Licence Informatique, semestre 5 — 2014–15

Eléments de logique pour l'informatique (Info 315) — 6 janvier 2015

`http://www.lri.fr/~paulin/Logique`

Partiel - 25 octobre 2012

L'examen dure 2 heures. L'énoncé est composé de 4 pages, le barème est indicatif. Toutes les réponses devront être clairement justifiées. Le seul document autorisé est une page A4 manuscripte recto-verso. Le tableau résumant les règles du système G est donné à la fin du sujet.
Inscrivez votre nom sur chaque copie et numérotez-la. **Ne pas cacheter les copies !**

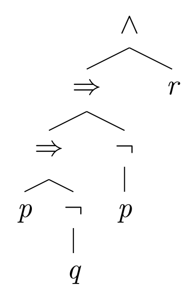
Exercice 1 *Logique propositionnelle, 4 points.* Soit la formule propositionnelle A définie comme

$$((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p) \wedge r$$

1. Ecrire la formule A sous forme d'arbre.
2. Donner la table de vérité de la formule A.
3. Donner une forme normale conjonctive et une forme normale disjonctive pour la formule A.
4. Cette formule est-elle valide ? justifier votre réponse.
5. Cette formule est-elle satisfiable ? si oui donner un modèle.

Correction :

1.



2. le cas où r est faux est trivial (la formule entière est fausse) dans le cas où r est vrai le cas où p est faux est aussi trivial (la formule entière est vraie).

p	q	r	$p \Rightarrow \neg q$	$(p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p$	A
-	-	F			F
F	-	V		V	V
V	V	V	F	V	V
V	F	V	V	F	F

3. Forme normale conjonctive : $(\neg p \vee q) \wedge r$
Forme normale disjonctive : $(q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

4. La formule n'est pas valide : il y a au moins une ligne où elle est fausse.

5. La formule est satisfiable : il y a au moins une ligne où elle est vraie. par exemple la seconde qui donne le modèle où $\{p, q, r \mapsto V\}$ dans lequel les trois variables sont vraies.

Exercice 2 *Enigme, 3 points.* Un homme qui semble divaguer déclare à toute la clientèle d'un café :

1. Le jour où je ne bois pas et où je dors, je ne suis pas content.
2. Le jour où je bois, je ne suis pas content et je dors.

3. Le jour où je ne mange pas, ou bien je ne suis pas content, ou bien je dors ou les deux.
4. Le jour où je mange, ou bien je suis content, ou bien je bois ou les deux.
5. Aujourd'hui, je suis content.

Questions

1. Introduire des variables propositionnelles pour représenter les principales notions et donner les formules correspondantes à chacune des affirmations précédentes.
2. On considère que toutes les affirmations précédentes sont vraies.
   (a) Par raisonnement élémentaire à partir des affirmations, montrer qu'il n'a pas bu.
   (b) Répondre en les justifiant par un raisonnement ou une table de vérité aux questions suivantes : a-t-il mangé ? a-t-il dormi ?

Correction :

1. On introduit les variables suivantes sur l'homme : b : il boit, c : il est content, m : il mange, d :il dort.
Les formules se traduisent de la manière suivante :
1 : $(\neg b \wedge d) \Rightarrow \neg c$
2 : $b \Rightarrow (\neg c \wedge d)$
3 : $\neg m \Rightarrow (\neg c \vee d)$
4 : $m \Rightarrow (c \vee b)$
5 : c

2. (a) c est vrai, donc l'affirmation 2 nous permet de déduire que b est faux (il ne boit pas).
(b) L'affirmation 1 nous permet alors de dire que d est faux, il n'a pas dormi.
Dans l'affirmation 3 on remarque que $(\neg c \vee d)$ *est faux et donc pour que l'affirmation soit vrai il faut que* $\neg m$ *soit faux et donc que m soit vrai : Il a mangé. Finalement on vérifie que la solution trouvée valide aussi l'affirmation 5 et donc on a bien une solution.*

Exercice 3 *Fonction récursive sur les formules, 4 points.* On rappelle les définitions récursives du nombre de connecteurs dans une formule et du nombre de sous-formules atomiques avec $\circ \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$:

$$\begin{array}{ll}
\texttt{nbsymb}(P) & = 0 \quad \texttt{si } P \texttt{ atomique} \\
\texttt{nbsymb}(\neg P) & = 1 + \texttt{nbsymb}(P) \\
\texttt{nbsymb}(P \circ Q) & = 1 + \texttt{nbsymb}(P) + \texttt{nbsymb}(Q)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
\texttt{nbatom}(P) & = 1 \quad \texttt{si } P \texttt{ atomique} \\
\texttt{nbatom}(\neg P) & = \texttt{nbatom}(P) \\
\texttt{nbatom}(P \circ Q) & = \texttt{nbatom}(P) + \texttt{nbatom}(Q)
\end{array}$$

