrow B$: *on suppose (hypothèses de récurrence) que la propriété est vraie pour A et B donc que $\mathtt{norm}(A) \equiv A$ et $\mathtt{norm}(B) \equiv B$. On a $\mathtt{norm}(A \vee B) = (\mathtt{norm}(A) \oplus \top) \oplus \mathtt{norm}(A) \wedge \mathtt{norm}(B) \equiv (A \oplus \top) \oplus (A \wedge B)$ par hypothèse de récurrence.*
On a aussi montré à la question précédente que $(A \oplus \top) \oplus (A \wedge B) \equiv A \Rightarrow B$, d'où le résultat.

On en conclut par récurrence structurelle sur P que la propriété $\mathtt{norm}(P) \equiv P$ est vraie pour toute formule propositionnelle P.

3. On veut maintenant montrer un résultat négatif, à savoir qu'il n'est pas possible de transformer toute formule propositionnelle en une formule équivalente qui ne contient que les connecteurs $\{\top, \bot, \wedge, \vee\}$ **donc qui ne contient ni négation, ni implication**.

A chaque formule propositionnelle P construite en utilisant seulement la variable propositionnelle p on associe une fonction booléenne F_P qui prend en argument un booléen b et renvoie la valeur de vérité de la formule P dans une interprétation dans laquelle la valeur de la variable p est b, c'est-à-dire, en utilisant les notations du cours, que $F_P(b) = \mathtt{val}(\{p \mapsto b\}, P)$.

Ainsi la fonction correspondant à la formule $P \stackrel{\text{def}}{=} p \vee \bot$ est telle que $F_P(V) = V$ et $F_P(F) = F$ tandis que pour la formule $P \stackrel{\text{def}}{=} p \wedge \bot$, on a $F_P(V) = F$ et $F_P(F) = F$.

(a) Donner les équations récursives sur la structure de P qui définissent la valeur de $F_P(b)$ en fonction du booléen b et de la forme de P (sans utiliser la fonction `val`).

Correction : *Cette question revient à redéfinir la valeur d'une formule dans une interprétation dans ce cas particulier où il n'y a qu'une seule variable propositionnelle et ni négation, ni implication. L'interprétation est définie via le booléen b passé en argument* *qui représente la valeur de la variable propositionnelle p. On utilise ici sans les définitr les opérations* **et** *et* **ou** *sur les booléens.*

$$\begin{array}{ll} F_\top(b)=V & F_{A\wedge B}(b)=F_A(b)\ \texttt{et}\ F_B(b) \\ F_\bot(b)=F & F_{A\vee B}(b)=F_A(b)\ \texttt{ou}\ F_B(b) \\ F_p(b)=b & \end{array}$$

On peut aussi étendre cette définition au cas des formules $A \Rightarrow B$ et $\neg A$.

(b) Montrer par récurrence sur la structure de la formule, que pour toute formule P qui ne contient ni négation, ni implication, la propriété “si $F_P(F) = V$ alors $F_P(V) = V$” est vraie.

Correction : *On regarde chaque cas :*

- *$P = \top$: on a $F_\top(b) = V$ donc la propriété est vraie car $F_P(V) = V$ est vérifié.*
- *$P = \bot$: on a $F_\bot(b) = F$ donc la propriété est vraie puisque l'hypothèse $F_\bot(F) = V$ n'est pas vérifiée.*
- *$P = p$ une variable propositionnelle : on a $F_p(b) = b$ donc $F_p(V) = V$ et la propriété est vérifiée*
- *$P = A \wedge B$: on suppose (hypothèses de récurrence) que la propriété est vraie pour A et B donc que*
  - *si $F_A(F) = V$ alors $F_A(V) = V$.*
  - *si $F_B(F) = V$ alors $F_B(V) = V$.*

  *On a $F_{A\wedge B}(b) = F_A(b)$ **et** $F_B(b)$. Si $F_{A\wedge B}(F) = V$ alors par définition de $F_{A\wedge B}$ on a $F_A(F) = V$ et $F_B(F) = V$. Par hypothèse de récurrence, on en déduit que $F_A(V) = V$ et $F_B(V) = V$ donc par définition de $F_{A\wedge B}$ on a aussi $F_{A\wedge B}(V) = V$ d'où le résultat.*
- *$P = A \vee B$: on suppose (hypothèses de récurrence) que la propriété est vraie pour A et B donc que*
  - *si $F_A(F) = V$ alors $F_A(V) = V$.*
  - *si $F_B(F) = V$ alors $F_B(V) = V$.*

  *On a $F_{A\vee B}(b) = F_A(b)$ **ou** $F_B(b)$. Si $F_{A\vee B}(F) = V$ alors par définition de $F_{A\vee B}$ on a $F_A(F) = V$ ou $F_B(F) = V$. On prend le cas où $F_A(F) = V$. Par hypothèse de récurrence, on en déduit que $F_A(V) = V$ donc par définition de $F_{A\vee B}$ on a aussi $F_{A\vee B}(V) = V$ d'où le résultat. Dans le cas où $F_A(F) = F$, on a $F_B(F) = V$ et le même raisonnement nous permet de conclure $F_{A\vee B}(V) = V$.*

On a donc bien montré dans tous les cas de formules P construites uniquement avec les connecteurs $\{\top, \bot, \wedge, \vee\}$ et la variable p, que si $F_P(F) = V$ alors $F_P(V) = V$.

