Licence Informatique, semestre 5 — 2013–14
Eléments de logique pour l'informatique (Info 315) — 25 octobre 2013
`http://www.lri.fr/~paulin/Logique`

Partiel - 25 octobre 2013

L'examen dure 2 heures. L'énoncé est composé de 5 pages, le barème est indicatif. Toutes les réponses devront être clairement justifiées. Le seul document autorisé est une page A4 manuscripte recto-verso. Le tableau résumant les règles du système G est donné à la fin du sujet.
Inscrivez votre nom sur chaque copie et numérotez-les. **Ne pas cacheter les copies !**

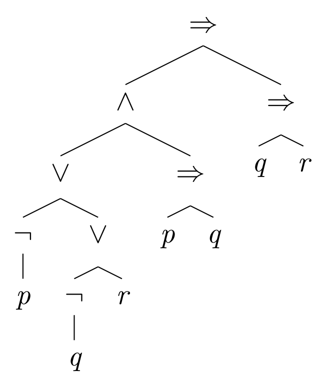
Exercice 1 *Logique propositionnelle, 5 points.*
Soit la formule propositionnelle A définie comme

$$((\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$$

1. Donner la représentation syntaxique de la formule A sous forme d'arbre.
2. Donner la table de vérité de la formule A.
3. Donner une forme normale conjonctive et une forme normale disjonctive équivalentes à la formule A.
4. Construire le BDD ordonné réduit correspondant à la formule en prenant comme ordre des variables $r < q < p$.
5. Cette formule est-elle valide ? justifier votre réponse.
6. Cette formule est-elle satisfiable ? si oui donner un modèle.
7. Donner le nombre total de modèles de la formule A.

Correction :

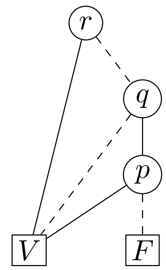
1.



2. Le cas où r est vrai est trivial (la formule entière est vraie) dans le cas où r est faux le cas où q est faux est aussi trivial (la formule entière est vraie).

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$\neg p \vee \neg q \vee r$	$q \Rightarrow r$	A
_	_	V			V	V
_	F	F			V	V
V	V	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	F	F

3. Forme normale conjonctive : $(p \vee \neg q \vee r)$
Forme normale disjonctive : $r \vee (q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$



4.

5. *La formule n'est pas valide : il y a au moins une ligne où elle est fausse.*
6. *La formule est satisfiable : il y a au moins une ligne où elle est vraie. par exemple la troisième qui donne le modèle où* $\{p \mapsto V, q \mapsto V, r \mapsto F\}$.
7. *Le nombre de modèles est* $2^2 + 2 + 1$ *c'est-à-dire 7.*

Exercice 2 *Enigme, d'après Smullyan, 3 points.*

Une femme qui cherche un mari présente à ses prétendants 3 coffres numérotés de 1 à 3. Un seul de ces coffres contient son portrait qu'il faut découvrir. Chaque coffre comporte une inscription :

1. Le portrait est dans ce coffre
2. Le portrait n'est pas dans ce coffre
3. Le portrait n'est pas dans le coffre 1

Questions. On introduit des variables propositionnelles P_1 pour représenter le fait que le portrait est dans le coffre 1 et P_2 pour représenter le fait que le portrait est dans le coffre 2.

1. Donner une formule qui utilise les variables P_1 et P_2 et qui est vraie exactement lorsque le portrait est dans le coffre 3.
2. Donner une formule qui utilise les variables P_1 et P_2 et qui représente le fait que le portrait est exactement dans un des coffres.
3. Donner des formules I_1, I_2 et I_3 qui utilisent les variables P_1 et P_2 et qui représentent les inscriptions sur chacun des coffres.
4. Sachant qu'une seule des formules I_1, I_2 et I_3 est vraie, en déduire dans quel coffre est caché le portrait.

Correction :