1. Donner les équations récursives qui définissent une fonction `nbneg` qui compte le nombre de symboles $\neg$ dans une formule.
2. Prouver par récurrence sur la formule P que pour toute formule P qui ne contient pas de symbole de négation $\neg$, on a : $\texttt{nbatom}(P) = \texttt{nbsymb}(P) + 1$.
3. Montrer à l'aide d'un exemple que le résultat n'est plus vrai lorsque la formule P contient des symboles $\neg$.

Correction :

1.

$$\begin{array}{ll}
\textit{nbneg}(P) & = 0 \quad \textit{si } P \textit{ atomique} \\
\textit{nbneg}(\neg P) & = 1 + \textit{nbneg}(P) \\
\textit{nbneg}(P \circ Q) & = \textit{nbneg}(P) + \textit{nbneg}(Q)
\end{array}$$

2. Soit $\Phi(P) \stackrel{\text{def}}{=} \textit{nbatom}(P) = \textit{nbsymb}(P) + 1$ *la formule à montrer par récurrence structurelle sur P, P étant supposée ne pas avoir de symboles de négation. Il suffit de vérifier les trois propriétés suivantes :*

- *Le cas dans lequel P est atomique, on a alors par définition des fonctions* $\mathtt{nbatom}(P) = 1$ *et* $\mathtt{nbsymb}(P) = 0$ *et donc la formule* $\Phi(P)$ *est vérifiée.*
- *Le cas dans lequel P est de la forme $\neg A$ ne se présente pas car P ne contient pas de symboles de négation par hypothèse.*
- *Le cas dans lequel P est de la forme $A \circ B$ avec $\circ \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$. Si P ne contient pas de symboles de négation, il en est de même de A et de B qui vérifient l'hypothèse de récurrence* $\mathtt{nbatom}(A) = \mathtt{nbsymb}(A) + 1$ *et* $\mathtt{nbatom}(B) = \mathtt{nbsymb}(B) + 1$. *On a ensuite par définition des fonctions* $\mathtt{nbatom}(A \circ B) = \mathtt{nbatom}(A) + \mathtt{nbatom}(B)$ *et* $\mathtt{nbsymb}(A \circ B) = 1 + \mathtt{nbsymb}(A) + \mathtt{nbsymb}(B)$, *on en déduit par simple raisonnement arithmétique que* $\mathtt{nbatom}(A \circ B) = 1 + \mathtt{nbsymb}(A \circ B)$.

3. *Si on prend simplement la formule* $P \stackrel{\text{def}}{=} \neg\bot$ *on a* $\mathtt{nbatom}(P) = 1$ *et* $\mathtt{nbsymb}(P) = 1$ *et donc la formule n'est pas vérifiée.*

Exercice 4 *Transformation de formules, 5 points.* On dira qu'une formule est en forme **minimale** si elle n'utilise que le connecteur $\Rightarrow$, et comme formule atomique $\bot$ et les variables propositionnelles. Le but de l'exercice est de montrer que toute formule propositionnelle admet une forme minimale équivalente.

1. Montrer que les formules $p \Rightarrow \bot$ et $\neg p$ sont logiquement équivalentes.
2. Sachant que les formules $p \Rightarrow q$ et $\neg p \vee q$ sont logiquement équivalentes, donner une formule équivalente à $p \vee q$ en forme minimale.
3. (a) Donner la table de vérité de $((p \Rightarrow (q \Rightarrow \bot)) \Rightarrow \bot$.
   (b) Comparer cette table et celle de $p \wedge q$.
   (c) En déduire une formule équivalente à $\neg p \wedge q$ qui soit en forme minimale.
4. Déduire des questions précédentes une fonction `min` qui transforme toute formule propositionnelle P (sans oublier $\top$) en une formule équivalente en forme minimale.