(c) En déduire qu'il n'y a pas de formule équivalente à $\neg p$ construite uniquement avec les connecteurs $\{\top, \bot, \wedge, \vee\}$ et la variable p.

Correction : *Si on avait une formule P équivalente à $\neg p$ alors elle devrait vérifier les équations $F_P(F) = V$ (la valeur de $\neg p$ lorsque $p \mapsto F$) et $F_P(V) = F$ (la valeur de $\neg p$ lorsque $p \mapsto V$). Or si P ne contient que les connecteurs $\{\top, \bot, \wedge, \vee\}$ et la variable p, comme $F_P(F) = V$, on devrait avoir, d'après le résultat de la question précédente, que $F_P(V) = V$ ce qui n'est pas le cas.*

On en déduit qu'il n'y a pas de manière de représenter la formule $\neg p$ avec juste les connecteurs $\{\top, \bot, \wedge, \vee\}$.

Exercice 3 *Modélisation propositionnelle (4 points)*

On modélise de manière propositionnelle un problème de coloriage de graphe avec 4 couleurs (Bleu, Rouge, Jaune, Vert).

Résoudre le problème de coloriage revient à trouver une couleur pour chaque sommet telle que s'il y a une arête entre deux sommets a et b, alors la couleur de a est différente de la couleur de b.

Correction : Remarque préalable

Modéliser en logique une propriété Prop *énoncée en langue naturelle, consiste à concevoir une formule logique P sur la signature considérée (i.e. ici l'ensemble des variables propositionnelles) qui lui corresponde.*

Pour se convaincre de l'adéquation de la formule P *à la propriété* PROP *il est souvent utile de se poser les deux questions suivantes :*

— *Est-ce que toute interprétation qui satisfait la formule* P *décrit bien une situation vérifiant la propriété* PROP*. Sinon, cela signifie que la formalisation n'est pas* ***correcte****, au sens ou elle accepte (i.e. satisfait) des situations qui ne devraient pas l'être. Quelque part, cela signifie que votre formule* P *n'est pas assez stricte.*

— *Inversement on peut se demander si toute situation vérifiant bien la propriété* PROP *correspond bien à une interprétation qui satisfait la formule* P*. Sinon la formalisation n'est pas* ***complète****, au sens ou la formule* P *exclut (i.e. ne satisfait pas) des situations qui devraient être acceptées. Dans ce cas, cela signifie que votre formule est quelque part trop stricte.*

Il est tout à fait possible qu'une formule considérée soit à la fois pas assez stricte (sur certains aspects) et trop stricte (sur d'autres aspects). Se poser systématiquement ces questions peut permettre d'identifier des faiblesses dans la modélisation, que l'on cherchera à corriger. Parfois, plusieurs "allers/retours" entre PROP *et* P *sont nécessaires avant de converger vers une modélisation qui semble satisfaisante.*

1. Une première modélisation consiste à introduire pour chaque sommet s, 4 variables propositionnelles B_s (vrai si le sommet s est colorié en bleu), R_s (vrai si le sommet s est colorié en rouge), J_s (vrai si le sommet s est colorié en jaune) et V_s (vrai si le sommet s est colorié en vert).

   Ecrire des formules en calcul propositionnel qui n'utilisent que les variables propositionelles introduites ci-dessus pour $s \in \{a, b\}$ et qui traduisent les faits suivants :

   (a) le sommet a est colorié d'une et une seule couleur.

   Correction : *Il faut à la fois décrire que le sommet a doit être colorié par* ***au moins*** *une couleur, soit :*

$$B_a \vee R_a \vee J_a \vee V_a \tag{1}$$

   mais aussi qu'il est colorié par ***au plus*** *une couleur, ce qui revient à dire que ne peut être colorié simultanément par deux couleurs différentes, soit :*

$$(\neg B_a \vee \neg R_a) \wedge (\neg B_a \vee \neg J_a) \wedge (\neg B_a \vee \neg V_a) \wedge (\neg R_a \vee \neg J_a) \wedge (\neg R_a \vee \neg V_a) \wedge (\neg J_a \vee \neg Va) \tag{2}$$

   Une réponse acceptable correspond donc à la conjonction des deux formules (1) et (2). Notez que cette formule est un exemple de ***forme normale conjonctive****.*

   Elle peut être décrite de façon équivalente par l'ensemble des clauses qui la composent :

$$\begin{aligned}\Sigma_1 = \{&B_a \vee R_a \vee J_a \vee V_a,\\ &\neg B_a \vee \neg R_a, \neg B_a \vee \neg J_a, \neg B_a \vee \neg V_a,\\ &\neg R_a \vee \neg J_a, \neg R_a \vee \neg V_a, \neg J_a \vee \neg Va\}\end{aligned} \tag{3}$$

   Une autre solution acceptable est d'adopter une formalisation sous ***forme normale disjonctive****, ce qui revient ici à énumérer les interprétations satisfaisant la formule recherchée. Ici on a 4 possibilités de colorier le sommet a, et chaque fois qu'une couleur est choisie, les autres ne peuvent l'être, ce qui revient à dire :*

$$\begin{aligned}&(B_a \wedge \neg R_a \wedge \neg J_a \wedge \neg V_a)\\ \vee&(\neg B_a \wedge R_a \wedge \neg J_a \wedge \neg V_a)\\ \vee&(\neg B_a \wedge \neg R_a \wedge J_a \wedge \neg V_a)\\ \vee&(\neg B_a \wedge \neg R_a \wedge \neg J_a \wedge V_a)\end{aligned} \tag{4}$$