1. *Le tableau sera dans le coffre* 3 *si et seulement si il n'est ni dans le coffre* 1*, ni dans le coffre* 2*, la formule qui exprime cette situation (que l'on pourra noter* P_3*) est* $\neg P_1 \land \neg P_2$.
2. *Plusieurs formulations (équivalentes) sont possibles :*
   – $(P_1 \Rightarrow \neg P_2) \land (P_2 \Rightarrow \neg P_1)$ *: si le tableau est dans le coffre* 1 *alors il n'est pas dans le coffre* 2 *et s'il est dans le coffre* 2 *alors il n'est pas dans* 1 *ce qui s'écrit ;*
   – $(P_1 \land \neg P_2) \lor (\neg P_1 \land P_2) \lor (\neg P_1 \land \neg P_2)$ *: soit le tableau est dans le coffre* 1 *et pas dans le coffre 2, soit il n'est pas dans le coffre* 1 *et il est dans le coffre* 2 *soit il n'est ni dans le coffre* 1 *ni dans le coffre* 2 *(auquel cas* P_3 *est vrai par définition) :*
   – $\neg(P_1 \land P_2)$ *: la seule situation à exclure est celle dans laquelle le tableau serait à la fois dans les coffres* 1 *et* 2.
3. $I_1 \stackrel{\text{def}}{=} P_1$, $I_2 \stackrel{\text{def}}{=} \neg P_2$, $I_3 \stackrel{\text{def}}{=} \neg P_1$
4. *soit* I_1 *soit* I_3 *est vrai, la seule manière d'avoir une seule des trois affirmations vraie est que* I_2 *soit faux et donc que* P_2 *soit vrai. Le portrait est dans le coffre 2.*

Exercice 3 *Modélisation, 3 points.*

On introduit un langage dans lequel il y a

- une constante `moi` qui représente la personne qui parle, et une constante `légumes` qui représente l'aliment correspondant ;
- deux symboles de relations binaires `mange` et `aime` : $\texttt{mange}(p, a)$ représente la propriété "p mange a" et $\texttt{aime}(p, a)$ le fait que "p aime a".

1. Donner des formules logiques qui correspondent aux expressions suivantes :
   (a) J'aime tout ce que je mange.
   (b) Il y a des choses que je n'aime pas mais que je mange quand même.
   (c) Ceux qui n'aiment pas les légumes ne mangent rien.
   (d) Si tout le monde accepte de manger quelque chose qu'il n'aime pas alors je mange des légumes.

   Correction :

   (a) $\forall a, \textit{mange}(\textit{moi}, a) \Rightarrow \textit{aime}(\textit{moi}, a)$

   (b) $\exists a, \textit{mange}(\textit{moi}, a) \land \neg \textit{aime}(\textit{moi}, a)$

   (c) $\forall p, \neg \textit{aime}(p, \textit{legumes}) \Rightarrow \forall a, \neg \textit{mange}(p, a)$

   (d) $(\forall p, \exists a, \neg \textit{aime}(p, a) \land \textit{mange}(p, a)) \Rightarrow \textit{mange}(\textit{moi}, \textit{legumes})$

2. Exprimer sous forme de phrase en langage naturel les propriétés correspondant aux formules suivantes :
   (a) $\forall x, \exists y, \texttt{aime}(x, y) \land \texttt{mange}(x, y)$
   (b) $\exists y, \forall x, \texttt{aime}(x, y) \land \texttt{mange}(x, y)$

   Correction :

   (a) Tout le monde mange au moins un aliment qu'il aime.

   (b) Il y a un aliment que tout le monde aime et mange.

Exercice 4 *Preuves dans le système G, 4 points.*

1. Soit le séquent $(\neg p \lor (q \Rightarrow r)), p \Rightarrow q \vdash \neg p, r$
   (a) Quelle est la formule associée à ce séquent ?
   (b) Construire une preuve dans le système G de ce séquent.
   (c) Le séquent est-il valide ? justifier votre réponse.
2. Soit le séquent $(\neg p \lor \neg q \lor r), (p \Rightarrow q) \vdash \neg q, r$. En utilisant l'arbre de dérivation dans le système G pour ce séquent, dire s'il est valide et sinon donner une interprétation pour lequel il est faux.

Correction :

1. *(a) La formule associée est* $(\neg p \lor (q \Rightarrow r)) \land (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \lor r)$
   (b) On construit l'arbre de preuve :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\LeftLabel{HYP}
\UnaryInfC{$\neg p, (p \Rightarrow q) \vdash \neg p, r$}
\AxiomC{}
\LeftLabel{HYP}
\UnaryInfC{$r, (p \Rightarrow q), p \vdash r$}
\AxiomC{}
\LeftLabel{HYP}
\UnaryInfC{$q, p \vdash r, q$}
\AxiomC{}
\LeftLabel{HYP}
\UnaryInfC{$p \vdash r, q, p$}
\LeftLabel{$(\Rightarrow g)$}
\BinaryInfC{$(p \Rightarrow q), p \vdash r, q$}
\LeftLabel{$(\Rightarrow g)$}
\BinaryInfC{$(q \Rightarrow r), (p \Rightarrow q), p \vdash r$}
\LeftLabel{$(\neg d)$}
\UnaryInfC{$(q \Rightarrow r), (p \Rightarrow q) \vdash \neg p, r$}
\LeftLabel{$(\lor g)$}
\BinaryInfC{$(\neg p \lor (q \Rightarrow r)), p \Rightarrow q \vdash \neg p, r$}
\end{prooftree}
$$

(c) L'arbre de preuve est complet (les feuilles sont des règles hypothèse) donc le séquent est valide.