Correction :

1. *. Si p est vrai alors $p \Rightarrow \bot$ et $\neg p$ sont faux, si p est faux alors $p \Rightarrow \bot$ et $\neg p$ sont vrais, les formules sont équivalentes.*
2. *. Une forme minimale pour $p \vee q$ est $(p \Rightarrow \bot) \Rightarrow q$ (qui est équivalent à $\neg p \Rightarrow q$)*
3. *(a)*

p	q	$p \Rightarrow (q \Rightarrow \bot)$	$(p \Rightarrow (q \Rightarrow \bot)) \Rightarrow \bot$
F	_	V	F
V	F	V	F
V	V	F	V

   (b) c'est la même table que $p \wedge q$
   (c) $((p \Rightarrow \bot) \Rightarrow q \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot$, une autre forme possible est $(q \Rightarrow p) \Rightarrow \bot$

4.

$$
\begin{array}{llll}
\mathit{min}(\bot) & = \bot & \mathit{min}(P \vee Q) & = (\mathit{min}(P) \Rightarrow \bot) \Rightarrow \mathit{min}(Q) \\
\mathit{min}(\top) & = \bot \Rightarrow \bot & \mathit{min}(P \wedge Q) & = (\mathit{min}(P) \Rightarrow (\mathit{min}(Q) \Rightarrow \bot)) \Rightarrow \bot \\
\mathit{min}(p) & = p \quad \texttt{si } p \texttt{ var. prop.} & \mathit{min}(P \Rightarrow Q) & = \mathit{min}(P) \Rightarrow \mathit{min}(Q) \\
\mathit{min}(\neg P) & = \mathit{min}(P) \Rightarrow \bot & &
\end{array}
$$

Exercice 5 *Preuves dans le système G, 4 points.*

1. Montrer que la règle de coupure $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}$ est valide dans le système G.

2. Soit le séquent $p, \neg q \vdash \neg(p \Rightarrow q), \neg q \Rightarrow r$
   (a) Quelle est la formule associée à ce séquent ?
   (b) Construire une preuve dans le système G de ce séquent.
   (c) Le séquent est-il valide ? justifier votre réponse.

3. Soit le séquent $\neg(p \Rightarrow (\neg q \wedge r)) \vdash q$. En utilisant l'arbre de dérivation dans le système G pour ce séquent, dire s'il est valide et sinon donner une interprétation pour lequel il est faux.

Correction :

1. On peut le faire en introduisant M la formule qui est la conjonction des formules de Γ et P la disjonction des formules de Δ. On a donc comme hypothèses que $M \Rightarrow (P \vee A)$ et $(A \wedge M) \Rightarrow P$ sont vraies et il faut montrer que l'on a alors $M \Rightarrow P$ vrai. On peut faire une table de vérité (les cas dans lesquels l'une des deux premières formules est fausse ne nous intéressent pas) :

M	P	A	$M \Rightarrow (P \vee A)$	$(A \wedge M) \Rightarrow P$	$M \Rightarrow P$
F	_	_	V	V	V
V	V	_	V	V	V
V	F	V	V	F	_
V	F	F	F	_	_

2. (a) La formule associée est $(p \wedge \neg q) \Rightarrow (\neg(p \Rightarrow q) \vee (\neg q \Rightarrow r))$

(b) On construit l'arbre de preuve :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p, \neg q, \vdash \neg q \Rightarrow r, p}\,\text{HYP} \qquad \dfrac{\dfrac{}{p, q \vdash \neg q \Rightarrow r, q}\,\text{HYP}}{p, \neg q, q \vdash \neg q \Rightarrow r}\,(\neg g)}{p, \neg q, (p \Rightarrow q) \vdash \neg q \Rightarrow r}\,(\Rightarrow g)}{p, \neg q \vdash \neg(p \Rightarrow q), \neg q \Rightarrow r}\,(\neg d)$$

(c) L'arbre de preuve est complet (les feuilles sont des règles hypothèse) donc le séquent est valide.

3. On construit l'arbre de dérivation :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vdash q, \neg q \qquad p \vdash q, r}{p \vdash q, \neg q \wedge r}\,(\wedge d)}{\vdash q, p \Rightarrow (\neg q \wedge r)}\,(\Rightarrow d)}{\neg(p \Rightarrow (\neg q \wedge r)) \vdash q}\,(\neg g)$$

Au moins une des feuilles $p \vdash q, r$ ne contient que des formules atomiques mais n'est par une règle hypothèse. La formule n'est pas valide, elle est fausse dans l'interprétation $\{p \mapsto V; q, r \mapsto F\}$

Rappel des règles logiques

hypothèse	$(\textsc{Hyp})\dfrac{}{A, \Gamma \vdash \Delta, A}$	
	gauche	droite
$\bot$	$(\textsc{Jok})\dfrac{}{\bot, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \bot}$
$\top$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\top, \Gamma \vdash \Delta}$	$(\textsc{Triv})\dfrac{}{\Gamma \vdash \Delta, \top}$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$
$\wedge$	$\dfrac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}$
$\vee$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \Rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}$