   Remarques :

   — *pour exprimer le fait qu'on ne peut colorier un même sommet de deux façons différentes, certains ont utilisé des formules de la forme* $(B_a \Rightarrow \neg R_a) \wedge \ldots$
   Ceci est tout aussi correct car de façon générale on a :

$$\neg A \vee \neg B \equiv (A \Rightarrow \neg B) \equiv (B \Rightarrow \neg A)$$

— *certains ont écrit aussi :*

$$\begin{aligned}&(B_a \Rightarrow (\neg R_a \wedge \neg J_a \wedge \neg V_a))\\ \wedge&(R_a \Rightarrow (\neg B_a \wedge \neg J_a \wedge \neg V_a))\\ \wedge&(J_a \Rightarrow (\neg B_a \wedge \neg R_a \wedge \neg V_a))\\ \wedge&(V_a \Rightarrow (\neg B_a \wedge \neg R_a \wedge \neg J_a))\end{aligned} \tag{5}$$

C'est également correct, mais soyez conscient que cette formule, non seulement est plus compliquée à écrire (et donc à lire) mais comporte également de nombreuses redondances puisque de façon générale :

$$\begin{aligned}A \Rightarrow (\neg B \wedge \neg C \wedge \neg D) &\equiv \neg A \vee (\neg B \wedge \neg C \wedge \neg D)\\ &\equiv (\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg D)\end{aligned}$$

Quelques erreurs rencontrées :

— *certains ont écrit juste la formule 1*
— *certains ont écrit juste la formule 2 (ou une formule équivalente)*
— *certains ont bien identifié certains éléments de réponse mais se sont trompés dans la manière de les combiner, en inversant parfois les rôles des $\vee$ et des $\wedge$.*
— *plusieurs d'entre vous, inspirés par l'exercice 2, ont proposé $B_a \oplus R_a \oplus V_a \oplus V_a$. En fait ceci n'est correct que s'il n'y a que deux couleurs.*
Pour vous en convaincre, vous pouvez résoudre l'exercice suivant :

Exercice : *Montrez par récurrence structurelle qu'une formule de la forme $X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$ est vraie si et seulement si le nombre de variables propositionnelles X_i interprétées à vrai* ***est impair****.*
De la même façon, on peut montrer qu'une formule du type $X_1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow X_n$ est vraie si et seulement si le nombre de variables propositionnelles X_i interprétées à vrai ***est pair****.*

— *certains ont écrit une formule qui n'était pas une formule propositionnelle (en utilisant des prédicats avec des arguments et/ou des quantificateurs). Rappel : un formule propositionnelle se construit uniquement à partir des symboles propositionnels considérés, de $\top$, de $\perp$ et des connecteurs logiques $\neg, \wedge, \vee$, et $\Rightarrow$.*

(b) les deux sommets a et b n'ont pas la même couleur.
Correction :
Il faut décrire qu'aucune des couleurs ne peut être utilisée simultanément pour le sommet a et le sommet b soit :

$$(\neg B_a \vee \neg B_b) \wedge (\neg R_a \vee \neg R_b) \wedge (\neg J_a \vee \neg J_b) \wedge (\neg V_a \vee \neg V_b) \tag{6}$$

Ou encore, de façon équivalente :

$$\neg(B_a \wedge B_b) \wedge \neg(R_a \wedge R_b) \wedge \neg(J_a \wedge J_b) \wedge \neg(V_a \wedge V_b) \tag{7}$$

On pourrait être tenté de décrire cette propriété sous forme normale disjonctive mais cela devient très lourd, car il faut modéliser à la fois que les couleurs de a et b sont différentes mais aussi qu'ils n' ont chacun qu'une couleur, ce qui oblige à préciser à chaque fois le statut des 8 variables propositionnelles :

$$\begin{aligned}&(B_a \wedge \neg R_a \wedge \neg J_a \wedge \neg V_a \wedge \neg B_b \wedge R_b \wedge \neg J_b \wedge \neg V_b)\\ \vee&(B_a \wedge \neg R_a \wedge \neg J_a \wedge \neg V_a \wedge \neg B_b \wedge \neg R_b \wedge J_b \wedge \neg V_b)\\ \vee&\ldots\end{aligned} \tag{8}$$

Quelques erreurs rencontrées :

— *Beaucoup d'entre vous ont proposé la formule suivante :*

$$(B_a \land \neg B_b) \lor (R_a \land \neg R_b) \lor (J_a \land \neg J_b) \lor (V_a \land \neg V_b) \tag{9}$$

Cette formule n'est clairement pas équivalente à (6).
Remarquez que dès que a a une couleur que b n'a pas, cette formule est satisfaite, sans préjuger du statut des variables correspondant aux autres couleurs, qui pourraient toutes être à vraies par ailleurs.
En fait cette formulation n'est donc correcte que sous l'hypothèse d'avoir déjà imposé par ailleurs que chaque sommet ait une et une seule couleur (i.e. 1+2).