2. On construit l'arbre de dérivation :

$$
(\vee g)\,\dfrac{(\neg g)\,\dfrac{(\neg d)\,\dfrac{(\Rightarrow g)\,\dfrac{q \vdash p, r \qquad q \vdash p, r, q}{q, (p \Rightarrow q) \vdash p, r}}{(p \Rightarrow q) \vdash p, \neg q, r}}{\neg p, (p \Rightarrow q) \vdash \neg q, r} \qquad (\neg q \vee r), (p \Rightarrow q) \vdash \neg q, r}{(\neg p \vee \neg q \vee r), (p \Rightarrow q) \vdash \neg q, r}
$$

Au moins une des feuilles $q \vdash p, r$ ne contient que des formules atomiques mais n'est par une règle hypothèse. La formule n'est pas valide, elle est fausse dans l'interprétation $\{p \mapsto F; q \mapsto V; r \mapsto F;\}$

Exercice 5 *Transformation de formules propositionnelles, 5 points.*

On cherche à montrer que toute formule propositionnelle est équivalente à une formule qui ne contient que des variables propositionnelles, et les connecteurs de conjonction et de négation. On appelle $\mathcal{C}$ l'ensemble de telles formules.

1. Soit p une variable propositionnelle, donner la table de vérité de la formule $p \wedge \neg p$. En déduire des formules de l'ensemble $\mathcal{C}$ équivalentes à $\perp$ et $\top$.
2. Soit p et q deux variables propositionnelles, donner des formules de $\mathcal{C}$ équivalentes à $p \vee q$ et $p \Rightarrow q$.
3. Donner les équations récursives qui définissent une fonction `fconj` qui à toute formule propositionnelle P associe une formule de $\mathcal{C}$ équivalente.
4. On introduit un ordre sur les valeurs propositionnelles : $F \leq V$, c'est-à-dire que le faux est plus petit que le vrai.

   On en déduit un ordre sur les interprétations $I_1 \leq I_2 \stackrel{\text{def}}{=} \forall p, I_1(p) \leq I_2(p)$, c'est-à-dire que pour toute variable propositionnelle p, la valeur de cette variable dans l'interprétation I_1 est inférieure ou égale à la valeur de la variable dans l'interprétation I_2.
   Montrer par récurrence sur la structure de la formule P que si P ne contient ni le symbole $\neg$ ni le symbole $\Rightarrow$ et si $I_1 \leq I_2$ alors $\mathtt{val}(I_1, P) \leq \mathtt{val}(I_2, P)$.
5. En déduire qu'il n'y a pas de formule équivalente à $\neg p$ qui n'utilise que les connecteurs $\vee$ et $\wedge$.

Correction :

1. La table de vérité est

P	$\neg P$	$p \wedge \neg p$
V	F	F
F	V	F

On a donc $\perp \equiv p \wedge \neg p$ et $\top \equiv \neg\perp \equiv \neg(p \wedge \neg p)$.

Une formule équivalente à $\perp$ dans $\mathcal{C}$ est donc $p \wedge \neg p$ et une formule équivalente à $\top$ dans $\mathcal{C}$ est donc $\neg(p \wedge \neg p)$

2. Une formule équivalente à $p \vee q$ dans $\mathcal{C}$ est $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ en utilisant les lois de de Morgan et une formule équivalente à $p \Rightarrow q$ dans $\mathcal{C}$ est $\neg(p \wedge \neg q)$ en utilisant $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ puis les lois de de Morgan.

3.

$$\begin{array}{lll}
\texttt{fconj}(\bot) & = p \wedge \neg p & \\
\texttt{fconj}(\top) & = \neg(p \wedge \neg p) & \\
\texttt{fconj}(p) & = p & \textit{si } p \textit{ est une variable propositionnelle} \\
\texttt{fconj}(\neg P) & = \neg(\texttt{fconj}(P)) & \\
\texttt{fconj}(P \wedge Q) & = \texttt{fconj}(P) \wedge \texttt{fconj}(Q) & \\
\texttt{fconj}(P \vee Q) & = \neg(\neg \texttt{fconj}(P) \wedge \neg \texttt{fconj}(Q)) & \\
\texttt{fconj}(P \Rightarrow Q) & = \neg(\texttt{fconj}(P) \wedge \neg \texttt{fconj}(Q)) &
\end{array}$$