Remarquez également que cette formule ne présente pas de symétrie par rapport à a et b, contrairement à la phrase "a et b sont coloriés par des couleurs différentes" qui est clairement équivalente à "b et a sont coloriés par des couleurs différentes", ce qui devrait vous alerter d'un possible risque d'inadéquation de la modélisation. Quelques uns ont bien proposé une forme symétrique en rajoutant comme cas possibles dans la disjonction

$$... \lor (\neg B_a \land B_b) \lor (\neg R_a \land R_b) \lor (\neg J_a \land J_b) \lor (\neg V_a \land V_b) \tag{10}$$

mais cette formule souffre des mêmes défauts que la précédente et s'avère très peu restrictive.

— *Certains ont proposé d'énumérer des couples de coloriages possibles de a et b par une forme normale du type :*

$$\begin{aligned} &(B_a \land R_b) \lor (B_a \land J_b) \lor (B_a \land V_b) \\ \lor&(R_a \land B_b) \lor (R_a \land J_b) \lor (R_a \land V_b) \\ \lor&(J_a \land B_b) \lor (J_a \land R_b) \lor (J_a \land V_b) \\ \lor&(V_a \land B_b) \lor (V_a \land R_b) \lor (V_a \land J_b) \end{aligned} \tag{11}$$

ce qui peut aussi s'écrire de façon un peu plus compacte :

$$\begin{aligned} &(B_a \land (R_b \lor J_b \lor V_b)) \\ \lor&(R_a \land (B_b \lor J_b \lor V_b)) \\ \lor&(J_a \land (B_b \lor R_b \lor V_b)) \\ \lor&(V_a \land (B_b \lor R_b \lor J_b)) \end{aligned} \tag{12}$$

Mais, comme pour les cas des formules (9) et (10), cette formule n'interdit pas pour autant que les variables correspondant aux autres couleurs soient vraies et ceci n'est donc correct que sous l'hypothèse (2).

— *Certains ont proposé une formule non propositionnelle du style :*

$$\forall a, b, ((B_a \land B_b) \lor (R_a \land R_b) \lor (J_a \land J_b) \lor (V_a \land V_b)) \Rightarrow (a = b) \tag{13}$$

ou encore :

$$\forall a, b, ((B(a) \land B(b)) \lor (R(a) \land R(b)) \lor (J(a) \land J(b)) \lor (V(a) \land V(b))) \Rightarrow (a = b) \tag{14}$$

Aucune de ces deux formules ne rentre dans le cadre spécifié par l'enoncé.
Notez que si la formule (14) pourrait s'avérer correcte syntaxiquement, si l'on était au 1er ordre, sur une signature avec des prédicats unaires décrivant le fait qu'un sommet a une certaine couleur, une telle formule reviendrait à imposer tous les sommets soient coloriés par des couleurs différentes.
Une formule comme (13), avec des quantificateurs portant sur des indices de variables propositionnelles n'est par contre vraiment pas correcte au niveau syntaxique.
En laissant de coté les quantificateurs, ou pourrait par contre écrire en calcul propositionnel une formule comme :

$$((B_a \land B_b) \lor (R_a \land R_b) \lor (J_a \land J_b) \lor (V_a \land V_b)) \Rightarrow \bot \tag{15}$$

... qui s'avère en fait équivalente à (6) ou (7).

Dans cette question, il vous était juste demandé d'exprimer une propriété pour un couple de sommets a et b donnés (supposés reliés dans le graphe à colorier).
Si l'on veut représenter cette propriété pour tous des couples de sommets reliés dans un graphe $G = (S, A)$ (où S représente l'ensemble des sommets du graphe et A représente l'ensemble des arcs du graphe)... cela se traduira par un ensemble comme :

$$\Sigma = \bigcup_{(a,b)\in A} \{\neg B_a \vee \neg B_b, \neg R_a \vee \neg R_b, \neg J_a \vee \neg J_b, \neg V_a \vee \neg V_b\}$$

on pourrait écrire aussi cela sous la forme :

$$\Sigma = \{\neg B_a \vee \neg B_b, \neg R_a \vee \neg R_b, \neg J_a \vee \neg J_b, \neg V_a \vee \neg V_b \mid (a, b) \in A\}$$

ou encore sous la forme d'une conjonction :

$$\bigwedge_{(a,b)\in A} (\neg B_a \vee \neg B_b) \wedge (\neg R_a \vee \neg R_b)\wedge, (\neg J_a \vee \neg J_b) \wedge (\neg V_a \vee \neg V_b)$$

2. Un étudiant plus malin que les autres, réalise qu'il n'a besoin que de trois variables propositionnelles par sommet, B_s (vrai si le sommet s est colorié en bleu), R_s (vrai si le sommet s est colorié en rouge), J_s (vrai si le sommet s est colorié en jaune) et qu'un sommet sera considéré colorié en vert lorsque les trois variables précédentes sont fausses.

   Ecrire des formules en calcul propositionnel qui n'utilisent pour un sommet donné que les trois variables propositionnelles B_s, R_s et J_s pour $s \in \{a, b\}$ et qui traduisent les mêmes propriétés que précédemment : “le sommet a est colorié d'une et une seule couleur” et “les deux sommets a et b n'ont pas la même couleur”

   Correction : *Choisir de coder "a est colorié en vert" par le fait que "a n'est ni bleu, ni rouge, ni jaune" fait que n'importe quelle affectation des trois variables correspondra toujours à un choix d'au moins une couleur. Il n' y a donc rien à écrire pour modéliser cela.*
   De fait, substituer V_a par $\neg B_a \wedge \neg R_a \wedge \neg J_a$ dans (1) donne :

$$B_a \vee R_a \vee J_a \vee (\neg B_a \wedge \neg R_a \wedge \neg J_a) \equiv (B_a \vee R_a \vee J_a) \vee \neg(B_a \vee R_a \vee J_a) \equiv \top \tag{16}$$

   *Cette formule **étant une tautologie** elle est donc inutile.*
   La seule chose restant à modéliser est donc que "a est colorié par au plus une couleur", Si le sommet est colorié en vert, c'est forcément le cas. Les autres cas se réduisent à :

$$(\neg B_a \vee \neg R_a) \wedge (\neg B_a \vee \neg J_a) \wedge (\neg R_a \vee \neg J_a) \tag{17}$$

   Remarquez que les clauses de (2) qui contenaient le littéral V_a se réduisent à $\top$ lorsque l'on substitue cette variable par $\neg B_a \wedge \neg R_a \wedge \neg J_a$.
   *Sous **forme normale disjonctive** on obtient :*

$$(B_a \wedge \neg R_a \wedge \neg J_a) \vee (\neg B_a \wedge R_a \wedge \neg J_a) \vee (\neg B_a \wedge \neg R_a \wedge J_a) \vee (\neg B_a \wedge \neg R_a \wedge \neg J_a) \tag{18}$$

   Remarques :
   — *Plusieurs d'entre vous se sont contentés de reprendre la formule qu'ils avaient proposée dans la question 1, en substituant V_a par $(\neg B_a \wedge \neg R_a \wedge \neg J_a)$ sans se rendre compte pour autant des simplifications qui en résultaient.*
   Si ce n'est pas faux dans l'absolu, cela complique inutilement la formule.

   Quelques erreurs rencontrées :
   — *Certains ont oublié le cas de la couleur verte dans (18)*
   — *Mauvaise utilisation du $\oplus$*

on peut reprendre la formule 6 et simplement substituer les variables V_a et V_b par leur équivalent, ce qui donne :

$$(\neg B_a \vee \neg B_b) \wedge (\neg R_a \vee \neg R_b) \wedge (\neg J_a \vee \neg J_b) \wedge (B_a \vee R_a \vee J_a \vee B_b \vee R_b \vee J_b) \quad (19)$$

Quelques erreurs rencontrées :
— *certains ont omis les cas où l'un des sommets est colorié en vert.*
— *Certains ont mal exprimé la condition dans des cas où l'un des sommets est vert*

3. Un autre étudiant prétend qu'il suffit de deux variables propositionnelles X_s et Y_s pour chaque sommet s.
   (a) Expliquer comment faire pour représenter les couleurs d'un sommet avec ces deux variables.
   (b) En utilisant uniquement les variables X_s et Y_s pour $s \in \{a, b\}$, donner un ensemble de formules logiques qui modélise le fait que "le sommet a est colorié d'une et une seule couleur et les deux sommets a et b n'ont pas la même couleur".

Correction :
Il s'agissait d'un cas classique consistant à coder 4 possibilités avec 2 variables (booléennes,... i.e. 4 choix avec 2 bits).
Chaque interprétation du couple de variable X_s, Y_s doit être associé à une couleur, comme par

X_s	Y_s	*Couleur*
V	*V*	*Bleu*
V	*F*	*Rouge*
F	*V*	*Jaune*
F	*F*	*Vert*

Dans ce cas... chaque interprétation de X_s, Y_s correspond à un coloriage d'un sommet par une seule couleur. Il n'y a donc rien de plus à écrire.

Il y a en fait 24 façons différentes de construire un tel codage, correspondant à toutes les permutations possibles des couleurs sur les interprétations.

Quelques erreurs rencontrées :
— *L'erreur la plus fréquemment rencontrée est celle de ceux qui ont tenté de coder deux couleurs avec X_s (e.g. Bleu si X_s=V et Rouge si X_s=V) et les deux autres avec Y_s. Si l'on fait un tel choix, chaque sommet se retrouvera forcément colorié simultanément par deux couleurs différentes, ce qui ne peut convenir.*
— *D'autres ont proposé de représenter deux couleurs c1 et c2 respectivement par X_s=V et Y_s=V, tout en précisant qu'une troisième couleur c3 pouvait être représentée par (X_s=V et Y_s=V), et la quatrième c4 par (X_s=F et Y_s=F). Si une telle proposition se rapproche de l'idée du codage ci-dessus elle pose néanmoins un problème car cette sémantique induit que X_s=V et Y_s=V, signifie que "s a la couleur c1" et "s a la couleur c2", alors que X_s=F et Y_s=F signifie "s n'a pas la couleur c1" et "s n'a pas la couleur c2". Il faut associer chaque couleur à un état des deux variables et non d'une seule.*

Formalisons maintenant le fait que deux sommets a et b n'ont pas la même couleur. Pour que a et b n'aient pas la même couleur, il ne faut pas que les deux variables X_a et Y_a aient respectivement les mêmes valeurs que celles de X_b et Y_b, soit :

$$\begin{aligned} &\neg((X_a \Leftrightarrow X_b) \wedge (Y_a \Leftrightarrow Y_b)) \quad (20)\\ \equiv&\neg(X_a \Leftrightarrow X_b) \vee \neg(Y_a \Leftrightarrow Y_b)\\ \equiv&(X_a \oplus X_b) \vee (Y_a \oplus Y_b)\\ \equiv&(\neg X_a \wedge X_b) \vee (X_a \wedge \neg X_b) \vee (\neg Y_a \wedge Y_b) \vee (Y_a \wedge \neg Y_b) \end{aligned}$$

Exercice 4 *Modélisation premier ordre (6 points)*

On modélise de manière logique la situation sanitaire. Les objets utilisés représentent des personnes ainsi que des jours.