4. *On se donne deux interprétations I_1 et I_2 telles que $I_1 \leq I_2$. La formule à montrer $\phi(P)$ est "si P ne contient pas le symbole $\neg$ et le symbole $\Rightarrow$ alors $\texttt{val}(I_1, P) \leq \texttt{val}(I_2, P)$. On raisonne par récurrence sur la structure de la formule en considérant chaque cas :*

   (a) *Si $P = \bot$ alors $\texttt{val}(I_1, P) = F = \texttt{val}(I_2, P)$ donc a fortiori $\texttt{val}(I_1, P) \leq \texttt{val}(I_2, P)$*

   (b) *Si $P = \top$ alors $\texttt{val}(I_1, P) = V = \texttt{val}(I_2, P)$ donc a fortiori $\texttt{val}(I_1, P) \leq \texttt{val}(I_2, P)$*

   (c) *Si P est une variable propositionnelle, alors $\texttt{val}(I_1, P) = I_1(P) \leq I_2(P) = \texttt{val}(I_2, P)$*

   (d) *Si P est de la forme $\neg Q$ ou $Q \Rightarrow R$ alors la propriété $\Phi(P)$ est trivialement vraie car elle ne concerne que les formules sans négation ni implication.*

   (e) *Si P est de la forme $Q \wedge R$, on peut supposer que les propriétés $\Phi(Q)$ et $\Phi(R)$ sont vraies et comme Q et R ne contiennent pas non plus les connecteurs $\neg$ et $\Rightarrow$ on a $\texttt{val}(I_1, Q) \leq \texttt{val}(I_2, Q)$ et $\texttt{val}(I_1, R) \leq \texttt{val}(I_2, R)$. On raisonne par cas sur la valeur de $\texttt{val}(I_2, R)$*
      - *Si $\texttt{val}(I_2, R) = V$ alors on a forcément $\texttt{val}(I_1, R) \leq \texttt{val}(I_2, R)$.*
      - *Si $\texttt{val}(I_2, Q \wedge R) = F$ alors $\texttt{val}(I_2, Q) = F$ ou $\texttt{val}(I_2, R) = F$. Dans le premier cas ($\texttt{val}(I_2, Q) = F$) on a aussi $\texttt{val}(I_1, Q) = F$ (car $\texttt{val}(I_1, Q) \leq \texttt{val}(I_2, Q)$) et donc $\texttt{val}(I_1, P) = F = \texttt{val}(I_2, P)$. Le cas où $\texttt{val}(I_2, R) = F$ se traite de la même manière.*

   (f) *Si P est de la forme $Q \vee R$, on raisonne de manière analogue au cas de $Q \wedge R$. On sait (par hypothèse de récurrence) que $\texttt{val}(I_1, Q) \leq \texttt{val}(I_2, Q)$ et $\texttt{val}(I_1, R) \leq \texttt{val}(I_2, R)$. On regarde le cas où $\texttt{val}(I_2, P) = F$. On a alors $\texttt{val}(I_2, Q) = F$ et $\texttt{val}(I_2, R) = F$, on a don aussi $\texttt{val}(I_1, Q) = F$ (car $\texttt{val}(I_1, Q) \leq \texttt{val}(I_2, Q)$) et $\texttt{val}(I_1, R) = F$ et donc $\texttt{val}(I_1, P) = F$.*

   On a bien montré que dans tous les cas la propriété $\Phi(P)$ est vérifiée.

5. *On suppose que $\neg p$ est équivalente à une formule A sans négation ni implication. Soit I_1 et I_2 deux interprétations telles que $I_1(q) = F$ et $I_2(q) = V$ pour toutes les variables propositionnelles q. On a bien $I_1 \leq I_2$. Donc on devrait avoir (résultat précédent) que $\texttt{val}(I_1, A) \leq \texttt{val}(I_2, A)$. Or comme $A \equiv \neg p$, et que des formules équivalentes ont même valeur pour n'importe quelle interprétation, on a $\texttt{val}(I_1, A) = \texttt{val}(I_1, \neg p) = V$ et $\texttt{val}(I_2, A) = \texttt{val}(I_2, \neg p) = F$ donc $\texttt{val}(I_1, A) \not\leq \texttt{val}(I_2, A)$.*

   On en déduit que $\neg p$ ne peut être équivalente à une formule sans négation ni implication.

Rappel des règles logiques du système G

hypothèse	$(\textsc{Hyp})\dfrac{}{A, \Gamma \vdash \Delta, A}$	
	gauche	droite
$\bot$	$\dfrac{}{\bot, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \bot}$
$\top$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\top, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{}{\Gamma \vdash \Delta, \top}$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$
$\wedge$	$\dfrac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}$
$\vee$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \Rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}$