Pour cela on introduit les prédicats suivants :

— $\texttt{contact}(x, y, j)$ les personnes x et y ont été en contact le jour j

— $\texttt{symptome}(x, j)$ la personne x présente des symptômes le jour j

— $\texttt{masque}(x, j)$ la personne x porte un masque le jour j

— $\texttt{isole}(x, d, f)$ la personne x reste isolée du jour d au jour f inclus.

— $\texttt{teste-pos}(x, j)$ la personne x est testée positive le jour j

— $\texttt{teste-neg}(x, j)$ la personne x est testée négative le jour j

— $\texttt{contagieux}(x, j)$ la personne x est contagieuse le jour j

On introduit également les symboles de fonction et de prédicats suivants sur les dates et les individus :

— Le symbole de prédicat unaire J tel que $J(j)$ est vrai si j représente un jour.

— Le symbole de prédicat unaire I tel que $I(x)$ est vrai si x représente un individu.

— une constante `moi` pour représenter la personne qui parle

— un ensemble de fonctions unaires `+n` pour n'importe quel entier n, l'opération `+n` ajoute n jours à une date j. On pourra choisir n suivant les besoins, par exemple `+1` représente le lendemain ou `+7` pour passer au même jour de la semaine suivante. On écrira de manière usuelle $j\texttt{+n}$ au lieu de $\texttt{+n}(j)$;

— le symbole de prédicat binaire $\leq$ tel que $j \leq j'$ si le jour j est avant le jour j' ou bien le même jour.

1. Traduire en français (ou en anglais) les formules suivantes :
   (a) $\forall x\, j, \texttt{teste-neg}(x, j) \Rightarrow \neg\texttt{contagieux}(x, j)$
   (b) $\forall x, \exists j, \neg\texttt{masque}(x, j)$
   (c) $\exists j, \forall x, \neg\texttt{masque}(x, j)$
   (d) $\forall j, (\forall x, \neg\texttt{contact}(\texttt{moi}, x, j)) \Rightarrow \neg\texttt{masque}(\texttt{moi}, j)$

   Correction :

   (a) Toute personne qui est testée négative, n'est pas contagieuse le jour du test.
   (b) Personne ne porte de masque tous les jours
   (c) Il existe un jour où personne ne porte de masque
   (d) Les jours où je n'ai de contact avec personne, je ne porte pas de masque.

   Remarque : *il était important de bien faire apparaître dans la formulation la notion de jour qui apparaît dans les prédicats. Par contre la variable j étant liée dans les formules, la phrase associée doit conserver cet aspect générique du jour. Par exemple, on ne peut pas traduire la formule 1c par "personne ne porte de masque le jour j". En effet une telle formulation dépend a priori du jour j ce qui n'est pas le cas de la formule initiale.*

2. En utilisant uniquement les symboles donnés, exprimer comme des formules logiques les propriétés suivantes :
   (a) La même personne ne peut pas être testée positive et négative le même jour.
   (b) Une personne isolée sur une période donnée n'a pas de contact sans masque durant cette période.
   (c) Toute personne testée positive reste isolée au moins 7 jours à partir du jour de test (par exemple une personne détectée positive un mercredi devra restée isolée du mercredi du test jusqu'au mercredi suivant inclus et pourra ressortir le jeudi). Elle reste également isolée au delà des 7 jours tant qu'elle n'est pas deux jours sans symptôme.

   Correction :

(a) $\forall x\, j, \texttt{teste-pos}(x,j) \Rightarrow \neg \texttt{teste-neg}(x,j)$.
Remarque : *Cette formule est équivalente à sa contraposée*

$$\texttt{teste-neg}(x,j) \Rightarrow \neg \texttt{teste-pos}(x,j)$$

qui n'a donc pas besoin d'être ajoutée (même si cela reste correct). Par contre mettre une équivalence et donc ajouter la condition $\neg \texttt{teste-neg}(x,j) \Rightarrow \texttt{teste-pos}(x,j)$ *est incorrect car il est possible qu'une personne ne soit pas testée (ni positivement, ni négativement). De même la réponse*

$$\forall x\, j, (\texttt{teste-pos}(x,j) \wedge \neg \texttt{teste-neg}(x,j)) \vee (\texttt{teste-neg}(x,j) \wedge \neg \texttt{teste-pos}(x,j))$$

est incorrecte car implique que tout le monde est testé tous les jours. A fortiori la réponse $\forall x\, j, \texttt{teste-pos}(x,j) \vee \texttt{teste-neg}(x,j)$ *est doublement incorrecte car suppose qu'un test a lieu chaque jour et n'empêche pas que les deux soient vrais simultanément.*
Certains ont voulu utiliser la formulation $\forall x\, i\, j, \texttt{teste-pos}(x,i) \wedge \texttt{teste-neg}(x,j) \Rightarrow i = j$, *en principe correcte, sauf que le langage ne contient pas a priori de prédicat pour l'égalité (même si l'existence d'un ordre* $\leq$ *peut permettre de le définir sans trop de difficulté).*

(b) $\forall x\, j\, k, \texttt{isole}(x,j,k) \Rightarrow \forall y\, i, (j \leq i \wedge i \leq k) \Rightarrow \texttt{contact}(x,y,i) \Rightarrow \texttt{masque}(x,i)$.
Remarque :
Beaucoup de variantes possibles de la partie $\texttt{contact}(x,y,i) \Rightarrow \texttt{masque}(x,i)$ *qui peut s'écrire* $\neg \texttt{contact}(x,y,i) \vee \texttt{masque}(x,i)$ *ou encore* $\neg(\texttt{contact}(x,y,i) \wedge \neg \texttt{masque}(x,i))$ *qui est plus proche de la formulation "pas de contact sans masque" mais qui a souvent été mal parenthésé dans les copies.*
L'utilisation de $j\texttt{+}n$ *à la place de la variable* k *est inutile et incorrect, en effet, dans ce cas* n *doit être une variable de la logique et* $\texttt{+}$ *devrait alors être une opération binaire alors que l'énoncé précise que l'on a une infinité de fonction unaires à savoir* $\texttt{+0}$, $\texttt{+1}\ldots\texttt{+7}\ldots$
Attention aux notations associées aux contraintes sur les variables. On doit écrire par exemple $\forall j\, k, j \leq k \Rightarrow P(j,k)$ *et pas* $\forall j\, k, j \leq k, P(j,k)$ *qui ne respecte pas la syntaxe des formules et encore moins* $\forall j\, k, j \leq k \wedge P(j,k)$ *qui implique que* $\forall j\, k, j \leq k$ *qui est évidemment en général faux.*

(c) *Cette question avait une partie facile, à savoir une personne testée positive doit restée isolée 7 jours après le test. Cela se traduit par* $\forall x\, j, \texttt{teste-pos}(x,j) \Rightarrow \texttt{isole}(x,j,j\texttt{+7})$. *La partie plus compliquée à traduire est "Elle reste également isolée au delà des 7 jours tant qu'elle n'est pas deux jours sans symptôme." Une partie de la solution est dans la formule* $\texttt{symptome}(x,i) \Rightarrow \texttt{isole}(x,i,i\texttt{+2})$ *qui dit que si* x *a des symptômes le jour* i, *alors* x *reste deux jours de plus isolé (et donc ne pourra sortir de l'isolement qu'après deux jours sans symptôme).*
La partie vraiment difficile est de bien capturer la relation entre le jour du test, et cette isolement pour cause de symptômes. Si on quantifie pour tous les jours i *on traduit une autre propriété qui est que toute perssonne qui a des symptômes une journée reste isolée deux jours (ce qui est pertinent sanitairement mais pas la question). Si on limite* i *à être* $j\texttt{+7}$ *ou autre valeur fixée alors on ne capture pas le fait que la prolongation d'isolement peut être arbitrairement longue tant que les symptômes perdurent.*
La meilleure manière de traduire le fait que cette consigne s'applique en continuité d'un isolement pour test positif est de dire que l'isolement jusqu'au jour i *est prolongé de deux jours tant qu'il y a des symptômes. Ce qui donne au final la formule :*

$$\begin{aligned}\forall x\, j,\ & \texttt{teste-pos}(x,j) \Rightarrow \\ & \texttt{isole}(x,j,j\texttt{+7}) \wedge \forall i, (\texttt{isole}(x,j,i) \wedge \texttt{symptome}(x,i) \Rightarrow \texttt{isole}(x,i,i\texttt{+2}))\end{aligned}$$

3. On construit des interprétations du langage précédent. Le domaine de ces interprétations sera formé de l'ensemble des entiers naturels pour représenter les jours auquel on ajoute deux constantes A, B pour représenter des individus.

   L'interprétation de J (être un jour) est vraie pour les entiers et fausse pour les constantes A, B. L'interprétation de I (être un individu) est vraie pour les constantes A, B et fausse pour les entiers.

   Pour n un entier, l'opération `+n` est interprétée comme la fonction qui au jour représenté par l'entier j, associe le jour représenté par l'entier $j+n$. L'ordre $\leq$ est interprété comme l'ordre usuel sur les entiers et est faux si l'un des objets à comparer est l'une des constantes A, B.

   On va s'intéresser à des formules qui n'utilisent que les symboles de prédicats `symptome` et `contagieux`. Pour représenter l'interprétation de ces symboles, on utilise un tableau dont les lignes sont indexées par les individus A, B et les colonnes par les jours (des entiers). L'interprétation du prédicat est vraie pour l'individu x et le jour j si et seulement si il y a une croix sur la ligne x et la colonne j. L'interprétation est fausse pour tous les autres cas (en particulier pour les couples d'élements du domaine qui n'apparaissent pas dans le tableau).

   (a) Soit l'interprétation définie par les tableaux suivants :

   `symptome`

	0	1	2	3	4	5	6	7
A			X	X				
B								

   `contagieux`

	0	1	2	3	4	5	6	7
A	X	X	X	X	X	X	X	
B	X	X	X					

   Dans cette interprétation, A a des symptomes les jours 2 et 3, et est contagieux du jour 0 au jour 6. B n'a pas de symptômes mais est contagieux du jour 0 au jour 2.

   Donner la valeur de vérité dans cette interprétation de la formule, justifier la réponse :

   $$\forall x\, j, \texttt{symptome}(x, j\texttt{+2}) \Rightarrow \forall k, (j \leq k \wedge k \leq j\texttt{+4}) \Rightarrow \texttt{contagieux}(x, k)$$

   Correction : *La formule est vraie dans cette interprétation.*

   Pour justifier ce résultat, il faut montrer que la formule

   $$\mathit{symptome}(x, j\mathit{+2}) \Rightarrow \forall k, (j \leq k \wedge k \leq j\mathit{+4}) \Rightarrow \mathit{contagieux}(x, k)$$

   est vraie pour tout environnement $\{x \mapsto v, j \mapsto n\}$ dont pour toutes les valeurs de v et de n dans le domaine.

   — *Si $\mathit{symptome}(x, j\mathit{+2})$ est faux dans cet environnement alors la formule est trivialement vraie.*

   — *Il reste donc à traiter les cas où $\mathit{symptome}(x, j\mathit{+2})$ est vraie. Cela n'arrive que si la valeur de x est A et la valeur de $j\mathit{+2}$ est 2 ou 3. Comme l'opération $\mathit{+2}$ est interprétée comme l'addition useulle, cela se produit dans deux cas, $j \mapsto 0$ et $j \mapsto 1$.*

     On doit donc vérifier que

     — $\{x \mapsto A, j \mapsto 0\} \models \forall k, (j \leq k \wedge k \leq j\mathit{+4}) \Rightarrow \mathit{contagieux}(x, k)$

     — $\{x \mapsto A, j \mapsto 1\} \models \forall k, (j \leq k \wedge k \leq j\mathit{+4}) \Rightarrow \mathit{contagieux}(x, k)$

     Ce qui revient à montrer que $\mathit{contagieux}(x, k)$ est vrai pour $\{x \mapsto A, k \mapsto n\}$ avec $0 \leq n \leq 5$ ce qui est bien vérifié.

   Remarques :

   — *La formule exprime le fait que si on a des symptomes un jour j, alors on est contagieux deux jours avant et deux jours après. Cela n'exclut pas que l'on puisse être contagieux au delà de cette période (ce qui est le cas dans l'interprétation avec A qui est aussi contagieux le jour 6 et B qui est contagieux sans avoir de symptôme). Il ne faut pas se laisser influencer par l'interprétation dans le langage courant : "on est contagieux deux jours avant et deux jours après les symptômes" sous-entend qu'on n'est pas contagieux en dehors de cette période. Mais du point de vue logique la formule $A \Rightarrow B$ n'est pas équivalente à la formule dite "réciproque" $\neg A \Rightarrow \neg B$.*

— *La question posée demandait la valeur de vérité de la formule dans l'interprétation. La réponse attendue était donc soit vrai, soit faux. Une réponse "la formule est valide" est incorrecte (on peut trouver des interprétations pour lesquelles elle est fausse), "la formule est satisfiable" est correcte mais ne répond pas à la question. Une formule dans une interprétation à une valeur de vérité et une seule. Une formule peut avoir différentes valeurs si on se place dans différentes interprétations (et environnements). Dire qu'elle est valide, c'est dire qu'elle est vraie dans toutes les interprétations.*

(b) Proposer une interprétation des prédicats `symptome` et `contagieux` qui rende vraies simultanément les trois formules suivantes, justifier la réponse :

— $\exists x\, j, \texttt{symptome}(x, j{+}3) \land \texttt{contagieux}(x, j)$

— $\exists j, \forall x, I(x) \Rightarrow \texttt{contagieux}(x, j)$

— $\forall x, I(x) \Rightarrow \exists j, \texttt{symptome}(x, j)$

Correction : *Ce qui est demandé est une interprétation c'est-à-dire qu'il faut donner un domaine et des interprétations de tous les symboles. Le plus simple est de repartir d'un modèle comme celui utilisé à la question précédente. Il faut que la même interprétation rende vraies les trois formules simultanément.*

Ces trois formules correspondent aux propriétés suivantes

— *il existe une personne qui est contagieuse un jour donné et a des symptome trois jours après.*

— *il existe un jour où tous les individus sont contagieux*

— *tous les individus ont des symptomes au moins une journée*

Une solution simple est de choisir une interprétation avec un seul individu A, il suffit que cette personne soit contagieuse le jour 0 et ait des symptomes le jour 3. Les trois propriétés sont alors vérifiées.

On peut aussi reprendre le modèle précédent avec deux individus et le compléter pour rendre vraies les trois formules. Dans le modèle précédent, la première formule est vraie en choisissant pour x l'individu A et pour le jour j, le jour 0. La deuxième formule est aussi vraie dans cette interprétation, on peut choisir pour j les valeurs 0, 1 ou 2. Seule la troisième formule est fausse dans ce modèle puisque B n'a jamais de symptôme. Il suffit d'ajouter un jour où B a des symptomes. Cela ne remet pas en cause la valeur des autres formules.

symptome

	0	1	2	3	4	5	6	7
A			X	X				
B						X		

contagieux

	0	1	2	3	4	5	6	7
A	X	X	X	X	X	X	X	
B	X	X	X					